MATHEMATISCHE ANNALEN.

IN VERBINDUNG MIT C. NEUMANN

BEGRÜNDET DURCH

RUDOLF FRIEDRICH ALFRED CLEBSCH.

Unter Mitwirkung der Herren

Prof. P. Gordan zu Erlangen, Prof. C. Neumann zu Leipzig,
Prof. K. VonderMühll zu Leipzig

gegenwärtig herausgegeben

von

Prof. **Felix Klein** zu Göttingen. und Prof. **Adolph Mayer** zu Leipzig.

XXIX. Band.

(Mit drei Figurentafeln und einer lithographierten Tafel.)

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1887.

Inhalt des neunundzwanzigsten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

Ueber Gruppen gerader Linien auf Flächen höherer Ordnung.

Von

Fr. G. Affolter in Zürich.

(Zweite Mittheilung.)

Die Aufgabe, die wir uns in dieser Mittheilung zu lösen gestellt haben, ist: diejenigen Gruppen gerader Linien auf Flächen höherer Ordnung zu bestimmen, die von der ersten Art sind und keine vollständige Degeneration bilden.

Auch hier wie in der ersten Abhandlung (im 27. Annalenbande) beschäftigen wir uns noch nicht mit dem Nachweis der Existenz der Gruppen und der Bestimmung der zu ihnen gehörenden Flächen, sondern bestimmen nur die Art der Gruppirungsformen der Geraden in den als möglich erscheinenden Gruppen. Ebenso werden wir auch hier nur auf die fundamentalen Eigenschaften dieser Gruppen eintreten, während wir uns die Darstellung der weiteren Eigenschaften für eine folgende Mittheilung vorbehalten, um sie in einem zusammenhängenden und umfassenden Ganzen zur Darstellung zu bringen.

Zur Auffindung dieser Gruppen ist es noch nicht nothwendig von irgend einer speciellen Fläche Gebrauch zu machen. Es ist daher auch noch nicht nöthig auf die einzelnen Singularitäten als: „*Vielfache Punkte, vielfache Curven etc. der Flächen*" einzutreten. Das Auftreten solcher Singularitäten hat keine neuen Gruppenbildungen zur Folge, sondern sie bedingen blos eine Modification in den Gruppenformen. Der Einfluss derartiger Singularitäten ist somit nur von secundärer Bedeutung.

In diesem Aufsatze beziehen wir uns auf die in der gleichnamigen ersten Abhandlung gegebenen Begriffe und Definitionen und halten sie in der Folge fest.

1.

Einige Hülfssätze.

Nach der gegebenen Definition bedeutet die Gruppe $G^I_{n,w,v}$ von Geraden l auf der Fläche F_n der n^{ten} Ordnung solche z_v auf F_n gelegene gerade Linien, die Z_v mal zu je v in je einer Ebene E liegen, und wobei von diesen Ebenen durch jede Gerade l je w_v hindurchgehen. Von diesen Seiten l schneiden sich nie mehr als zwei in einer Ecke. Jede Ebene E, in der zwei Seiten l liegen, ist eine Ebene E der Gruppe und es befinden sich alsdann je v Seiten in derselben. Von den Ebenen E schneiden sich nie mehr als zwei in einer Kante K. Gehen mehr als zwei Ebenen E durch eine Gerade, dann gehen immer w_v hindurch und die Gerade ist eine Seite l der Gruppe.

a) *Ueber den Werth von v* lässt sich vorläufig nur angeben, dass er unter allen Umständen eine ganze positive Zahl und höchstens gleich $n-2$ sein kann. Der kleinste Werth von v kann nur 1 sein. Ob v alle ganzen Zahlwerthe zwischen 1 und $n-2$ annehmen kann oder nicht annehmen kann ist vorläufig noch nicht angebbar.

b) *Ueber den Werth w_v* wissen wir aus seiner Bedeutung, dass er nur einer ganzen positiven Zahl gleich sein kann und unter keinen Umständen kleiner als 1 sein darf. Es kann auch ohne Weiteres sein grösster möglicher Werth bestimmt werden. Zu dem Zwecke machen wir die Annahme, dass F_n keine vielfachen Punkte und Curven besitze. Treten solche auf, so lassen sich die eintretenden Modificationen leicht bestimmen und in Rechnung ziehen.

Es besitze F_n *eine* Gerade l, so gehen durch dieselbe $(n+2)(n-2)^2$ Tangentialebenen, die F_n ausserhalb l in je einem Punkte berühren. Zerfällt nun die Restcurve C_{n-1} des Schnittes von F_n mit einer Tangentialebene in $v-1$ Geraden und in eine Curve C_{n-v} der $n-v^{\text{ten}}$ Ordnung ohne Doppelpunkte, so zählt eine solche Ebene E für

$$(1) \qquad t = \frac{1}{2}(v-1)(2n-v-2)$$

durch l hindurchgehende Tangentialebenen. Der grösste Werth von w_v oder $w_{\max}$ ist somit gleich der ganzen Zahl des Bruches

$$(2) \qquad \frac{2(n+2)(n-2)^2}{(v-1)(2n-v-2)}.$$

In jeder solchen Ebene E liegen dann v Geraden und eine Restcurve C_{n-v} von der $n-v^{\text{ten}}$ Ordnung. Jede dieser Ebenen zählt für

$$(3) \qquad t_{n,v} = \frac{1}{2}v(2n-v-1)$$

Tangentialebenen und für

$$(4) \qquad \frac{t_{n,v}(t_{n,v}-1)(t_{n,v}-2)}{1\,.\,2\,.\,3}$$

dreifach berührende Tangentialebenen.

Um für spätere Betrachtungen die Uebersicht zu erleichtern und um dem Leser das Nachrechnen der Zahlenwerthe w_{max} für specielle Flächen nicht zu hoher Ordnung zu ersparen, geben wir in nachstehender Tabelle die Maximalwerthe von w_v für alle Werthe von $v = 2$ bis $n-2$ und für $n = 4$ bis 12. Ausserdem fügen wir noch die Zahl der Geraden bei, die nach der Gleichung

$$(5) \qquad z_{max} = n(11n - 24)$$

auf der Fläche n^{ter} Ordnung in endlicher Anzahl höchstens möglich sind.

Der Ausdruck (2) für w_{max} zeigt, dass für $v = 1$, $w_{max} = \infty$ für jeden Werth von n. Es zeigt dies schon von vornherein, dass der Fall $v = 1$ für sich besonders betrachtet werden muss.

$n =$	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$z_{max} =$	80	155	252	371	512	675	860	1067	1296
v	w_{max}	w_{max}	w_{max}	w_{max}	w_{max}	w_{max}	w_{max}	w_{max}	w_{max}
2	12	21	32	45	60	77	96	117	140
3	—	12	18	25	32	41	51	61	73
4	—	—	14	18	24	29	36	46	51
5	—	—	—	16	20	24	29	35	41
6	—	—	—	—	18	21	25	30	35
7	—	—	—	—	—	19	23	27	31
8	—	—	—	—	—	—	21	25	28
9	—	—	—	—	—	—	—	23	26
10	—	—	—	—	—	—	—	—	25

Die letzten Hülfssätze, dargestellt durch die Zahlwerthe (2, 3 und 4), können jedoch nicht so ohne Weiteres als richtig angesehen werden. Ihre Gültigkeit lässt sich aber in jedem speciellen Fall ohne Weiteres nur durch einfaches Abzählen darthun. Wir nehmen daher obige Sätze vorläufig als allgemein richtig an und werden dann später bei der Betrachtung der Flächen wieder auf dieselben zurückkommen.

2.

Ueber die dualistisch und reciprok sich entsprechenden Gruppen.

Indem als Grunddefinition der Gruppe $G^I_{n,w,v}$ festgesetzt wurde, dass in jeder Ebene E der Gruppe v Seiten l liegen und durch jede Seite l je w_v Ebenen hindurchgehen, ist zugleich ein *dualistisches* Entsprechen zwischen Gerade und Ebene im Raume mit festgestellt worden. Es wird daher zu jeder Gruppe $G^I_{n,w,v}$ eine dualistisch entsprechende Gruppe existiren, wobei den Ebenen E der einen Gruppe die Geraden l' der andern und umgekehrt entsprechen. Demnach wird der Fläche F_n, als Punktgebilde aufgefasst, für die andere Gruppe wieder eine Fläche $F_{n'}$ entsprechen, die auch als Punktfläche aufzufassen ist, deren Ordnung n' mit der Ordnung n von F_n übereinstimmen oder verschieden sein kann.

Als reciproke Gruppen bezeichnen wir solche zwei, in denen den Seiten der einen Gruppe die Seiten der andern, den Punkten der einen Gruppe die Ebenen der andern und umgekehrt entsprechen. Die zu solchen Gruppen gehörenden Flächen entsprechen einander reciprok.

Diese Doppelverwandtschaft — Dualismus und Reciprocität — tritt in den Gruppen mit nicht vollständiger Degeneration deutlich hervor. In allen den Fällen, in denen $v = w$, entsprechen sich die Gruppen selbst dualistisch und alsdann führt nur die Reciprocität zu neuen Gruppen.

Von der Reciprocität machen wir keinen weiteren Gebrauch, indem die daraus hervorgehenden Gruppen mit ihren Eigenschaften leicht nach gewohnter Weise aufgefunden werden können. Von den Punktflächen werden wir jedoch den dualistisch entsprechenden Gruppen immer die Haupteigenschaften einander gegenüberstellen.

Durch die in obigem Sinne dargestellte Doppelverwandtschaft sind mit einer Gruppe immer zugleich noch drei andere Gruppen, ihrem inneren Wesen nach identisch, in der äusseren Form verschieden, mitbestimmt.

3.

Aufstellung der Hauptgleichungen.

Aus der Definition der Gruppe $G^I_{n,w,v}$ folgt, dass zwischen der Zahl z_v der Seiten l, der Zahl Z_v der Ebenen E, den Werthen v und w_v die Relation

(6) $$\frac{z_v}{v} = \frac{Z_v}{w_v} = A_v$$

bestehen muss. In jeder Ebene E liegen v Seiten l_x, von denen jede

durch $(v-1)(w_v-1)$ der übrigen nicht in der Ebene gelegenen Seiten geschnitten wird. Die Restcurve C_{n-v} in Ebene E werde von a Seiten l_y, die nicht auf E liegen, getroffen; dann muss, nach Relation (6),

$$a = v a_v \tag{7}$$

gesetzt werden können. Die Zahl z_v der Seiten der Gruppe ist nun durch die Gleichung bestimmt:

$$z_v = v(v-1)(w_v-1) + v + v a_v \tag{8}$$

Aus den Gleichungen (6), (7) und (8) ergeben sich die Hauptgleichungen:

$$\left\{\begin{array}{ll} z_v = v(\alpha + a_v); & \alpha = (v-1)(w_v-1) + 1, \\ Z_v = w_v(\alpha + a_v); & \mathsf{A}_v = \alpha + a_v, \end{array}\right. \tag{9}$$

Aus diesen Gleichungen gehen ohne Weiteres folgende Sätze hervor:

1) *Die Gruppe $G^I_{n,w,v}$ besitzt z_v Seiten l und Z_v Ebenen E. Von jenen Seiten liegen Z_v mal je v in einer Ebene E. Von den Z_v Ebenen E gehen z_v mal je w_v durch eine Gerade l.*

2) *Es giebt $v a_v$ Seiten l_y, von denen keine in einer der Ebenen E liegt, die durch die Seiten l_x einer bestimmten Ebene hindurchgehen.*

3) *Jede Seite l wird von $w_v(v-1)$ der übrigen Seiten geschnitten. Von diesen liegen w_v mal je $v-1$ in einer durch l gehenden Ebene E.*

4) *Jede Seite einer Ebene wird von $(v-1)(w_v-1)$ nicht in der Ebene liegenden Seiten getroffen.*

5) *Jede Seite wird von $(v-1)^2(w_v-1) + v a_v$ Seiten nicht geschnitten.*

1) *Die Gruppe $G^I_{n',v,w}$ besitzt z_w Ebenen E und Z_w Seiten l. Von diesen Ebenen gehen Z_w mal je v_w durch eine Seite und diese Seiten liegen zu je w in den z_w Ebenen.*

2) *Es giebt $w a_w$ Ebenen E_y, von denen keine durch eine Seite hindurchgeht, die eine bestimmte Seite schneiden.*

3) *Jede Ebene E wird von $v_w(w-1)$ der übrigen Ebenen in Seiten geschnitten. Diese Ebenen gehen v_w mal zu je $w-1$ durch je eine Seite.*

4) *Jede Ebene einer Seite wird von $(w-1)(v_w-1)$ nicht durch die Seite gehenden Ebenen in Seiten geschnitten.*

5) *Jede Ebene wird von $(w-1)^2(v_w-1) + w a_w$ Ebenen in Kanten geschnitten.*

4.

Bestimmung des Werthes a_v.

Es seien L und M zwei zu einander windschiefe Seiten der Gruppe die von b_v der übrigen Seiten geschnitten werden. Berücksichtigt man

den Satz (5) und bedenkt man hierbei, dass die b_v zu L und M transversalen Seiten, je zu den $w_v(v-1)$ Seiten gehören, die je L und M schneiden, so ergiebt sich die Gleichung:

$$w_v(v-1) = b_v \frac{(v-1)^2(w_v-1)+va_v}{(v-1)(w_v-1)}, \tag{10}$$

oder auch

$$b_v = \frac{w_v(w_v-1)(v-1)^2}{(v-1)^2(w_v-1)+va_v}, \tag{11}$$

$$a_v = (w_v-1)(v-1)^2\frac{w_v-b_v}{vb_v}. \tag{12}$$

Es ist so die Bestimmung von a_v auf die von b_v zurückgeführt. Bei der Aufstellung dieser Gleichungen sind wir von dem Begriff der Homogenität der Gruppen in Bezug auf die Seiten derselben ausgegangen; indem wir voraussetzten, dass sich die Seiten derselben vollständig gleichartig zu einander verhalten und irgend zwei windschiefe immer von gleich vielen (b_v) der übrigen geschnitten werden. Bei den dualistisch entsprechenden Gruppen entspricht dieser Voraussetzung dann die Thatsache, dass irgend zwei Ebenen E, die sich in einer Kante schneiden, immer von gleichvielen (b_w) der übrigen Ebenen E_x in Seiten geschnitten werden. Solche Ebenen E_x heissen wir in der Folge Transversalebenen.

5.

Bestimmung von b_v.

Es seien l_x ($x = 1$ bis v) die v in einer bestimmten Ebene E liegenden Seiten der Gruppe, und C_{n-v} sei die Restcurve dieser Ebene. Von den Schnittpunkten der Ebene E mit den nicht in der Ebene liegenden Seiten l der Gruppen liegen auf jeder Seite l_x je $(v-1)$ (w_v-1) Punkte p und auf der Restcurve va_v Punkte π. Die Gesammtzahl der Punkte p und π ist gegeben durch

$$P_{p\cdot\pi} = v((v-1)(w_v-1)+a_v). \tag{13}$$

Die Ebene E wird, wie leicht abzuzählen, durch

$$K = (w_v-1)((v-1)(w_v-1)+a_v)+a_v \tag{14}$$

der übrigen Ebenen in Kanten k geschnitten. Auf diesen Kanten müssen nun auch die Punkte π und p einer bestimmten Vertheilung gemäss liegen. Zunächst ist klar, dass durch jeden Punkt p, da er auf einer Seite l_x liegt, nur $w_v - 1$ Kanten k hindurchgehen, während durch jeden Punkt π der C_{n-v} je w_v Kanten hindurchgehen müssen. Durch Abzählung ergiebt sich, dass es a_v Kanten k_0 giebt, auf denen je v Punkte π und keine Punkte p liegen und dass von diesen Kanten k_0

durch jeden Punkt π nur je eine hindurchgeht. Diese a_v Kanten k_0 absorbiren dadurch auch alle $v a_v$ Punkte π. Von den übrigen Kanten k gehen dann durch jeden Punkt π noch $w_v - 1$ wie durch die Punkte p. Die Zahl dieser Kanten ist angegeben durch

$$(15) \qquad K_{\pi \cdot p} = (w_v - 1)\,((v-1)\,(w_v - 1) + a_v).$$

Diese Kanten $k_{\pi,p}$ können nun aber zu den Punkten p und π folgende verschiedene Beziehungen haben.

a) Es können auf einer Anzahl A_p von Kanten k_p nur Punkte p liegen.

b) Es können auf einer Anzahl A_π von Kanten k_π nur Punkte π liegen und

c) können auf einer Anzahl $A_{\pi p}$ von Kanten Punkte π und p zugleich vorkommen.

Diese 3 Fälle sind nun näher zu untersuchen:

Unter allen Umständen muss zunächst

$$(16) \qquad A_p + A_\pi + A_{\pi p} = K_{\pi,p}$$

sein.

1. *Der Fall a.* Liegen v Punkte p auf einer Kante k_p, dann muss k_p jede der v Seiten l_x in *einem Punkte* p schneiden. Es giebt nun aber auf jeder l_x je $(v-1)\,(w_v - 1)$ solcher Punkte p. Wenn durch jeden Punkt nur eine solche Kante k_p geht, auf der v Punkte p liegen, dann muss

$$(17) \qquad A_p = (v-1)\,(w_v - 1)$$

sein. Gehen durch einen Punkt p und folglich durch alle diese Punkte mehr als eine Kante k_p, dann müssen durch jeden Punkt p je $w_v - 1$ der Kanten k_p hindurchgehen (siehe entsprechende Betrachtungen der ersten Mittheilung) und es wird sich eine Gruppe absondern, die in Bezug auf eine Fläche v^{ter} Ordnung eine Gruppe vollständiger Degeneration ist. In diesem Fall muss

$$(18) \qquad A_p = (v-1)\,(w_v - 1)^2$$

sein. Es ist endlich noch der Fall denkbar, dass es keine Kante k_p giebt, auf der v Punkte p liegen, d. h. dass

$$(19) \qquad A_p = 0$$

sein kann. Es ergeben sich also für A_p die drei Werthe:

$$(20) \qquad A_p = 0; \quad = (v-1)\,(w_v - 1); \quad = (v-1)\,(w_v - 1)^2,$$

die zu ebensoviel Gruppengattungen führen werden.

2. *Der Fall b.* Ein Zerfallen der Gruppe $G'_{n,w,v}$ würde aus denselben Gründen wie oben eintreten müssen, wenn durch die Punkte π

mehr als einmal a_v Kanten k_π, auf denen v Punkte π liegen, hindurchgehen werden. Es ist also unter allen Umständen

(21) $$A_\pi = 0.$$

3. *Der Fall c.* Nach den Betrachtungen der Fälle a und b würden die Kanten k durch die Kanten k_p und k_π nicht aufgebraucht und es wird somit unter allen Umständen $A_{\pi,p}$ nicht gleich Null sein können. In Bezug auf die Vertheilung der Punkte p und π auf jeder Kante $k_{\pi,p}$ wird dieselbe von Kante zu Kante immer dieselbe sein. Diese Vertheilung lässt sich ohne Weiteres angeben. Liegen nämlich auf einer Kante $k_{p.\pi}$ mehr als 1 Punkt p z. B. 2 oder mehr, d. h. liegen in der durch die Kante $k_{\pi p}$ bestimmten Ebene E_k zwei oder mehr Seiten der Gruppe, die die Seiten der Ebene E schneiden, so müssen in E_k v solcher Seiten liegen und es geht dann $k_{\pi p}$ in eine Kante k_p über. Es kann also keine $k_{\pi,p}$ durch mehr als einen Punkt p hindurchgehen.

Wir erhalten jedoch dieses Resultat noch durch eine andere Betrachtungsweise. Wir nehmen an, dass auf jeder Kante $k_{p,\pi}$ x Punkte p und $v - x$ Punkte π liegen, so ist alsdann die Zahl der Kanten gegeben durch

$$\frac{va_v \cdot (w_v - 1)}{v - x} = A_{\pi,p}.$$

Es sei nun:

(1) $$A_p = 0.$$

In diesem Falle erhält man die Doppelgleichung zur Bestimmung der Zahl der Kanten $k_{p\pi}$

(22) $$\frac{va_v}{v-x}(w_v - 1) = \frac{v(v-1)(w_v-1)}{x}(w_v - 1)$$
$$= (w_v - 1)((v-1)(w_v - 1) + a_v),$$

oder

(23) $$a_v = \left(\frac{v}{x} - 1\right)(v-1)(w_v - 1).$$

Ersetzt man a_v durch b_v (Gleichung 12), dann ist

(24) $$\left(\frac{v}{x} - 1\right) = (v - 1)\frac{w_v - b_v}{vb_v}.$$

Da v, x, w_v, b_v nur ganze positive Zahlen, v und w_v und x nicht kleiner als 1 sein können, so folgt sofort, dass Gleichung (24) nur für den Werth $x = 1$ erfüllt werden kann. Es muss daher

(25) $$\frac{w_v - 1}{vb_v} = 1; \quad w_v = (v+1)\,bv; \quad x = 1$$

sein. Es liegt somit auf jeder Kante $k_{p,\pi}$ nur ein Punkt p. Daraus geht hervor, dass es nur eine Seite l_n giebt, die zu einer Seite l_x der

Ebene E, worin Seite l_m die E in einem Punkte von C_{n-v} schneidet, gemeinsame Transversale ist. Es ist also

(26) $$b_v = 1 \quad \text{und} \quad w_v = v + 1.$$

Es sei nun:

(II) $$\mathsf{A}_p = (v-1)(w_v - 1).$$

In diesem Falle muss

(27) $$\frac{v a_v}{v - x}(w_v - 1) = \frac{v(v-1)(w_v-1)}{x}(w_v - 2)$$
$$= (w_v - 1)\left((v-1)(w_v-1) + a_v\right) - (v-1)(w_v-1)$$

sein, woraus folgt, dass:

(28) $$a_v = \left(\frac{v}{x} - 1\right)(v-1)(w_v - 2)$$

und indem man a_v durch b_v ersetzt,

(29) $$\left(\frac{v}{x} - 1\right) = (v-1)\frac{w_v - 1}{v \cdot b_v} \cdot \frac{w_v - b_v}{w_v - 2}.$$

Es kann diese Gleichung, weil alle Grössen nur positive ganze Zahlwerthe und v, x, w_v nicht kleiner als 1 sein können, nur erfüllt werden für

(30) $$x = 1; \quad b_v = 2; \quad \frac{w_v - 1}{2v} = 1$$

oder

$$w_v = 2v + 1.$$

Es sei nun endlich

(III) $$\mathsf{A}_p = (v-1)(w_v - 1)^2.$$

In diesem Falle muss $x = w_v$ sein und dann ist

(31) $$a_v = 0; \quad b_v = w_v.$$

Die Hauptgleichungen (9) gehen dann in die folgenden über:

(32) $$z_v = v\alpha; \quad Z_v = v\alpha; \quad \alpha = (v-1)(w_v - 1) + 1.$$

Es sind diess die Gleichungsformen, für die Gruppen vollständig Degenerationen, und gehen auch in dieselben über, sobald man $v = n$ setzt.

Nur für $n = 4$ bis 10 (nach den Resultaten der ersten Mittheilung) repräsentiren diess Gruppen vollständiger Degeneration, während die heutigen Betrachtungen zeigen, dass für jeden beliebigen Werth von $v > 10$ diese Gruppenbildung noch möglich sein muss, nur muss dann die Ordnungszahl n der Fläche von v verschieden und zwar grösser sein. Unter allen Umständen sind diese Gruppenformen möglich für jeden Werth v, sobald n gleich oder grösser als $\alpha = (w_v - 1)(v-1) + 1$ ist; indem sie dann für diese Flächen Gruppen nicht vollständiger Degeneration darstellen.

6.

Zusammenstellung der Hauptgleichungen.

Indem wir $b_v = w_v$ vorläufig ausser Acht lassen, haben sich als Werthe für b_v ergeben 1 und 2. Die hierdurch charakterisirten Gruppen bezeichnen wir *erster* und *zweiter* Gattung.

Gruppen erster Gattung ($b_v = 1$).

Die diese Gruppengattung bestimmenden Gleichungen sind:

$$(33)\quad \begin{gathered} b_v = 1. \quad w_v = v + 1. \quad a_v = v(v-1)^2, \\ \alpha = v(v-1) + 1; \quad \mathsf{A}_v = v^3 - v^2 + 1, \\ z_v = v(v^3 - v^2 + 1); \quad Z_v = (v+1)(v^3 - v^2 + 1), \\ \mathsf{A}_p = 0. \quad \mathsf{A}_\pi = v(v-1)^2, \quad \mathsf{A}_{\pi,p} = v^2(v-1). \end{gathered}$$

Die diesen Gleichungen entsprechenden Gruppenwerthe für $v = 2$ bis $v = 10$ sind in nachstehender Tabelle angegeben.

$b_v = 1.$

Nr.	v	w_v	α	a_v	A_v	z_v	Z_v	A_π	$\mathsf{A}_{\pi,p}$
1	2	3	3	2	5	10	15	2	4
2	3	4	7	12	19	57	76	12	18
3	4	5	13	36	49	196	245	36	48
4	5	6	21	80	101	505	606	80	100
5	6	7	31	150	181	1086	1267	150	180
6	7	8	43	252	295	2065	2360	252	294
7	8	9	57	392	449	3592	4041	392	448
8	9	10	73	576	649	5841	6490	576	648
9	10	11	91	810	901	9010	9911	810	900

Vergleicht man die Zahlwerthe für z_v, wie sie sich in dieser Tabelle präsentiren, mit den Werthen von z_{max}, wie sie in der ersten Tabelle als höchste endliche Anzahl der auf den Flächen möglich erscheinenden Geraden sich vorfinden, so sieht man, dass die Gruppen zu ihrer Existenz rasch eine grosse Ordnungszahl der Fläche verlangen. So können die Gruppen Nr. 1 und 2 auf Flächen von der 4ten Ordnung an, Nr. 3 auf solchen der 6ten, Nr. 4 auf solchen der 8ten, Nr. 5 auf solchen der 12ten Ordnung an, nur noch möglich sein, und dass die übrigen Gruppen Flächen viel höherer Ordnung verlangen.

Gruppen zweiter Gattung. ($b_v=2$).

Die diese Gruppen bestimmenden Gleichungen sind:

$$(34)\quad \begin{cases} b_v=2, \quad w_v=2v+1, \quad a_v=(v-1)^2(2v-1), \\ \alpha=2v^2-2v+1, \quad A_v=v(2v^2-3v+2), \\ z_v=v^2(2v^2-3v+2), \quad Z_v=v(2v+1)(2v^2-3v+2), \\ A_p=2v(v-1), \quad A_\pi=(v-1)^2(2v-1), \quad A_{\pi,p}=2v(v-1)(2v-1). \end{cases}$$

Die diesen Gleichungen entsprechenden Gruppenwerthe für $v=2$ bis $v=10$ sind in nachstehender Tabelle zusammengestellt.

$b_v=2.$

Nr.	v	w_v	α	a_v	A_v	z_v	Z_v	A_p	$A_{\pi p}$
1	2	5	5	3	8	16	40	4	24
2	3	7	13	20	33	99	231	12	180
3	4	9	25	63	88	352	792	24	672
4	5	11	41	144	185	925	2035	40	1800
5	6	13	61	275	336	2016	4368	60	3960
6	7	15	85	468	553	3871	8295	84	7644
7	8	17	113	735	848	6784	14396	112	13440
8	9	19	135	1088	1133	11097	23427	144	22032
9	10	21	181	1599	1780	17800	37380	180	34200

Vergleicht man auch hier die Werthe z_v der Tabelle mit den Werthen z_v max. so erkennt man, dass die Gruppen sehr rasch hohe Ordnungszahlen der Flächen verlangen. So kann Gruppe Nr. 1 auf Flächen 4ter Ordnung, Nr. 2 auf solchen 5ter, Nr. 3 auf solchen 7ter, Nr. 4 auf solchen 11ter Ordnung an möglich sein. Diese Gruppen verlangen somit zu ihrer Existenz schon von vorneherein eine noch grössere Ordnungszahl als die Gruppen 1ter Gattung.

Vertauscht man in beiden Tabellen die Zahlwerthe v mit w, z_v mit Z_v so erhält man die Zahlwerthe w, v_w, z_w und Z_w der diesen Gruppen dualistisch entsprechenden Gruppen.

7.

Gruppen gerader Linien für die $b_v=0$.

Es ist nun der specielle Fall noch näher zu untersuchen ob auch solche Gruppen möglich seien, in denen irgend zwei windschiefe Seiten keine gemeinsame Transversale besitzen, für die also $b_v=0$ wäre.

Diese Erscheinung kann offenbar nur dann eintreten, sobald durch jede Seite l nur eine Ebene hindurchgeht, d. h. wenn $w_v = 0$ und $w_v - 1 = 0$ ist; während v beliebige Werthe annehmen kann. Eine solche Ebene E muss alsdann in Bezug auf die Fläche F_n unter allen Umständen eine ausgezeichnete sein. Unter dieser Bedingung gehen die Hauptgleichungen 9 in folgende über:

$$(35) \qquad \begin{cases} \alpha = 1, & A_v = 1 + a_v, \\ z_v = v(1+a_v), & Z_v = 1\,.\,(1+a_v). \end{cases}$$

Jede der Z_v Ebenen E besitzt v Seiten der Gruppe und bildet mit ihnen eine Grundgruppe für sich selbst. Die Gesammtzahl Z_v der Ebenen E kann man daher nur als eine Aneinanderschiebung von Grundgruppen, bestehend je aus einer Ebene E und v Seiten ansehen. Diese Gesammtzahl oder mit ihr gleichbedeutend a_v hängt daher von der speciellen Natur einer jeden Fläche, auf denen diese Gruppen vorkommen sollen, ab. Es lässt sich daher der Werth von a_v nur aus den Gesetzen der Anschiebung von Gruppen bestimmen. Die Aufgabe a_v zu bestimmen fällt somit ausser den Rahmen dieser Abhandlung. Für a_v lässt sich doch ein andrer Ausdruck leicht aufstellen ohne der Entwickelung vorzugreifen, wenn man die Voraussetzung macht, dass die Gleichungen (10—12) auch für $b_v = 0$ und $w_v = 1$ Gültigkeit haben. Unter dieser Annahme kann man setzen:

$$(36) \qquad \frac{w_v - 1}{v b_v} = \frac{0}{0} = d_v,$$

wobei jetzt d_v statt a_v ein noch unbestimmter Werth ist. Alsdann ist

$$(37) \qquad a_v = (v-1)^2 d_v$$

und die Gleichungen (35) gehen in folgende über:

$$(38) \qquad \begin{cases} w_v = 1, \quad b_v = 0, \quad a_v = (v-1)^2 d_v, \\ \alpha = 1, \quad A_v = 1 + (v-1)^2 d_v, \\ z_v = v(1+(v-1)^2 d_v), \quad Z_v = 1 + (v-1)^2 d_v. \end{cases}$$

Um die dualistisch entsprechenden Gruppen zu erhalten setzt man $v_w = 1$ und lässt w unbestimmt. In diesem Fall reducirt sich die Grundgruppe auf eine Gerade und w durch sie hindurchgehende ausgezeichnete Ebenen. Eine Anschiebung solcher Gruppen führt dann zu

$$(39) \qquad \begin{cases} z_w = 1 + (w-1)^2 d_w \text{ Seiten } l, \\ Z_w = w(1+(w-1)^2 d_w) \text{ Ebenen } E. \end{cases}$$

Als einen ganz besonders wichtigen Specialfall hat man die Gruppe zu bezeichnen, in denen $v = w = 1$ ist, d. h. den Fall in welchem

sich die Gruppe auf eine Gerade und auf eine durch sie hindurchgehende Ebene reducirt. In diesem Fall ist dann

$$(40)\qquad \begin{cases} \alpha = 1, & a_v = 0, \quad A_v = 1, \\ z_v = 1, & Z_v = 1. \end{cases}$$

8.

Beispiele zu den neuen Gruppen.

Als bekannte Beispiele zu den obigen Gruppen erster, zweiter und nullter Gattung führen wir die Gruppen von Geraden auf Flächen 4^{ter} und 5^{ter} Ordnung an, die Sturm in seiner Abhandlung: „*Ueber die Flächen mit einer endlichen Zahl von (einfachen) Geraden, vorzugsweise die der 4^{ten} und 5^{ten} Ordnung*", eingehend untersucht hat.

1) *Gruppe erster Gattung.*

Die Fläche 5^{ter} Ordnung mit einer Doppelcurve 5^{ter} Ordnung, die einen dreifachen Punkt hat, der auch dreifacher Punkt der Fläche ist, besitzt 10 Gerade etc.

$$(b_v = 1, \quad w_v = 3, \quad v = 2, \quad z_v = 10, \quad Z_v = 15).$$

2) *Gruppe zweiter Gattung.*

Die Fläche 4^{ter} Ordnung mit einem doppelten Kegelschnitt hat 16 Gerade, etc.

$$b_v = 2, \quad v = 2, \quad w_v = 5, \quad z_v = 16, \quad Z_v = 40.$$

3) *Gruppen nullter Gattung.*

Erstes Beispiel. Die Fläche 4^{ter} Ordnung mit einer doppelten Geraden besitzt 16 Gerade etc.

$$(v = 2, \quad w_v = 1, \quad z_v = 16, \quad Z_v = 8, \quad d_v = 7).$$

Zweites Beispiel. Die Fläche 5^{ten} Grades mit zwei zu einander windschiefen doppelten Geraden besitzt 13 Gerade, durch die je zwei ausgezeichnete Ebenen gehen, etc.

$$(w = 2, \; v_w = 1, \; z_w = 13, \; Z_w = 26, \; d_w = 12).$$

Drittes Beispiel. Die Fläche 5^{ter} Ordnung mit einer doppelten cubischen Raumcurve hat 11 unter sich windschiefe Geraden etc.

$$(v_w = 1, \; w = 2, \; z_w = 11, \; Z_w = 22, \; d_w = 10).$$

Als dualistisch entsprechend hat man:

Viertes Beispiel. Die Fläche 5^{ter} Ordnung mit einer dreifachen Geraden besitzt 22 Geraden in 11 Ebenen etc.

$$(w_v = 1, \; v = 2, \; z_v = 22, \; Z_v = 11, \; d_v = 10).$$

Fünftes Beispiel. Die Fläche 5^{ter} Ordnung mit einer doppelten Raumcurve 4^{ter} Ordnung 1. Species hat 14 Geraden etc.

$$w_v = 1,\ v = 2,\ z_v = 14,\ Z_v = 7,\ d_v = 6.$$

9.

Einige allgemeine Eigenschaften der Gruppen erster und zweiter Gattung.

Wir stellen hier einige Eigenschaften der Gruppen erster und zweiter Gattung zusammen, die sich aus dem Begriff und den Gleichungen dieser Gruppen ohne weitergehende Untersuchungen ergeben. Weitere und für die Bestimmung der zu den Gruppen gehörenden Flächen nöthigen Eigenschaften sämmtlicher Gruppen gedenken wir in einer demnächst folgenden Mittheilung eingehender zu behandeln.

a) Eigenschaften der Gruppen erster Art und erster Gattung.

6) *Jede Gruppe erster Art und erster Gattung mit der Degeneration v besitzt*

$$(v^3 - v^2 + 1)v$$

Seiten l und

$$(v + 1)(v^3 - v^2 + 1)$$

Ebenen E.

7) *In jeder Ebene E liegen v Seiten l, und durch jede Seite gehen $v + 1$ Ebenen E.*

Oder auch: zu jeder Ebene E gehören v Seiten l, die in der Ebene E liegen, und zu jeder Seite l gehören $v + 1$ Ebenen E, die durch die Seite l hindurchgehen.

8) *In jeder Ebene E, in der zwei Seiten liegen, befinden sich v und die Ebene ist eine Ebene E der Gruppe.*

9) *Jede Seite l_x wird von*

$$(v - 1)(v + 1) = v^2 - 1$$

der übrigen Seiten, l_y geschnitten. Von diesen Seiten liegen $v + 1$ mal je $v - 1$ je in einer Ebene E.

6) *Jede Gruppe erster Art und erster Gattung mit der Degeneration w besitzt*

$$w(w^3 - w^2 + 1)$$

Ebenen E und

$$(w + 1)(w^3 - w^2 + 1)$$

Seiten l.

7) *Durch jede Seite l gehen w Ebenen und in jeder Ebene liegen $w + 1$ Seiten l.*

Oder auch: zu jeder Seite l gehören w Ebenen E die durch die Seite l hindurchgehen, und zu jeder Ebene E gehören $w + 1$ Seiten l die in der Ebene E liegen.

8) *Durch jede Gerade, durch die zwei Ebenen E gehen, gehen dann w und die Gerade ist eine Seite l der Gruppe.*

9) *Jede Ebene E_x wird von*

$$(w + 1)(w - 1) = w^2 - 1$$

der übrigen Ebenen E_y in Seiten geschnitten. Von diesen Ebenen E_y gehen $w + 1$ mal je $w - 1$ durch je eine Seite der Ebene E_x.

10) *Jede Seite* l_x *wird von*

$$v(v-1)^2(v+1)$$

der übrigen Seiten l_y *nicht geschnitten.*

11) *Es giebt daher*

$$\frac{1}{2}v^2(v-1)^2(v^3-v^2+1)(v+1)\,mal$$

zwei sich nicht schneidende Seiten oder Dupel der Gruppe

12) *Die zwei Seiten eines Dupels werden immer von einer aber auch nur von einer der übrigen Seiten geschnitten. — Transversale des Dupels.*

13) *Die* v *Seiten* l_x *einer Ebene* E *werden immer von* $v^2(v-1)^2$ *der übrigen Seiten nicht geschnitten.*

14) *Jede Ebene* E_x *wird immer von* $v(v-1)(w-1)$ *der übrigen in Kanten geschnitten.*

15) *Es giebt daher*

$$\frac{1}{2}v(v^2-1)(2v-1)(v^3-v^2+1)$$

mal zwei Ebenen ε, *die sich in Kanten schneiden — Zweiflach.*

16) *Es giebt keine Kante der Gruppe, die durch mehr als eine Ecke geht.*

(17) *Es giebt*

$$\frac{1}{2}v^2(v^2-1)(v^3-v^2+1)$$

Kanten k_1, *die je durch eine Ecke hindurchgehen.*

18) *Es giebt*

$$\frac{1}{2}v(v-1)^2(v+1)(v^3-v^2+1)$$

Kanten k_0, *die durch keine Ecke hindurchgehen.*

19) *In jeder Ebene liegen* $v(v-1)^2$ *Kanten* k_0, *die durch keine Ecke hindurchgehen.*

10) *Jede Ebene* E_x *wird von*

$$w(w-1)^2(w+1)$$

der übrigen Ebenen E_y *in Kanten geschnitten.*

11) *Es giebt daher*

$$\frac{1}{2}w^2(w-1)^2(w+1)(w^3-w^2+1)$$
$$(w+1)\,mal$$

zwei sich in Kanten schneidende Ebenen oder Zweiflache der Gruppe

12) *Die zwei Ebenen eines Zweiflachs werden immer von einer aber auch nur von einer der übrigen Ebenen in Seiten geschnitten. — Transversalebene der Zweiflache.*

13) *Die* w *Ebenen einer Seite werden immer von* $w^2(w-1)^2$ *der übrigen Ebenen in Kanten geschnitten.*

14) *Jede Seite* l_x *wird immer von* $w(w-1)(2w-1)$ *der übrigen nicht geschnitten.*

15) *Es giebt daher*

$$\frac{1}{2}w(w^2-1)(2w-1)(w^3-w^2+1)$$

mal zwei Seiten l_x, *die sich nicht schneiden — Dupel.*

16) *Es giebt kein Dupel, von dessen Ebenen sich mehr als zwei in einer Seite schneiden.*

17) *Es giebt*

$$\frac{1}{2}w^2(w^2-1)(w^3-w^2+1)$$

Dupel, von deren Ebenen sich je zwei in einer Seite schneiden.

18) *Es giebt*

$$\frac{1}{2}w(w-1)^2(w+1)(w^3-w^2+1)$$

Dupel, von dessen Ebenen sich keine zwei in einer Seite schneiden.

19) *Jede Seite gehört zu* $w(w-1)^2$ *Dupel, von deren Ebenen sich keine zwei in einer Seite schneiden.*

20) *In jeder Ebene liegen $v^2(v-1)$ Kanten, die durch je eine Ecke hindurchgehen.*

21) *Durch jede Ecke gehen v^2 Kanten, von denen keine in der Ebene liegt, auf der die zwei Seiten der Ecke liegen. Es bilden die v^2 Kanten einer Ecke den Durchschnitt der Ebene, die durch die Seiten der Ecke gehen.*

22) *Die zwei Seiten eines Dupels werden von*

$$(v^2-1)\,(v^2-v-1)$$

der übrigen Seiten nicht geschnitten.

23) *Es giebt daher*

$$\frac{1}{6}v^2(v-1)\,(v^2-1)^2\,(v^3-v^2+1)$$

mal drei sich nicht schneidende Seiten oder Tripel der Gruppe.

24) *Von diesen Tripeln giebt es*

$$\frac{1}{6}v^2(v^2-1)\,(v-1)^3\,(v^3-v^2+1)$$

solche t, die eine der übrigen Seiten zur Transversalen haben.

25) *Und ferner giebt es*

$$\frac{1}{6}v^3(v-1)^2(v^2-1)(v^2-3)(v^3-v^2+1)$$

solche Tripel t_0, deren Seiten keine der übrigen Seiten zu gemeinsamen Transversalen haben.

26) *Die Tripel t_0 sind einander paarweise so zugeordnet, dass die Seite des einen Tripels je zwei Seiten des zugeordneten Tripels schneiden.*

20) *Jede Seite gehört zu $w^2(w-1)$ Dupeln, von deren Ebenen sich je zwei in einer Seite schneiden.*

21) *Zu jeder Seite l_x giebt es w^2 Dupel. In jedem dieser Dupel giebt es je zwei Ebenen, die sich in einer Seite schneiden.*

22) *Die zwei Ebenen eines Zweiflachs werden von*

$$(w^2-1)\,(w^2-w-1)$$

der übrigen Ebenen in Kanten geschnitten.

23) *Es giebt daher*

$$\frac{1}{6}w^2(w-1)(w^2-1)^2(w^3-w^2+1)$$

mal drei sich in Kanten schneidende Ebenen oder Dreiflache der Gruppe.

24) *Von diesen Dreiflachen giebt es*

$$\frac{1}{6}w^2(w^2-1)(w-1)^3\,(w^3-w^2+1)$$

solche T, die eine der übrigen Ebenen E zur Transversalebene haben.

25) *Und ferner giebt es wegen*

$$\frac{1}{6}w^3(w-1)^2(w^2-1)\,(w^2-3)(w^3-w^2+1)$$

solche Tripel T_0, deren Ebenen keine der übrigen Ebenen zur gemeinsamen Transversalebene haben.

26) *Die Dreiflach T_0 sind einander paarweise so zugeordnet, dass die Ebene des einen Dreiflaches je Transversalebene zu zwei Ebenen des zugeordneten Dreiflaches ist.*

Wir bezeichnen mit n und N sich nicht schneidende Seiten, oder sich in Kanten schneidende Ebenen einer Gruppe mit (n) und (N). Es lassen sich nun leicht solche (n) bilden, von denen wir jedoch hier nur noch die folgenden angeben wollen.

(27) *Die Seiten, die eine bestimmte Seite schneiden, lassen sich* $(v-1)^{(v+1)}$ *mal zu einer* $(v+1)$ *zusammenstellen. Solche* $(v+1)$ *besitzen daher eine gemeinsame Transversale. Es giebt*

$$v(v^3-v^2+1)(v-1)^{v+1}$$

solche $(v+1)$ *mit einer Transversalen.*

27) *Die Ebenen, die eine bestimmte Ebene in ihren Seiten schneiden, lassen sich* $(w-1)^{w+1}$ *mal zu je einem* $(w+1)$*-flach zusammenstellen. Solche* $(w+1)$*-flache besitzen daher eine gemeinsame Transversalebene. Es giebt*

$$w(2w^3-w^2+1)(w-1)^{w+1}$$

solcher $(w+1)$*-flache mit je einer Transversalebene.*

28) *Die Seiten einer* $(v+1)$ *mit einer Transversalen begegnen allen übrigen Seiten der Gruppe.*

28) *Die Ebenen eines* $(w+1)$*-flach mit einer Transversalebene wird in ihren Seiten von allen übrigen Ebenen dieser Gruppe geschnitten.*

29) *Eine* $(v+1)$ *mit einer Transversale giebt zu keiner* $(v+2)$ *Bildung Veranlassung.*

29) *Ein* $(w+1)$*-flach mit einer Transversalebene giebt zu keiner* $(w+2)$*-flachbildung Veranlassung.*

b. Eigenschaften der Gruppen erster Art und zweiter Gattung.

30) Jede Gruppe erster Art und zweiter Gattung mit der Degeneration v besitzt $v^2(2v^2-3v+2)$ Seiten l,

$$v(2v+1)(2v^2-3v+2)$$

Ebenen E.

31) *In jeder Ebene* E *liegen* v *Seiten* l, *und durch jede Seite* l *gehen* $2v+1$ *Ebenen* E.

32) *Oder auch: Zu jeder Ebene* E *gehören* v *Seiten* l, *die in der Ebene liegen, und zu jeder Seite* l *gehören* $2v+1$ *Ebenen* E, *die durch die Seite hindurchgehen.*

33) *In jeder Ebene, in der zwei Seiten liegen, liegen* v, *und die Ebene ist eine Ebene der Gruppe.*

34) *Jede Seite* l_n *wird von* $(v-1)(2v+1)$ *der übrigen geschnitten. Von diesen liegen* $2v+1$ *mal je* $v-1$ *in je einer Ebene* E *der Gruppe.*

30) Jede Gruppe erster Art und zweiter Gattung mit der Degeneration w besitzt $w^2(2w^2-3w+2)$ Ebenen ε und

$$w(w+1)(2w^2-3w+2)$$

Seiten l.

31) *Durch jede Seite* l *gehen* w *Ebenen und in jeder Ebene* E *liegen* $2w+1$ *Seiten.*

32) *Oder auch: Zu jeder Seite* l *gehören* w *Ebenen die durch die Seite hindurchgehen, und zu jeder Ebene* E *gehören* $2w+1$ *Seiten, die auf der Ebene liegen.*

33) *Jede Gerade durch die zwei Ebenen* E *gehen, ist eine Seite der Gruppe, und gehen dann* w *Ebenen hindurch.*

34) *Jede Ebene,* E *wird von* $(w-1)(2w+1)$ *der übrigen in Seiten geschnitten. Von diesen gehen durch jede der* $2w+1$ *Seiten der Ebene* E *je* $w-1$ *hindurch.*

35) *Jede Seite* l_x *wird von*

$$v(v-1)^2(2v+1)$$

der übrigen Seiten nicht geschnitten.

36) *Es giebt daher*

$$\frac{1}{2}v^3(v-1)^2(2v+1)(2v^2-3v+2)$$

mal je zwei sich nicht schneidende Seiten — Dupel.

37) *Die Seiten eines Dupels werden immer von den Seiten eines andern Dupels geschnitten.*

38) *Jeder Doppeldupel bildet ein unebenes Vierseit. Die vier Ebenen E derselben bilden ein Doppelzweiflach.*

39) *Die Seiten* l_x *einer Ebene werden von* $v(v-1)^2(2v-1)$ *der übrigen Seiten nicht geschnitten.*

40) *Jede Ebene wird von*

$$(v-1)(4v^3-v+1)$$

der übrigen Ebenen in Kanten geschnitten.

41) *Es giebt daher in der Gruppe*

$$\frac{1}{2}v(v-1)(2v+1)(2v^2-3v+2)(4v^3-v+1)$$

mal zwei Ebenen die sich je in einer Kante schneiden.

42) *Von diesen Ebenenpaaren giebt es*

$$v^2(v-1)(2v+1)(2v^2-3v+2)$$

solche, deren Kanten durch je v Ecken der Gruppe hindurchgehen.

43) *Ferner giebt es unter jenen Zweiflach*

$$\frac{1}{2}v(v-1)^2(4v^2-1)(2v^2-3v+2),$$

solche, deren Kanten keine Ecken verbinden.

35) *Jede Ebene* E_x *wird von*

$$w(w-1)^2(2w+1)$$

der übrigen Ebenen in Kanten geschnitten.

36) *Es giebt daher*

$$\frac{1}{2}w^3(w-1)^2(2w+1)(2w^2-3w+2)$$

mal je zwei sich in Kanten schneidende Ebenen — Zweiflach.

37) *Die Ebenen eines Zweiflaches werden immer von den Ebenen eines anderen Zweiflaches in Seiten geschnitten.*

38) *Jedes Doppelzweiflach bildet ein unebenes Vierseit. Die 4 Seiten desselben bilden ein Doppeldupel.*

39) *Die Ebenen* E_x *einer Seite l werden von* $w(w-1)^2(2w-1)$ *der übrigen in Kanten geschnitten.*

40) *Jede Seite wird von*

$$(w-1)(4w^3-w+1)$$

der übrigen Seiten nicht geschnitten.

41) *Es giebt daher in der Gruppe*

$$\frac{1}{2}w(w-1)(2w+1)(2w^2-3w+2)(4w^3-w+1)$$

mal zwei Seiten, die sich nicht schneiden.

42) *Von diesen Dupeln giebt es*

$$w^2(w-1)(2w+1)(2w^2-3w+2)$$

solche, deren Ebenen sich zu zweien in einer Seite schneiden.

43) *Ferner giebt es unter jenen Dupeln*

$$\frac{1}{2}w(w-1)^2(4w^2-1)(2w^2-3w+2),$$

solche, deren Ebenen sich nicht in Seiten schneiden.

44) *Endlich giebt es unter jenen Zweiflachen*

$$v^2(v-1)(4v^2-1)(2v^2-3v+2)$$

solche, deren Kanten je durch eine Ecke gehen.

45) *Die zwei Seiten eines Dupels werden von*

$$t = 2v^4 - 3v^3 - 2v^2 + 2v + 2$$

der übrigen Seiten nicht geschnitten.

46) *Es giebt daher*

$$t_3 = \frac{1}{6}v^3(v-1)^2(2v+1)(2v^2-3v+2)t$$

mal drei sich nicht schneidende Seiten oder Tripel.

47) *Von diesen t_3 Tripeln giebt es*

$$t_a = \frac{1}{3}\cdot v^3(4v^2-1)(v-1)^3(2v^2-3v+2)$$

solche, die eine der übrigen Seiten zur Transversale haben.

48) *Von den t_3 Tripeln giebt es*

$$t_b = \frac{1}{6}v^3(v-1)^2(2v+1)(2v^2-3v+2)\begin{pmatrix}6v^4-9v^3\\ -10^2+12v+3\end{pmatrix}$$

solche, die keine der übrigen Seiten zur gemeinsamen Transversale haben.

49) *Zu jedem Tripel mit einer Transversalen ist ein zweites mit einer Transversalen in der Weise zugeordnet, dass jede Seite des einen Tripels je zwei Seiten des andern schneidet, während die Transversale des einen Tripels weder die Transversale, noch eine Seite des anderen Tripels schneidet.*

44) *Endlich giebt es unter jenen Dupeln*

$$w^2(w-1)(4w^2-1)(2w^2-3w+2)$$

solche, von deren Ebenen sich einmal zwei in einer Seite schneiden.

45) *Die zwei Ebenen eines Zweiflachs werden von*

$$T = 2w^4 - 3w^3 - 2w^2 + 2w + 2$$

der übrigen Ebenen in Kanten geschnitten.

46) *Es giebt daher*

$$T_3 = \frac{1}{6}w^3(w-1)^2(2w+1)(2w^2-3w+2)T$$

mal drei sich in Kanten schneidende Ebenen oder Dreiflache.

47) *Von diesen T_3 Dreiflachen giebt es*

$$T_a = \frac{1}{3}w^3(4w^2-1)(w-1)^3(2w^2-3w+2)$$

solche, die je eine der übrigen Ebenen zur Transversalebene haben.

48) *Von den T_3 Dreiflachen giebt es*

$$T_b = \frac{1}{6}w^3(w-1)^2(2w+1)(2w^2-3w+2)\begin{pmatrix}6w^4+9w^3\\ -10w^2+12w+4\end{pmatrix}$$

solche, die keine gemeinsame Transversalebene besitzen.

49) *Zu jedem Dreiflach mit einer Transversalebene ist ein zweites Tripel mit einer Transversalebene in der Weise zugeordnet, dass jede Ebene des einen Dreiflaches je zwei Ebenen des andern in Seiten schneidet, während die Transversalebene des einen Dreiflaches weder die Transversalebene noch eine Ebene des andern Dreiflaches in Seiten schneidet.*

50) *Ein Doppeltripel mit seinen zwei Transversalen bildet ein Doppelvier.*

51) *In einem solchen Doppelvier schneidet jede Seite des einen Vier je drei Seiten des andern Vier.*

52) *Jedes Doppelvier giebt zu 8 einfachen Tripeln und 4 Doppeltripeln Veranlassung.*

53) *Es giebt somit*

$$\frac{1}{24}(2v^2-3v+2)(v-1)^3(4v^2-1)v^3$$

Doppelvier

etc. . . . .

. . . .

54) *Die Zweiflache, deren Kanten durch keine Ecken hindurchgehen, lassen sich immer zwei so zusammenstellen, dass ihre v Seiten sich nicht schneiden, d. h. dass die vier Ebenen der zwei Zweiflache zu zweien sich in Kanten schneiden, die durch keine Ecke hindurchgehen.*

55) *Ein solches Vierflach repräsentirt 6 Zweiflache und es giebt daher*

$$\frac{1}{12}v(v-1)^2(4v^2-1)(2v^2-3v+2)$$

Vierflach mit je sechs Kanten die durch keine Ecke der Gruppe gehen.

etc. . . . .

50) *Ein Doppeldreiflach mit seinen zwei Transversalebenen bildet ein Doppelvierflach.*

51) *In einem solchen Doppelvierflach schneidet jede Ebene des einen Vierflaches drei Ebenen des andern in Seiten.*

52) *Jedes Doppelvierflach giebt zu 8 einfachen Dreiflachen und zu 4 Doppeldreiflachen Veranlassung.*

53) *Es giebt somit*

$$\frac{1}{24}(2w^2-3w+2)(w-1)^3(4w^2-1)w^3$$

Doppelvierflache

etc. . . . . ,

. . . .

54) *Von den Dupeln deren Ebenen sich nur in Kanten schneiden, lassen sich immer zwei so zusammenstellen, dass ihre w Ebenen sich nur in Kanten schneiden, d. h., dass die vier Seiten der zwei Dupel zu zwei genommen 6 Dupel bilden, deren Ebenen sich nur in Kanten schneiden.*

55) *Ein solches Vierflach repräsentirt 6 Dupel und es giebt daher*

$$\frac{1}{12}w(w-1)^2(4w^2-1)(2w^2-3w+2)$$

Vierflachs, deren Ebenen sich nur zu zwei in einer Seite schneiden.

etc. . . . .

Es werden sich leicht ohne Zuhülfenahme weiterer Hülfsmittel noch andere Gruppirungen der Seiten und Ebenen dieser Gruppenarten und Gattungen angeben lassen. Es ist die Auffindung dieser Eigenschaften jedoch nicht der eigentliche Zweck dieser Mittheilung, und da ferner die Bedeutung dieser Eigenschaften später in Verbindung mit noch anderen Eigenschaften besser hervortritt, so werden wir in einem ganzen Zusammenhange darauf zurückkommen, und für den Moment die Untersuchung abbrechen.

10.

Die Gruppen erster Art mit $b_v = w_v$.

Setzt man in den Gleichungen (10—12) den Werth von $b_v = w_v$, dann wird a_v gleich 0, d. h. die Restcurve C_{n-v} einer Ebene E wird von keiner der Seiten der Gruppe geschnitten, die nicht in der Ebene E, der C_{n-v} selbst liegen. In diesem Falle gehen die Hauptgleichungen (9) in folgende über:

$$(41) \qquad z_v = v\alpha, \quad Z_v = w_v \alpha, \quad \alpha = (v-1)(w_v - 1) + 1.$$

Alle die Resultate, die sich im Abschnitt: „*D Reduction der Gruppen* $G^I_{nuD_n}$ in der ersten Mittheilung (Math. Ann. Bd. XXVII, S. 284) ergeben haben, sind auch hier ohne weiteres gültig, jedoch mit der Erweiterung, dass v nicht mit der Ordnung n der Fläche übereinstimmen muss, und diese Gruppengleichungen hier in allen den Fällen, wo v kleiner als n ist, zu Gruppen nicht vollständiger Degeneration führen.

Es sind also auch hier die beiden Fälle auseinander zu halten, der hyperboloidischen und der nichthyperboloidischen Gruppirung.

a) Bei der hyperboloidischen Gruppirung muss $v = w_v$ sein, und dann ist

$$(42) \qquad Z_v = z_v = \alpha v = v((v-1)^2 + 1).$$

Diese Gruppen entsprechen sich selbst dualistisch.

b) Bei der nichthyperboloidischen Gruppirung sind auch hier die 3 Möglichkeiten w_v grösser, gleich und kleiner als v besonders zu behandeln. Durch eine Betrachtung in allen Theilen übereinstimmend mit der entsprechenden der ersten Mittheilung erhalten wir: (Siehe die Gleichungen (17 und 18) der ersten Mittheilung).

1) w_v grösser als v.

Lösungen resp. Gruppen für die Werthe:

$$(43) \qquad \begin{cases} k_1 = k_2 = 0, & k_3 = 3s + 2, \quad v = 3(s+1), \\ w_v = 6s + 5, & x_3 = x_2 = 0, \quad x_3 = 2s + 1. \end{cases}$$

wobei s alle ganzen positiven Zahlwerthe von Null an, annehmen kann. Die zugehörenden Gruppengleichungen sind

$$(44) \qquad \begin{cases} z_v = 3(s+1)(1 + 2(3s+2)^2), \\ Z_v = (6s+5)(1 + 2(3s+2)^2), \\ \alpha = 1 + 2(3s+2)^2. \end{cases}$$

Giebt man s die Werthe von 0 bis 9, so stellt die nachstehende Tabelle die zugehörenden Gruppenwerthe dar.

s	v	w_v	α	z_v	Z_v	k_3	x_3
0	3	5	9	27	45	2	1
1	6	11	51	306	561	5	3
2	9	17	129	1161	2193	8	5
3	12	23	243	2916	5589	11	7
4	15	29	393	5895	11797	14	9
5	18	35	579	10422	20265	17	11
6	21	41	801	16821	32841	20	13
7	24	47	1059	25416	50773	23	15
8	27	53	1353	36531	72309	26	17
9	30	59	1683	50490	99297	29	19

Von diesen Gruppen kann nur die erste als Gruppe der Flächen 3^{ter} Ordnung mit vollständiger Degeneration auftreten, während die übrigen zu ihrer Existenz auf Flächen eine Ordnungszahl dieser verlangen, die immer grösser als v sein muss.

Zu diesen Gruppen, die wir als Gruppen vom *Typ 3* bezeichnen, gehören, da v kleiner als w_v, immer dualistisch entsprechende Gruppen.

2. w_v gleich v.

In diesem Falle muss (siehe Gleichungen 17 und 18 der ersten Mittheilung) immer

$$(44)\qquad \begin{cases} k_1 = k_3, \quad v - 1 = 2k_3 + k_2, \quad \varkappa_1 = k_1, \\ \varkappa_2 = \frac{v-2}{v-1} \cdot \frac{k_2}{2}, \quad \varkappa_3 = \frac{v-3}{v-1} \cdot \frac{k_1}{2} \end{cases}$$

sein. Diesen Gleichungen genügen folgende zwei Werthsysteme:

1. Werthsystem:

$$(45)\qquad \begin{cases} k_3 = k_1 = 0, \qquad k_2 = v - 1, \\ \varkappa_3 = \varkappa_1 = 0, \qquad \varkappa_2 = \frac{v-2}{2}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen verlangen, dass die Form von v gegeben ist durch

$$(46)\qquad v = 2(s+2),$$

wobei s alle ganzen positiven Werthe von 0 an annehmen kann.

Die hierzu gehörenden Gruppengleichungen sind:

$$(47)\qquad \begin{cases} v \;= 2(s+2), \quad \varkappa_2 = s+1, \\ k_2 = 2s+3\,.\, \alpha = 2 + (2s+3)2, \\ z_v = Z_v = 2(s+2)\left(1+(2s+3)^2\right). \end{cases}$$

Giebt man s die Werthe von 0 bis 8, so sind die entsprechenden Gruppenwerthe in nachstehender Tabelle zusammengestellt,

	v	α	z_v	k_2	$\varkappa_2$
0	4	10	40	3	1
1	6	26	156	5	2
2	8	50	400	7	3
3	10	82	820	9	4
4	12	122	1464	11	5
5	14	170	2380	13	6
6	16	226	3616	15	7
7	18	290	5220	17	8
8	20	362	7240	19	9

Diese Gruppen entsprechen sich selbst dualistisch.

2. Werthsystem.

$$(48)\qquad \begin{cases} k_3 = k_1 = \dfrac{v-1}{2}, \quad k_2 = \varkappa_2 = 0, \\ \varkappa_1 = \dfrac{v-1}{2}, \quad \varkappa_3 = \dfrac{v-3}{3}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen verlangen, dass

$$(49)\qquad v = 3(2s+1)$$

ist, wobei s alle ganzen positiven Zahlenwerthe von 0 an annehmen kann.

Die hierzu gehörenden Gruppengleichungen sind

$$(50)\qquad \begin{cases} k_3 = k_1 = \varkappa_1 = 3s+1, \quad \varkappa_3 = s, \\ \alpha = 1 + 4(3s+1)^2, \quad v = 3(2s+1), \\ z_v = Z_v = 3(2s+1)(1+4(3s+1)^2). \end{cases}$$

Giebt man s die Werthe von 1 bis 7, so erhält man nachstehende in der Tabelle zusammengestellte Gruppenwerthe:

s	v	α	z_v	k_3	$\varkappa_3$
1	9	65	585	4	1
2	15	197	2955	7	2
3	21	401	8421	10	3
4	27	677	18279	13	4
5	33	1025	33825	16	5
6	39	1445	56355	19	6
7	45	1937	87165	22	7

Diese Gruppen entsprechen sich selbst dualistisch.

3. w_v kleiner als v.

Hier hat man nur Gruppenbildung für jeden Werth von v für $w_v = 2$ oder $= 3$. In Bezug auf diese Gruppen verweisen wir auf die entsprechende Betrachtung der ersten Mittheilung (Math. Ann. Bd. 27, Seite 289).

Anmerkung. All die Eigenschaften, die wir für die Gruppen $(u = n)$ der ersten Mittheilung abgeleitet haben, lassen sich ohne Weiteres auf die Gruppen $w_v = v$ (v kleiner als n) ohne principielle Aenderungen übertragen, und alle jene Sätze behalten daher hier ihre volle Gültigkeit. Ebenso lassen sich leicht die bekannten Eigenschaften der Gruppirung der Geraden einer Fläche 3ter Ordnung auf sämmtliche Gruppen des Typus 3 sofort übertragen, ohne dass man die Ordnung der Fläche, auf denen diese Gruppen für v grösser als 3 liegen, genau kennt.

11.

Uebersicht über die sämmtlichen homogenen Grundgruppen der ersten Art.

Durch die bisherigen Untersuchungen sind alle die homogenen Grundgruppen erster Art aufgefunden worden, in denen die auf Flächen höherer Ordnung nur in endlicher Zahl auftretenden Geraden sich zu räumlichen geometrischen Geraden- und Ebenengebilden je als Ganzes zusammenordnen.

Diese Grundgruppen zerfallen in zwei grosse *Gruppenfamilien* in der Weise, dass jeder Gruppe der einen Familie (f_1) je eine Gruppe der andern Familie (f_2) reciprok entspricht. Unter diesem reciproken Entsprechen ist *immer* verstanden, dass *jeder Geraden* der einen Gruppe je *eine Gerade* der andern, und *jeder Ebene* der einen Gruppe *ein Punkt* der andern Gruppe entspricht.

In diesen beiden Gruppenfamilien sondern sich die Gruppen selbst wieder in zwei *Gruppengeschlechter* ab. Die Gruppen des einen Ge-

schlechtes (g_1), die sich selbst dualistisch entsprechen, während die Gruppen des andern Geschlechtes (g_2) sich zu zwei undzwei dualistisch entsprechen. Es sondern sich somit die Gruppen des Geschlechtes (g_2) selbst wieder in zwei Species (s_1 und s_2). Unter dualistischem Entsprechen zweier Gruppen verstehen wir *immer* eine solche Verwandtschaft zwischen den Gruppen, in der jeder Geraden der einen Gruppe je eine Ebene der anderen und umgekehrt, entspricht.

1. Die Gruppen des ersten Gruppengeschlechtes g_1.

Hierzu gehören:

I. Die Gruppen, in denen die Zahlen der Ebenen gleich ist der Zahl der Geraden

$$v = w = b_v, \quad z_v = Z_v = v((v-1)^2 + 1).$$

Diese Gruppen zerfallen in zwei Gattungen:

I_a. Die hyperboloidischen Gruppen, und

I_b die nichthyperboloidischen Gruppen.

Für Flächen von 4^{ter}—10^{ter} Ordnung können diese Gruppen als Gruppen mit vollständiger Degeneration auftreten, während dies für Flächen noch höherer Ordnung nie mehr der Fall sein kann.

2. Die Gruppen des zweiten Gruppengeschlechtes g_2 und Species s_1.

Zu diesen Gruppen gehören:

II. Die einzelne Ebene mit einer beliebigen Anzahl ($v = 2$ oder grösser) in ihr liegenden Geraden.

III. Die Gruppen, in denen $w = 2$, in welchen durch jede Gerade der Gruppe immer zwei Ebenen gehen, und in jeder Ebene beliebig viele ($v=2$ oder grösser) Geraden liegen. Diese Gruppen bilden, entweder:

III_a den Durchschnitt irgend zweier Polyeder von derselben Ebenenzahl, oder aber

III_b die Kanten eines Polyeders (Pentaeder).

IV. Die Gruppen von Typ. 3, in welchen v und w durch die Beziehung bestimmt sind, dass

$$v = 3(s+1), \quad w = 6s + 5 = b_v, \quad s = \text{beliebig und positiv}$$

sein müssen. Für die Fläche dritter Ordnung ist diese Gruppe eine mit vollständiger Degeneration, für Flächen höherer Ordnung nicht mehr.

V. Die Gruppen erster Gattung ($b_v = 1$) sind immer unvollständiger Degeneration. Hier ist $v = 2$ oder grösser, und $w = v + 1$.

VI. Die Gruppen zweiter Gattung ($b_v = 2$) sind ebenfalls immer mit nicht vollständiger Degeneration. Hier ist

$$v = 2 \text{ oder grösser, } w = 2v + 1.$$

Aus dieser Uebersicht ergiebt sich, dass die Gruppentypen sich wesentlich auf 6 reduciren, bei zweien jedoch mit zwei Abarten. Soweit die Untersuchungen bis heute fortgeschritten sind, so gelingt es immer, die auf Flächen höherer Ordnung in endlicher Zahl auftretenden Geraden in diese verschiedenen Gruppentypen abzusondern. Es ist uns jedoch bis heute noch nicht gelungen, einen vollständigen Beweis dafür zu erbringen, dass dem überhaupt immer so sein müsse. Wir zweifeln jedoch nicht daran, dass sich die Sache immer so verhält, und hoffen auch den Beweis hierfür noch geben zu können. In diesem Falle wird es nun leicht sein, mit Hülfe der einfachen Gesetze der Ein- und Anschiebungen von Gruppen auf derselben Fläche, die wir in nächster Abhandlung darstellen werden, all die Flächen aufzufinden, auf denen gerade Linien in endlicher Anzahl liegen.

Zürich, 1. October 1886.

Ueber die Transitivitätsgrenze der Substitutionengruppen, welche die alternirende ihres Grades nicht enthalten.

Von

Alfred Bochert in Breslau.

Die wichtige Frage nach der Grenze der Transitivität einer Substitutionengruppe von n Buchstaben, die weniger als die Hälfte aller in diesen Buchstaben möglichen Substitutionen enthält und also weniger als $n-2$ fach transitiv ist, (d. h. nach der grössten Zahl von Buchstaben, die sich mittels der Substitutionen einer solchen Gruppe gleichzeitig durch ebenso viele beliebig unter den Buchstaben dieser Gruppe gewählte ersetzen lassen) hat zwar Herrn C. Jordan zu mehreren schönen Sätzen*) geführt, vermöge deren man zu allen in bestimmten Zahlen gegebenen Werthen des Gruppengrades n, soweit absehbar, sehr niedrige Werthe der fraglichen Grenze erhält; viel niedrigere wenigstens, ausser für die kleinsten Gruppengrade, als vermöge früher von ihm gefundener Beziehungen**), welche die Transitivitätsgrenze nicht so wie diese Sätze von der besonderen zahlenmässigen Beschaffenheit von n abhängig machen, sondern mehr durch regelmässig wachsende Functionen dieser Zahl bestimmen. Auch giebt Herr Jordan den neueren Grenzen ihrer ganzen Art nach entschieden den Vorzug.

Aber zugleich weist er doch selbst auf die Ungewissheit hin, in der man sich bei dem Wenigen, was von dem Gesetze der Primzahlenfolge bis jetzt bekannt ist, über das Mass von Genauigkeit befindet, das diesen Grenzen allgemein genommen zukommt, auch nur im Vergleiche zu jenen früheren; und solange dieser Mangel besteht, bleibt wohl jeder Fortschritt in der durch letztere bezeichneten Richtung, d. h. in der Bestimmung der Transitivitätsgrenze durch regelmässig wachsende Functionen des Gruppengrades, von Werth; um so mehr, wenn sich diese Functionen so gestalten, dass die Wahrscheinlichkeit

*) Bulletin de la Société Mathématique de France, I, 1873.

**) Jordan, Traité des Substitutions, l. II, c. I, § 8. 1870.

nicht von vornherein ausgeschlossen ist, in einzelnen Fällen auch wirklich genauere Grenzen aus ihnen zu erhalten, als selbst aus jenen Jordan'schen Sätzen.

Einen solchen Fortschritt glaube ich nun im Folgenden auf einem neuen Wege mit verhältnissmässig einfachen Mitteln erreicht zu haben, und zwar auf Grund von Beziehungen zwischen dem Transitivitätsgrade und der kleinstmöglichen Buchstabenzahl einer von der identischen verschiedenen Substitution der Gruppe, aus denen sich schon für diese Zahl, was mir auch an sich nicht ohne Bedeutung scheint, von jenem Grade abhängige untere Grenzen von ähnlicher Höhe ergeben, wie für die ganze Buchstabenzahl der Gruppe.

Ich erhalte unter Anderem folgende Sätze:

1. *Hat man irgend z Potenzen positiven ganzen Grades verschiedener Primzahlen, und ist t nicht kleiner als die Summe dieser Potenzen, so kann eine Gruppe von n Buchstaben, welche die alternirende nicht enthält, und von deren Substitutionen ausser der identischen keine weniger als u Buchstaben versetzt, nicht t-fach transitiv sein, wenn es nicht eine positive ganze Zahl k giebt der Art, dass $n - t$ weder kleiner ist als das Product der kleinsten k von jenen Primzahlpotenzen, noch als $\frac{zu - t}{k}$.*

[2. (Folgerung aus 1. für den besonderen Fall $u > n - t$).
Sollen ausser der identischen alle Substitutionen einer t-fach transitiven Gruppe n-ten Grades, welche die alternirende nicht enthält, mehr als $n - t$ Buchstaben versetzen, so darf $n - t$ nicht kleiner sein als irgend ein Product solcher Potenzen verschiedener Primzahlen und positiven ganzen Grades, deren Summe t nicht übersteigt.]

3. *Hat man irgend z Potenzen positiven ganzen Grades verschiedener Primzahlen, und ist $\frac{1}{2}t$ nicht kleiner als die Summe dieser Potenzen, so ist wenigstens das kleinste Product von mehr als $\frac{3}{5}z$ derselben kleiner als die Buchstabenzahl jeder t-fach transitiven Gruppe, welche die alternirende nicht enthält; ja dieses Product ist, ausser etwa in einigen wenigen der Fälle, in denen $z = 2$ ist, schon kleiner als die kleinste Buchstabenzahl, auf die sich eine von der identischen verschiedene Substitution einer solchen Gruppe beschränken kann.*

Und als Folgerungen daraus Beziehungen der (näherungsweisen) Form:

$$t < q\,\frac{(\log(q_1 u))^2}{\log(q_0 \log(q_1 u))} \quad \text{und} \quad < q\,\frac{(\log(q_2 n))^2}{\log(q_0 \log(q_2 n))},$$

wie auch:

$$q' t \log(q_0' t) < (\log(q_1 u))^2 \quad \text{und} \quad < (\log(q_2 n))^2,$$

in denen man unter q, q', q_0, q_0', q_1, q_2 gewisse positive Constanten, unter log den nach einer 1 übersteigenden Grundzahl genommenen Logarithmus zu verstehen hat, und die für jede beliebige die alternirende nicht enthaltende Gruppe gelten, wenn wieder n die Buchstabenzahl derselben, t den Transitivitätsgrad und u die kleinstmögliche Buchstabenzahl einer von der identischen verschiedenen Substitution der Gruppe bedeutet.

Von den einzelnen Abschnitten der Arbeit ist der erste dazu bestimmt, die allgemeinen Grundlagen des eingeschlagenen Verfahrens zu geben; der zweite enthält eine besonders naheliegende Folgerung daraus mit den unter 1. und 2. angeführten Sätzen; während die Herleitung der Hauptergebnisse Gegenstand der folgenden Theile ist.

Was die gebrauchten Bezeichnungen betrifft, so ist die Bemerkung vielleicht nicht überflüssig, dass unter Buchstabenzahl (Grad) einer Substitution wie einer Gruppe nur die Zahl aller wirklich von der Substitution, bezw. der Gruppe, versetzten verschiedenen Buchstaben verstanden ist; unter Normalform einer Substitution die bekannte nur alle solchen Buchstaben enthaltende Darstellung derselben als Zusammensetzung von Cyklen ohne gemeinsame Buchstaben.

I.

Es sei p^h irgend eine Primzahlpotenz positiven ganzen Grades und S eine Substitution, deren Ordnung, R, durch p^h theilbar ist, was ja dann und nur dann der Fall ist, wenn auch wenigstens ein Cyklus der Normalform von S eine durch p^h theilbare Ordnung besitzt. Dann hat, da eben R Vielfaches der Ordnungen aller einzelnen Cyklen der Normalform von S ist, $\frac{R}{p}$ wenigstens noch alle diejenigen dieser Ordnungen zu Theilern, in denen keine höhere Potenz von p als die $h-1^{\text{te}}$ aufgeht; so dass die $\frac{R}{p}$te Potenz von S höchstens noch Buchstaben aus solchen Cyklen der Normalform von S versetzen kann, deren Ordnungen durch p^h theilbar sind. Und folglich ist die Zahl aller in solchen Cyklen dieser Normalform enthaltenen Buchstaben keinesfalls kleiner als die Zahl aller von der fraglichen Potenz versetzten. Diese Potenz ist aber eine von der identischen verschiedene Substitution, da ja ihr Exponent, $\frac{R}{p}$, nicht Vielfaches der Ordnung R von S ist, und gehört wie jede Wiederholung von S zu allen Gruppen, die S selbst enthalten. Sie muss mithin ihrerseits mindestens soviele Buchstaben versetzen, als eben in irgend einer solchen Gruppe die kleinstmögliche Buchstabenzahl einer von der identischen verschiedenen

Substitution beträgt. Und so hat man bei der Gleichheit von Ordnung und Buchstabenzahl jeder cyklischen Substitution den übrigens fast unmittelbar einleuchtenden Satz:

I. *Finden sich für eine Primzahlpotenz positiven ganzen Grades in der Normalform einer Substitution einer Gruppe überhaupt Cyklen, deren Buchstabenzahl (Ordnung) durch diese Potenz theilbar ist, oder, was ja Dasselbe sagt, ist die Ordnung der ganzen Substitution dadurch theilbar, so ist die Gesammtzahl der durch solche Cyklen der Normalform versetzten Buchstaben nicht kleiner als die kleinstmögliche Buchstabenzahl einer von der identischen verschiedenen Substitution der Gruppe, und also*, da ja diese Gesammtzahl als Summe derjenigen Buchstabenzahlen von Cyklen der Normalform, welche die fragliche Primzahlpotenz zum Theiler haben, ebenfalls Vielfaches derselben sein muss, *auch nicht kleiner als das niedrigste nicht unter dieser kleinsten Buchstabenzahl liegende Vielfache der gegebenen Primzahlpotenz.*

Sind also für eine Substitution einer Gruppe irgend z Potenzen positiven ganzen Grades verschiedener Primzahlen als Theiler der Ordnung gegeben, so gilt in Bezug auf jede einzelne dieser z Potenzen der eben ausgesprochene Satz, nach welchem von den durch die Substitution versetzten Buchstaben nicht weniger als eine gewisse durch diesen Satz bestimmte Zahl in solchen Cyklen der Normalform der Substitution auftreten, deren Buchstabenzahlen durch die fragliche Primzahlpotenz theilbar sind.

Damit liegt aber augenscheinlich ein besonderer Fall des allgemeineren vor, dass von s Dingen nicht weniger als r_1 einer gewissen ersten von z Bedingungen genügen sollen, nicht weniger als r_2 einer gewissen zweiten, u. s. w., überhaupt nicht weniger als $r_\varkappa$ einer gewissen $\varkappa^{\text{ten}}$ der z Bedingungen, unter $\varkappa$ nacheinander jede der Zahlen 1 bis z verstanden.

Nun ist in der Summe der z Zahlen, welche angeben, wie viele der s Dinge jede einzelne der z Bedingungen erfüllen, welche Summe nach den eben gemachten Voraussetzungen nicht kleiner als diejenige der z Zahlen r, Σr, ist, jedes der s Dinge gerade sovielmal gezählt, als die Zahl derjenigen unter den z Bedingungen beträgt, denen es gleichzeitig genügt. Diese Summe stimmt also überein mit derjenigen der letzteren s Zahlen, d. h. der Zahlen, welche angeben, wie viele der z Bedingungen durch jedes einzelne der s Dinge erfüllt werden. Und da folglich auch diese neue Summe, die ja der ersten auch deswegen gleich ist, weil jede von beiden die Anzahl aller überhaupt stattfindenden Fälle von Erfüllung einer der z Bedingungen durch eines der s Dinge darstellt, nicht kleiner als Σr ist, so kann nicht jede der s Zahlen, aus denen sie besteht, kleiner als $\frac{\Sigma r}{s}$ sein, ja sogar

keine derselben, wenn nicht auch mindestens eine von ihnen grösser ist. Das heisst aber offenbar, nicht jedes der s Dinge erfüllt weniger als $\frac{\Sigma r}{s}$ der z Bedingungen, sondern entweder mindestens eines derselben mehr, oder jedes genau so viele.

(Dabei kann der letztere Fall nur unter besonderen Voraussetzungen, also nur ausnahmsweise, wirklich eintreten. Denn zu seiner Möglichkeit ist ja vor Allem erforderlich, dass $\frac{\Sigma r}{s}$ gerade einer nicht unter Null liegenden ganzen Zahl gleich ist, ausserdem aber auch, weil in dem fraglichen Falle $s \cdot \frac{\Sigma r}{s}$, d. h. Σr, genau die Zahl aller stattfindenden verschiedenen Fälle von Erfüllung einer der z Bedingungen durch eines der s Dinge darstellt, dass alle z Zahlen r mit den nach Voraussetzung nicht unter ihnen liegenden z Zahlen, welche angeben, wie viele von diesen Dingen jeder einzelnen der z Bedingungen genügen, wirklich einerlei werden können. Und dies ist ja dann und nur dann möglich, wenn auch jede der Zahlen r ganz und nicht negativ ist, was sonst offenbar nicht vorausgesetzt zu sein braucht.)

Man kann also den zwar sehr einfachen, aber für das Folgende grundlegenden Satz aussprechen:

II. *Sollen von s Dingen nicht weniger als r_1 einer gewissen ersten von z Bedingungen genügen, nicht weniger als r_2 einer gewissen zweiten, u. s. w., überhaupt nicht weniger als $r_\varkappa$ einer gewissen $\varkappa^{ten}$, unter $\varkappa$ nacheinander jede der z Zahlen* 1 *bis z verstanden* (während $r_1, r_2 \ldots r_z$ beliebige reelle Werthe haben dürfen, wenn wie gewöhnlich negative Zahlen als solche betrachtet werden, die kleiner als Null sind), *so kann nicht jedes der s Dinge weniger als $\frac{1}{s}\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=z} r_\varkappa$ der z Bedingungen erfüllen; ja sogar keines derselben, wenn nicht auch mindestens eines unter ihnen einer grössern Anzahl dieser Bedingungen genügt.*

Als unmittelbar ersichtliche Folgerung dieses Satzes ergiebt sich:

III. *Genügen von s durch eine Substitution versetzten Buchstaben nicht weniger als $r_\varkappa$ der Bedingung, dass die Buchstabenzahl (Ordnung) der sie enthaltenden Cyklen der Normalform dieser Substitution durch eine gewisse $\varkappa^{te}$ von z Zahlen theilbar ist, unter $\varkappa$ nacheinander jede der z Zahlen* 1 *bis z verstanden, so kann nicht jeder der s Buchstaben weniger als $\frac{1}{s}\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=z} r_\varkappa$ der so gegebenen z Bedingungen erfüllen, d. h.* da ja keiner zu mehr als einem Cyklus der Normalform gehört, *es kann nicht jeder durch einen solchen dieser Cyklen versetzt werden, dessen Buchstabenzahl durch weniger als $\frac{1}{s}\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=z} r_\varkappa$ der gegebenen z Zahlen*

theilbar ist. Vielmehr muss entweder jeder Cyklus der Normalform, der auch nur einen der s Buchstaben enthält, genau $\frac{1}{s}\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=z} r_\varkappa$ *dieser z Zahlen unter den Theilern seiner Buchstabenzahl haben, oder mindestens ein solcher Cyklus noch mehr.*

Und das giebt dann offenbar, mit I verbunden, für den vorliegenden Fall, in dem ja s zur Gesammtbuchstabenzahl der Substitution wird, während die z Theiler durch z Potenzen positiven ganzen Grades verschiedener Primzahlen dargestellt werden, und jede der z Zahlen r durch die kleinstmögliche Buchstabenzahl einer von der identischen verschiedenen Substitution einer Gruppe, der die gegebene Substitution angehören soll, oder genauer, durch das niedrigste nicht unter dieser Zahl liegende Vielfache der entsprechenden Primzahlpotenz:

IV. *Gehört eine Substitution von s Buchstaben zu einer Gruppe, unter deren Substitutionen ausser der identischen keine weniger als u Buchstaben versetzt, und ist die Ordnung dieser Substitution theilbar durch jede von z Potenzen positiven ganzen Grades verschiedener Primzahlen, so kann nicht jeder von den Cyklen ihrer Normalform weniger als* $\frac{zu}{s}$ *der z Primzahlpotenzen unter den Theilern seiner Buchstabenzahl haben, oder genauer noch, weniger als* $\frac{1}{s}\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=z} u_\varkappa$, *unter den z Zahlen* $u_1 \ldots u_z$ *die bezüglichen kleinsten nicht unter u liegenden Vielfachen derselben z Potenzen verstanden.*

Ja es kann Dies sogar bei keinem dieser Cyklen der Fall sein, wenn nicht auch mindestens einer von ihnen eine Buchstabenzahl besitzt, die durch mehr als $\frac{zu}{s}$, *oder genauer, als* $\frac{1}{s}\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=z} u_\varkappa$, *der z Primzahlpotenzen theilbar ist.*

Mehr als $\frac{zu}{s}$ *der letzteren hat überdies, wie aus dem ersten Theile des Satzes hervorgeht, mindestens ein Cyklus der Normalform der Substitution schon immer dann unter den Theilern seiner Buchstabenzahl, wenn u nicht der besonderen Bedingung genügt, selbst durch jede der z Primzahlpotenzen theilbar zu sein,* da ja nur unter dieser Bedingung $\frac{1}{s}\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=z} u_\varkappa$ nicht grösser als $\frac{zu}{s}$ ist.

Man erkennt schon jetzt gewisse nächstliegende Schlüsse, die sich aus diesem Satze ziehen lassen; ist ja doch, da die in ihm auftretenden z Primzahlpotenzen zu einander prim sein sollen, auch immer das Product aller derjenigen unter ihnen, durch welche die Buchstaben-

zahl eines Cyklus der fraglichen Normalform theilbar ist, Theiler dieser Zahl und also nicht grösser als dieselbe. Um so weniger ist demnach dieses Product grösser als s, die Buchstabenzahl der ganzen Normalform, oder gar als diejenige der Gruppe, der die letztere entnommen ist.

Von Bedeutung werden nun die eben erlangten Ergebnisse gerade für den hier verfolgten Zweck durch zwei Umstände:

Einerseits dadurch, dass unter den Substitutionen jeder transitiven Gruppe, selbst unter denjenigen derselben, welche noch gewissen besonderen Bedingungen genügen, eben in Folge der Transitivität für jede beliebige Versetzung einer vom Transitivitätsgrade und diesen Bedingungen abhängigen Anzahl von Buchstaben der Gruppe unter einander mindestens eine zu finden ist, welche diese Versetzung bewirkt und also die Normalform derselben in ihrer eigenen als Theil enthält. Denn da hiernach bei Bestimmung einer jener Substitutionen ein Theil der Normalform beliebig gegeben werden darf, so kann man insbesondere für jede von solchen z Potenzen positiven ganzen Grades verschiedener Primzahlen, deren Summe die grösstmögliche Buchstabenzahl dieses Theiles nicht übersteigt, mindestens einen Cyklus in die fragliche Normalform hineinbringen, dessen Buchstabenzahl durch die Potenz theilbar ist, und also auch die Ordnung der ganzen Substitution dadurch theilbar machen; indem man nämlich einfach jenen verfügbaren Theil aus z Cyklen bestehen lässt, welche die gegebenen z Primzahlpotenzen selbst zu Buchstabenzahlen haben.

Der zweite Umstand ist der, dass die kleinstmögliche Buchstabenzahl einer von der identischen verschiedenen Substitution in keiner Gruppe, welche die alternirende ihres Grades nicht enthält, unter eine gewisse vom Transitivitätsgrade abhängige Grenze sinken kann. Es ist bekanntlich wenigstens so viel nachgewiesen, dass, wenn wieder u jene kleinstmögliche Buchstabenzahl, t den Transitivitätsgrad bezeichnet, in jeder solchen Gruppe u sowohl über t selbst liegt*), als über $2t-4$**).

Richtig ist auch, dass sich die aus der letzteren Zahl für u folgende untere Grenze $2t-3$ auf $2t-2$ erhöhen lässt, wie es Herr Netto thut***). Der Beweis jedoch, den er dafür giebt, scheint mir nicht ausreichend; und da ich einer Berichtigung desselben bisher nicht begegnet bin, so will ich eine solche an dieser Stelle versuchen, obgleich sich weiterhin zeigen wird, dass schon die vorher erwähnten von

---

*) E. Mathieu, Journ. d. math. V, série 2; siehe auch unter **).

**) Jordan, Traité des Substitutions, l. II, c. I, § 6.

***) E. Netto, Substitutionentheorie, Cap. IV, Ls. VI.

Mathieu und Jordan gefundenen Grenzen genügen, um ausgehend davon bei höheren Transitivitätsgraden zu neuen, wesentlich höheren unteren Grenzen für u zu gelangen.

Der fragliche Beweis ist nach Vorausschickung des Mathieu'schen Satzes $u > t$ so geführt, dass man sich eine Substitution U der kleinsten Buchstabenzahl u aus der vorgelegten t-fach transitiven die alternirende nicht enthaltenden Gruppe durch eine solche, in Folge der t-fachen Transitivität stets vorhandene, Substitution S derselben Gruppe transformirt denkt, welche in einer Darstellung der Normalform von U die ersten $t-1$ Buchstaben, x_1 bis x_{t-1}, unversetzt lässt, den t^{ten} dagegen, x_t, durch einen andern, x_{t+x}, der nämlichen Normalform ersetzt, der ja nach jenem Satze noch verfügbar sein muss. Dadurch ergiebt sich eine U ähnliche Substitution, $S^{-1}US$, die mindestens t der Buchstaben von U, nämlich $x_1 \ldots x_{t-1}, x_{t+x}$, ebenfalls versetzt und offenbar nicht weniger als $t-2$ davon, x_1 bis x_{t-2}, auf dieselbe Weise. Eine Zusammensetzung dieser neuen Substitution mit der Umkehrung von U, $U^{-1}.S^{-1}US$ oder $S^{-1}US.U^{-1}$, die ja ebenso wie U und S selbst zur Gruppe gehört, kann somit nicht mehr als $u+u-t-(t-2) = 2u-2t+2$ Buchstaben versetzen, da sich darin die Versetzungen von mindestens $t-2$ aufheben, nämlich eben die von x_1 bis x_{t-2}. Und daraus wird dann $2u-2t+2 \geqq u$, also $u \geqq 2t-2$ gefolgert, auf Grund der Voraussetzung, dass u die kleinstmögliche Buchstabenzahl einer von der identischen verschiedenen Substitution der Gruppe ist.

Diese Folgerung ist nun insofern nicht berechtigt, als die Möglichkeit des Zusammenfallens der fraglichen Zusammensetzung mit der identischen Substitution, oder, was ja auf dasselbe hinauskommt, der Transformirten $S^{-1}US$ von U mit U selbst, noch nicht ausgeschlossen ist, und zwar wegen eines Mangels an Allgemeinheit in der für die Normalform von U gegebenen Darstellung, der anscheinend durch die Beschaffenheit der entsprechenden Form in dem vorausgeschickten Beweise des Satzes $u > t$ veranlasst ist. In dieser Darstellung sind nämlich $t-1^{\text{ter}}$ und t^{ter} Buchstabe, x_{t-1} und x_t, ohne Weiteres demselben Cyklus zugewiesen, so dass x_t zugleich derjenige Buchstabe wird, den U an die Stelle von x_{t-1} treten lässt; eine besondere Annahme, unter der allerdings die Substitution $S^{-1}US$ nothwendig von U verschieden ist, da sie ja dann den getroffenen Bestimmungen zufolge x_{t-1} nicht in denselben Buchstaben umwandelt wie U, sondern in den von x_t verschiedenen x_{t+x}. Es bleibt aber offenbar noch der Fall denkbar, dass in allen irgendwie geschriebenen Normalformen von Substitutionen kleinster Buchstabenzahl der Gruppe $t-1^{\text{ter}}$ und t^{ter} Buchstabe in verschiedene Cyklen fallen, der erstere also auf das Ende des einen, der letztere auf den Anfang des nächsten.

(Dieser Fall tritt ein, wenn die Ordnungen aller jener Substitutionen Theiler von $t-1$ sind; z. B. schon in der von Mathieu gefundenen 5-fach transitiven Gruppe von 12 Buchstaben, in der $u=8$, also gerade $=2t-2$ ist, und die fraglichen Ordnungen 2 und 4 betragen. Denn die Ordnung jeder Substitution kleinstmöglicher von Null verschiedener Buchstabenzahl in einer Gruppe muss ja zugleich die jedes Cyklus ihrer Normalform sein, d. h. jede solche Substitution muss regelmässig sein, da sonst unter ihren Potenzen, die ja als solche derselben Gruppe angehören, von der identischen verschiedene Substitutionen noch geringerer Buchstabenzahl vorkommen würden. In dem gedachten Falle könnte es nun geschehen, dass jede Substitution der Gruppe, die in irgend einer Normalform einer Substitution kleinster Buchstabenzahl derselben die ersten $t-1$ Buchstaben unversetzt lässt, den t^{ten}, x_t, dagegen in einen andern, $x_{t+\varkappa}$, der nämlichen Normalform umwandelt, diese letztere nur in sich selbst transformirt, indem sie einfach den ganzen Cyklus, dem $x_{t+\varkappa}$ entnommen ist, an die Stelle desjenigen bringt, der x_t und also keinen der vorhergehenden $t-1$ Buchstaben enthält, oder, wenn der Cyklus derselbe ist, seine Buchstabenfolge ohne sonstige Aenderung so verschiebt, dass $x_{t+\varkappa}$ auf den Platz des Anfangsbuchstabens x_t kommt. In der erwähnten 5-fachen transitiven Gruppe von 12 Buchstaben ist dem auch wirklich so. Denn es verschwinden ja in dem fraglichen Falle aus der Zusammensetzung von U^{-1} und $S^{-1}US$ die Versetzungen der ersten $t-1$ Buchstaben der Normalform von U, nicht nur die der ersten $t-2$, da die Cyklen, welche diese $t-1$ Buchstaben enthalten, von denselben dann gerade ausgefüllt werden und somit unverändert aus U in die Transformirte $S^{-1}US$ übergehen. Jene Zusammensetzung kann also dann keinesfalls mehr als $u+u-t-(t-1)=2u-2t+1$ Buchstaben versetzen; so dass, wenn sie von der identischen Substitution verschieden sein sollte, $2u-2t+1 \geqq u$ sein müsste, d. h. $u \geqq 2t-1$, nicht wie in jener Gruppe $=2t-2$).

Die Lücke, welche der Beweis hier lässt, ist indessen leicht auszufüllen, wenn man sich für diesen Fall die transformirende Substitution S so in der Gruppe gewählt denkt, dass sie zwar wieder die ersten $t-1$ Buchstaben, x_1 bis x_{t-1}, in der Darstellung der Normalform von U, die ja jetzt von der Art $(x_1 x_2 \ldots) \ldots (\ldots x_{t-2} x_{t-1})(x_t \ldots)$ sein soll, ungeändert lässt, für den t^{ten}, x_t, aber nicht einen andern Buchstaben derselben Normalform, sondern einen nicht darin vorkommenden, etwa x_{u+1} setzt, also

$$U=(x_1 x_2 \ldots) \ldots (\ldots x_{t-2}\, x_{t-1})(x_t \ldots)$$

in

$$S^{-1}US=(x_1 x_2 \ldots) \ldots (\ldots x_{t-2}\, x_{t-1})(x_{u+1} \ldots)$$

transformirt. Möglich ist ja bei der t-fachen Transitivität der Gruppe und der für u bestehenden oberen Grenze $n - t + 1$, unter n wieder den Gruppengrad verstanden, auch das immer, wenn t nicht < 2 ist; eine Einschränkung, die hier gar keinen Belang hat, da der Satz $u \geqq 2t - 2$ sogar für jeden der unter 3 liegenden Werthe von t selbstverständlich ist.

Bei diesem Verfahren, demselben, das Herr Jordan zur Herleitung der Beziehung $u > 2t - 4$ angewandt hat, ist jeder Möglichkeit vorgebeugt, dass U durch S nur in sich selbst transformirt werden könnte, indem eben dafür gesorgt ist, dass die Transformirte $S^{-1}US$ keinesfalls durchweg dieselben Buchstaben versetzt, wie U. Hierbei wird allerdings die Zahl derjenigen Buchstaben, die als beiden Substitutionen gemeinsame bekannt sind, gegen früher um 1 vermindert; dafür heben sich aber diesmal, wie schon bemerkt, in einer Zusammensetzung von U^{-1} mit $S^{-1}US$ nicht nur die Versetzungen der ersten $t - 2$ Buchstaben auf, sondern offenbar die der ersten $t - 1$. Und so ergiebt sich schliesslich auch für diesen Fall, dass eine solche Zusammensetzung nicht mehr als $2u - 2t + 2$ Buchstaben versetzen kann, nämlich nicht mehr als $u + u - (t-1) - (t-1)$; und dass folglich $2u - 2t + 2 \geqq u$, also $u \geqq 2t - 2$ sein muss, da ja diese Zusammensetzung nach dem Gesagten nothwendig eine von der identischen verschiedene Substitution ist, und zwar offenbar eine solche der Gruppe.

Hiernach gilt also in der That ganz allgemein der Satz, dass in keiner t-fach transitiven Gruppe, welche die alternirende nicht enthalten soll, die kleinstmögliche Buchstabenzahl u einer von der identischen verschiedenen Substitution kleiner als $2t - 2$ sein kann; eine untere Grenze von u, deren Vergleichung mit der schon erwähnten oberen $n - t + 1$ noch zu dem auch von Herrn Netto (a. a. O. Lehrs. VII) ausgesprochenen Ergebnisse führt, dass für jede solche Gruppe, unter n wieder den Grad derselben verstanden, $n - t + 1 \geqq 2t - 2$ ist, und folglich $n \geqq 3t - 3$, oder $t \leqq \frac{n}{3} + 1$.

II.

Es mag nun, wie gesagt, zunächst eine besonders naheliegende Anwendung der im Vorhergehenden entwickelten allgemeinen Sätze gegeben werden, die zwar mit den späteren Hauptergebnissen in keinem nothwendigen Zusammenhange steht, wohl aber durch Verbindung mit denselben eine gewisse Bedeutung erlangt, und auch an sich vielleicht in mancher Hinsicht bemerkenswerth ist.

Da nämlich eine t-fach transitive Gruppe eine solche ist, deren Substitutionen die gleichzeitige Ersetzung von irgend t unter den Buchstaben der Gruppe durch ebenso viele beliebige derselben gestatten, so müssen sich insbesondere alle möglichen Ersetzungen verschiedener Anordnungen derselben t Gruppenbuchstaben durch einander mittels Substitutionen einer derartigen Gruppe ausführen lassen. Das heisst aber offenbar: für jede gegebene Substitution in nicht mehr als t Buchstaben einer t-fach transitiven Gruppe n^{ten} Grades findet sich in dieser Gruppe mindestens eine Substitution, deren Normalform diejenige der gegebenen als Theil enthält und in ihrem andern Theile höchstens noch $n-t$ Buchstaben versetzt.

Sind nun irgend s Potenzen verschiedener Primzahlen und positiven ganzen Grades gegeben, $p_1^{h_1}$ bis $p_s^{h_s}$, deren Summe, $\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=s} p_\varkappa^{h}$, nicht grösser als t ist, so kann die Normalform einer Substitution von nicht mehr als t Buchstaben insbesondere aus s Cyklen bestehen, welche diese s Potenzen zu Buchstabenzahlen haben. Auch für alle möglichen Normalformen dieser besonderen Art muss es daher in jeder t-fach transitiven Gruppe n^{ten} Grades Substitutionen geben, deren Normalformen dieselben als Theile enthalten und in ihren anderen Theilen nicht mehr als $n-t$ Buchstaben zählen. In jeder solchen Substitution ist aber, nach Satz I im ersten Abschnitt, für jede der gegebenen s Primzahlpotenzen, weil dieselben eben Buchstabenzahlen von Cyklen der Normalform sind, die Gesammtzahl der Buchstaben aller derjenigen Cyklen dieser letzteren, deren Ordnung durch diese Potenz theilbar ist, nicht kleiner als u, wenn darunter wieder die kleinstmögliche Buchstabenzahl einer von der identischen verschiedenen Substitution der Gruppe verstanden wird. Und da von dieser Gesammtzahl gerade so viel auf den gegebenen Theil der Normalform entfällt, als die fragliche Primzahlpotenz selbst, etwa $p_\varkappa^{h_\varkappa}$, beträgt, nämlich die Buchstabenzahl des einen darin vorkommenden Cyklus, dessen Ordnung durch diese Potenz dargestellt wird, so bleibt für den anderen Theil immer noch mindestens $u-p_\varkappa^{h_\varkappa}$; d. h. es finden sich von den durch ihn versetzten Buchstaben, deren $n-t$ nicht übersteigende Zahl mit s bezeichnet werden möge, immer noch nicht weniger als $u-p_\varkappa^{h_\varkappa}$ in solchen Cyklen desselben, deren Buchstabenzahlen Vielfache von $p_\varkappa^{h_\varkappa}$ sind, wobei also $\varkappa$ nach einander jede der s Zahlen 1 bis s bedeuten kann. Unter der Voraussetzung, dass die Gruppe die alternirende nicht enthält, ist nun $u-p_\varkappa^{h_\varkappa}$ grösser als Null, da ja nach dem vorerwähnten bekannten Satze Mathieu's dann u über t und also sogar über $\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=s} p_\varkappa^{h_\varkappa}$ liegt. Um so mehr ist dann folglich s grösser als Null,

d. h. der fragliche Normalformtheil ist dann auch wirklich vorhanden; was ja in dem andern Falle, wo selbst die s umfassende Zahl $n-t\leqq 2$, und $u\leqq 3$ ist, nicht sicher, und wenn insbesondere $n-t<2$ wird, geradezu unmöglich ist. Und somit giebt es unter derselben Voraussetzung nach Satz III (Abschnitt I) in diesem Normalformtheile mindestens einen Cyklus, dessen Buchstabenzahl durch nicht weniger als $\frac{1}{s}\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=z}(u-p_\varkappa^{h_\varkappa})=\frac{1}{s}\left(zu-\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=z}p_\varkappa^{h_\varkappa}\right)$ der gegebenen Primzahlpotenzen theilbar ist, und also, wenn k die kleinste nicht unter dieser Grenze liegende ganze Zahl bezeichnet, die hier, wo ja schon u selbst $>\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=z}p_\varkappa^{h_\varkappa}$ ist, jedenfalls Null übersteigt, offenbar nicht kleiner sein kann, als das Product der kleinsten k unter jenen zu einander primen z Potenzen. Um so weniger ist dann aber s als Buchstabenzahl des ganzen den fraglichen Cyklus enthaltenden Normalformtheils kleiner als dieses Product; so dass, wenn Π_k dasselbe darstellt, unter den gemachten Voraussetzungen gleichzeitig die beiden Beziehungen bestehen:

$$s\geqq\Pi_k \quad \text{und} \quad k\geqq\frac{1}{s}\left(zu-\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=z}p_\varkappa^{h_\varkappa}\right),$$

deren zweite auch in die Gestalt

$$s\geqq\frac{1}{k}\left(zu-\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=z}p_\varkappa^{h_\varkappa}\right)$$

gebracht werden kann, da ja k ebenso wie s positiv ist. Nun ist $s\leqq n-t$, und $\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=z}p_\varkappa^{h_\varkappa}\leqq t$; man hat also hier offenbar erst recht:

$$n-t\geqq\Pi_k \quad \text{und} \quad n-t\geqq\frac{zu-t}{k},$$

und damit den Satz:

V. *Hat man irgend z Potenzen positiven ganzen Grades verschiedener Primzahlen, und ist t nicht kleiner als die Summe dieser Potenzen, so kann eine Gruppe n^{ten} Grades, welche die alternirende nicht enthalten, und von deren Substitutionen ausser der identischen keine weniger als u Buchstaben versetzen soll, nicht t-fach transitiv sein, wenn es nicht eine positive ganze Zahl k giebt der Art, dass $n-t$ weder kleiner ist als das Product der kleinsten k von jenen z Primzahlpotenzen, noch als* $\frac{zu-t}{k}$.

Von den Folgerungen, die dieser Satz gestattet, wenn irgend

eine der Zahlen n, t und u, oder wenigstens eine geeignete Grenze dafür, als Function der andern beiden gegeben ist — der höchste Werth von z ist ja überhaupt nur Function von t — mag nachstehende hervorgehoben werden:

Unter der besonderen Voraussetzung, dass u grösser als $n-t$ ist, also den schon erwähnten grösstmöglichen Werth $n-t+1$ hat, kann $n-t$ nicht $\geqq \frac{zu-t}{k}$ sein, wenn nicht $u > \frac{zu-t}{k}$ ist, d. h. wenn nicht die ganze und positive Zahl k der Bedingung $t \geqq (z-k)u$ genügt. Das ist aber hier, wo die Gruppe die alternirende nicht enthalten soll, und also $u > t$ sein muss, nur möglich, wenn k nicht kleiner als z selbst ist. Und so ergiebt sich als besonderer Fall des Satzes V:

VI. *Sollen ausser der identischen alle Substitutionen einer t-fach transitiven Gruppe von n Buchstaben, welche die alternirende nicht enthält, mehr als $n-t$ Buchstaben versetzen, so darf $n-t$ nicht kleiner sein als irgend ein Product solcher Potenzen verschiedener Primzahlen und positiven ganzen Grades, deren Summe t nicht übersteigt.*

Doch erscheint dieser Satz nur seiner Herleitung wegen erwähnenswerth, gegenüber einem von Herrn Jordan gefundenen (Journ. d. math. 2, XVII), nach welchem keine Gruppe der fraglichen Art von mehr als 12 Buchstaben mehr als dreifach transitiv sein kann.

Was den Gebrauch des Satzes V betrifft, so ist es zunächst leicht, in jedem gegebenen Falle Grenzen zu finden, innerhalb deren die in ihm vorkommende Zahl k sicher wählbar ist. Ist nämlich k' der grösstmögliche, k'' der kleinstmögliche Werth dieser ganzen Zahl, so hat man, da ja mit zunehmendem k der Werth von Π_k wächst, der von $\frac{zu-t}{k}$ dagegen abnimmt, offenbar die Beziehungen:

$$\Pi_{k'+1} > n-t \geqq \frac{zu-t}{k'} \quad \text{und} \quad \frac{zu-t}{k''-1} > n-t \geqq \Pi_{k''}.$$

Es ist auch nicht schwer, aus den beiden durch den Satz V gegebenen Beziehungen

$$1)\quad n-t \geqq \Pi_k \quad \text{und} \quad 2)\quad n-t \geqq \frac{zu-t}{k}$$

unter Entfernung von k eine bestimmte functionsmässige Abhängigkeit zwischen n, t, z und u herzuleiten. Man erhält eine solche z. B. schon auf folgende einfache Weise:

Die Bedingung, dass die Summe der fraglichen z Primzahlpotenzen t nicht übersteigen soll, wird offenbar durch die Annahme erfüllt, dass keine dieser Potenzen grösser als $\frac{t}{z}$ ist; eine Annahme, die ja zu ihrer

Möglichkeit nur erfordert, dass sich bis zur Grenze $\frac{t}{s}$ hinauf wenigstens s verschiedene Primzahlen finden; was wieder der Fall ist, wenn $\frac{t}{s}$ wenigstens nicht kleiner als die s^{te} in der wachsenden Reihe aller Primzahlen ist, d. h. $\frac{t}{s} \geqq p_s'$, oder $t \geqq sp_s'$, unter p_s' diese s^{te} Primzahl verstanden. Dabei kann selbstverständlich immer noch jede der s Primzahlpotenzen der oberen Grenze $\frac{t}{s}$ so nahe wie möglich gewählt werden, also die höchste ihrem Werthe nach $\frac{t}{s}$ nicht übersteigende Potenz positiven ganzen Grades ihrer Grundzahl sein. Ist aber für eine solche Potenz, p^h, schon $p^{h+1} > \frac{t}{s}$, so ist, da ja h als positive ganze Zahl mindestens 1 beträgt, erst recht $p^{2h} > \frac{t}{s}$, also p^h selbst $> \left(\frac{t}{s}\right)^{\frac{1}{2}}$. Und folglich darf man die besondere Bestimmung treffen, dass Letzteres bei allen in Rede stehenden s Primzahlpotenzen der Fall, d. h. der Werth einer jeden grösser als $\left(\frac{t}{s}\right)^{\frac{1}{2}}$ sein soll, ohne s dadurch einer anderen Beschränkung zu unterwerfen, als höchstens der erwähnten $t \geqq sp_s'$.

Thut man dies, so wird das Product Π_k grösser als $\left(\frac{t}{s}\right)^{\frac{1}{2}k}$, und also nach Beziehung 1) auch $n - t > \left(\frac{t}{s}\right)^{\frac{1}{2}k}$. Aus dieser positiven Ungleichung folgt weiter, wenn log den nach irgend einer 1 übersteigenden Grundzahl genommenen Logarithmus bedeutet:

$$\log(n-t) > \frac{1}{2} k \log\left(\frac{t}{s}\right).$$

Und damit braucht man offenbar nur noch Beziehung 2), $n - t \geqq \frac{su-t}{k}$, in geeigneter Weise zu verbinden, um bei den positiven Werthen von $n - t$, $\log(n-t)$, $\log\left(\frac{t}{s}\right)$, $su - t$ und k sofort eine von k freie Abhängigkeit der gesuchten Art zu erhalten, nämlich:

$$(n-t)\log(n-t) > \frac{1}{2}(su-t)\log\left(\frac{t}{s}\right),$$

die also unter der Voraussetzung, dass die Gruppe die alternirende nicht enthält, wenigstens für alle diejenigen positiven ganzen Werthe von s besteht, welche der Bedingung $t \geqq sp_s'$ genügen.

Diese Ungleichung gilt nun augenscheinlich um so mehr, wenn u in ihr durch eine kleinere Zahl ersetzt wird. Man kann sie demnach durch blosses Einsetzen von u frei und zu einer Beziehung

zwischen t, s und n allein machen, sobald irgend eine in diesen Zahlen ausgedrückte untere Grenze von u gegeben ist. Die höchste vorläufig verfügbare allgemeine Grenze dieser Art, wenigstens oberhalb $t = 2$, ist die im ersten Abschnitt nachgewiesene $2t - 2$; immer unter der Voraussetzung, dass die Gruppe die alternirende nicht enthält. Aber es lässt sich von vornherein ersehen, dass die Einführung dieser Grenze in die fragliche oder irgend eine andere auf dem eingeschlagenen Wege zu erlangende Beziehung keine Transitivitätsgrenze liefern kann, die niedriger, oder auch nur ebenso niedrig wäre, als diejenige, die Herr Jordan in seinen schon erwähnten früheren Untersuchungen (s. Anm. 1) durch functionsmässige Beziehungen zwischen n und t gegeben hat, für grosse Werthe von t durch $n - t \geqq t\left(\frac{2t-3}{q} - 1\right)$, unter q die unmittelbar über $\frac{n-t}{t}$ liegende Primzahl verstanden, die ja bekanntlich sicher nicht grösser als $2\,\frac{n-t}{t}$ ist.

Denn dieser Weg kann ja nach dem, was Eingangs des Abschnittes darüber gesagt ist, keinesfalls zu einer höheren unteren Grenze für $n - t$ führen, als sie durch die kleinstmögliche Buchstabenzahl eines solchen Cyklenproductes einer Normalform gegeben wird, in welchem diejenigen Cyklen, deren Buchstabenzahlen durch $p_\varkappa^{h_\varkappa}$ theilbar sind, zusammen nicht weniger als $u' - p_\varkappa^{h_\varkappa}$ Buchstaben zählen, unter u' die höchste verfügbare untere Grenze von u, und unter $p_\varkappa^{h_\varkappa}$ nach einander jede von s Potenzen positiven ganzen Grades verschiedener Primzahlen verstanden, $p_1^{h_1}$ bis $p_s^{h_s}$, deren Summe t nicht übersteigt. Und diese kleinste Buchstabenzahl kann ihrerseits ihrem Begriffe nach nicht grösser sein als die Summe $\sum\limits_{\varkappa=1}^{\varkappa=s} u_\varkappa'$, wenn $u_\varkappa'$ das kleinste nicht unter $u' - p_\varkappa^{h_\varkappa}$, und also das grösste unter u' liegende Vielfache von $p_\varkappa^{h_\varkappa}$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots s)$ bedeutet; da $\sum\limits_{\varkappa=1}^{\varkappa=s} u_\varkappa'$ selbst die Buchstabenzahl eines Cyklenproductes der angegebenen Art darstellen kann, wie offenbar in dem besonderen Falle, dass dieses Product aus s Cyklen besteht, welche die s Vielfachen u_1' bis u_s' zu Buchstabenzahlen haben. Mithin kann auch die fragliche untere Grenze von $n - t$ nicht über $\sum\limits_{\varkappa=1}^{\varkappa=s} u_\varkappa'$ liegen. Letztere Summe beträgt aber höchstens $s(u' - 1)$, da ja jedes der s Vielfachen kleiner als u' sein soll. So lange folglich für u keine höhere untere Grenze zu Gebote steht, als $2t - 2$, kann sich für $n - t$ hier keine höhere ergeben, als $s(2t - 3)$. Und selbst diese wird, wenn t über eine

gewisse Grösse hinaus wächst, von der erwähnten Jordan'schen Grenze noch überschritten, wie eine genauere, weiterhin auch gegebene, Bestimmung der nur von t abhängigen oberen Grenze von z zeigt. Soviel ist übrigens in Bezug auf diese letztere Grenze sofort zu erkennen, dass sicher $z^2 < t$, also z selbst $< \sqrt{t}$ bleibt. Denn z genügt ja der Bedingung, dass es z Potenzen verschiedener Primzahlen und positiven ganzen Grades geben soll, deren Summe nicht grösser als t ist, und diese Summe übersteigt offenbar noch die der ersten z ungeraden Zahlen, die ja z^2 beträgt.

III.

Die Bedeutung des Ausdruckes $\frac{zu}{s}$ in Satz IV (Abschnitt I) weist auf den Vortheil hin, den es für die Anwendung dieses Satzes zur Bestimmung der Transitivitätsgrenze einer die alternirende nicht enthaltenden Gruppe haben würde, neben einer möglichst hohen unteren Grenze für z eine möglichst niedrige obere der Gestalt qu für s zu kennen, d. h. für die Buchstabenzahl einer solchen Substitution der Gruppe, deren Ordnung durch jede von z Potenzen positiven ganzen Grades verschiedener Primzahlen theilbar ist. Es liegt daher nahe, nachzusehen, ob man ohne allzustarke Beschränkung des Werthes von z eine solche Substitution aus einer möglichst geringen Anzahl zur selben Gruppe gehöriger Substitutionen der Buchstabenzahl u, d. h. der kleinsten, auf die eine von der identischen verschiedene Substitution der Gruppe beschränkt sein kann, zusammenzusetzen vermag, etwa schon aus zweien.

Das würde sich für irgend einen gegebenen Werth der Anzahl z mit solchen zwei dieser Substitutionen thun lassen, von denen die eine, U_1, jeden Buchstaben einer gewissen Reihe von x, $A_x = a_1, a_2, \ldots, a_x$, durch denjenigen gleicher Stellenzahl einer gewissen andern Reihe von ebenso vielen Buchstaben, $B_x = b_1, b_2, \ldots, b_x$, ersetzt, während die zweite, U_2, in derselben Weise an die Stelle von B_x eine neue Anordnung der Buchstaben von A_x bringt, $A_x' = a_1', a_2', \ldots, a_x'$, der Art, dass die Ordnung der durch $\begin{pmatrix} A_x \\ A_x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1, a_2, \ldots, a_x \\ a_1', a_2', \ldots, a_x' \end{pmatrix}$ dargestellten Substitution in diesen Buchstaben z Primzahlpotenzen der angegebenen Beschaffenheit unter ihren Theilern hat. Denn diese Substitution würde ja dann einen Theil der von der Zusammensetzung $U_1 U_2$ bewirkten Versetzungen bilden, indem die letztere A_x über B_x in A_x' umwandeln würde, so dass in der That auch die Ordnung dieser Zusammensetzung durch alle jene z Primzahlpotenzen theilbar wäre.

Nun giebt es in jeder t-fach transitiven Gruppe zu jeder gegebenen Substitution derselben mindestens eine ähnliche, in der an den Stellen

irgend einer t nicht übersteigenden Anzahl unter den von der gegebenen versetzten Buchstaben ebensoviele beliebig in der Gruppe gewählte stehen, insbesondere also auch dieselben Buchstaben in irgend einer neuen Anordnung. Denn nach dem Begriffe der Transitivität finden sich ja in der Gruppe für alle möglichen Ersetzungen von t ihrer Buchstaben durcheinander oder andere t der Gruppe Substitutionen, welche diese Ersetzungen ausführen; es muss also darin, bei dem ferneren Umstande, dass alle Transformationen von Substitutionen einer Gruppe durcheinander wieder nur zu Substitutionen der nämlichen Gruppe führen, auch mindestens eine Substitution vorkommen, welche die gegebene in eine von der behaupteten Art transformirt. Und folglich giebt es auch in jeder t-fach transitiven Gruppe, wenn die sonst beliebig aus den Buchstaben derselben herauszugreifenden Reihen von je $\varkappa$, $A_\varkappa$ und $B_\varkappa$, keinen Buchstaben gemein haben, und $2\varkappa$ nicht grösser als t ist, zu jeder Substitution der Gruppe, S_1, die $A_\varkappa$ durch $B_\varkappa$ in der gegebenen Aufeinanderfolge ersetzt, mindestens eine ähnliche, weil daraus durch Transformation zu erhaltende, S_2, in der die $2\varkappa$ Buchstaben von $A_\varkappa$ und $B_\varkappa$ ihre Plätze so gegeneinander vertauscht haben, dass, wieder in der gegebenen Folge, $B_\varkappa$ für $A_\varkappa$ steht, und für $B_\varkappa$ eine beliebig gewählte neue Anordnung der Buchstaben von $A_\varkappa$, $A_\varkappa'$. Und da eben letztere hierbei ganz willkürlich bleibt, so dass die Ersetzung von $A_\varkappa$ durch $A_\varkappa'$, die ja von der Zusammensetzung $S_1 S_2$ über $B_\varkappa$ hinweg ausgeführt wird, jede mögliche Substitution in den $\varkappa$ Buchstaben von $A_\varkappa$ darstellen kann, so lässt sich auch jede solche Substitution durch eine Zusammensetzung von zwei Substitutionen der angegebenen Art bewirken.

Zur Erledigung der gestellten Frage bedarf es also nur noch einer Untersuchung darüber, wie es sich bei einer der hier in Betracht kommenden Substitutionen von u Buchstaben mit der Zahl $\varkappa$ verhält, d. h. mit der Buchstabenzahl einer Reihe $A_\varkappa$, für welche die Substitution eine durchweg aus neuen Buchstaben bestehende Reihe $B_\varkappa$ setzen soll. Angenommen, aus den Buchstaben irgend einer Substitution sei eine Reihe von x, A_x, von der Art der Reihe $A_\varkappa$ herausgegriffen, also von der Eigenschaft, dass die Substitution keinen Buchstaben von A_x durch einen schon in dieser Reihe enthaltenen ersetzt. Dann finden sich unter den übrigen von der Substitution versetzten Buchstaben höchstens doppelt so viele, d. h. $2x$, die sich mit den x von A_x zu keiner Reihe von $x+1$ der gleichen Art vereinigen lassen, nämlich offenbar nur die x der Reihe, die in A_x, und andererseits die mit den vorigen möglicherweise ganz oder zum Theil übereinstimmenden x, in die A_x durch die Substitution verwandelt wird; also nur immer die einem Buchstaben von A_x in der letzteren cyklisch benachbarten, die in einen zusammenfallen, wenn der Cyklus von

zweiter Ordnung, d. h. eine Transposition, ist. Soll demnach x seinen grösstmöglichen Werth haben, soll also nach Abzug dieser höchstens $2x$ Buchstaben und der x von A_x selbst überhaupt keiner der von der Substitution versetzten Buchstaben mehr übrig sein, so darf $3x$ nicht kleiner sein als die Gesammtzahl dieser letzteren; d. h. *für keine Substitution kann die grösste Zahl von Buchstaben, die sich so herausgreifen lässt, dass keiner derselben durch die Substitution in einen schon unter ihnen vorkommenden verwandelt wird, weniger als $1/3$ der ganzen Buchstabenzahl betragen.*

Soll aber eine t-fach transitive Gruppe die alternirende ihres Grades nicht enthalten, so kann auch die kleinstmögliche Buchstabenzahl einer von der identischen verschiedenen Substitution derselben, d. h. u, nach der erwähnten von Hrn. Jordan dafür gegebenen Grenze (s. Anm. 4), die hier genügt, nicht kleiner als $2t - 3$ sein; und da somit, wie leicht ersichtlich, die kleinste nicht unter einem Drittel dieser Buchstabenzahl liegende ganze Zahl keinesfalls weniger als die grösste nicht über $\frac{t}{2}$ liegende beträgt, so kann für jede solche Substitution, auch der kleinsten Buchstabenzahl, die in Frage stehende Zahl $\varkappa$, d. h. die Buchstabenzahl einer Reihe, die von der Substitution in eine Reihe von lauter neuen Buchstaben umgewandelt wird, die ihre durch $2\varkappa \leqq t$ gesetzte Grenze wirklich erreichen. Und bei Beschränkung auf die bekannte Mathieu'sche Grenze $u > t$ würde sich auf dieselbe Weise wenigstens ergeben, dass $\varkappa$ der kleinsten über $1/3\, t$ liegenden ganzen Zahl gleich sein kann.

Das Erhaltene lässt sich offenbar dahin zusammenfassen, dass:

(VII_1) *wenn irgend eine t-fach transitive Gruppe gegeben ist, welche die alternirende nicht enthält, und eine beliebige von der identischen verschiedene Substitution derselben, S_1, wenn ferner $\left[\frac{t}{2}\right]$ die grösste nicht über $\frac{t}{2}$ liegende ganze Zahl bedeutet, sich für jede mögliche Art, $\left[\frac{t}{2}\right]$ Buchstaben untereinander zu versetzen, eine der gegebenen S_1 ähnliche Substitution, S_2, der Gruppe finden lässt von der Beschaffenheit, dass eine Zusammensetzung beider, $S_1 S_2$, in gewissen $\left[\frac{t}{2}\right]$ der von ihnen versetzten Buchstaben die vorgeschriebene Versetzung bewirkt, und also die Normalform der letzteren in der ihrigen als Theil enthält.*

Für den vorliegenden Fall nun, in welchem es ja darauf ankommt, die Ordnung der fraglichen Zusammensetzung durch möglichst viele und grosse Potenzen positiven ganzen Grades verschiedener Primzahlen theilbar zu machen, ist es, wie man leicht sieht, am vortheilhaftesten, jene beliebige Versetzung von $\left[\frac{t}{2}\right]$ Buchstaben untereinander so zu

wählen, dass die Cyklen ihrer Normalform solche Potenzen selbst zu Buchstabenzahlen haben. Und da dies für irgend solche z Potenzen positiven ganzen Grades verschiedener Primzahlen möglich ist, deren Summe $\frac{t}{2}$ nicht übersteigt, so hat man als unmittelbare Folgerung von VII_1:

VII_2. *Ist irgend eine t-fach transitive Gruppe, G, gegeben, welche die alternirende nicht enthält, und aus derselben eine beliebige Substitution, U_1, der Buchstabenzahl u, d. h. der kleinsten, auf die eine von der identischen verschiedene Substitution der Gruppe beschränkt sein kann; hat man ferner irgend z Potenzen verschiedener Primzahlen und positiven ganzen Grades, deren Summe nicht grösser ist als $\frac{1}{2}t$; so kann man in derselben Gruppe G immer eine der gegebenen U_1 ähnliche Substitution U_2 finden der Art, dass in der Normalform der durch eine Zusammensetzung beider, $U_1 U_2$, dargestellten Substitution z Cyklen auftreten, deren Buchstabenzahlen die gegebenen z Primzahlpotenzen sind, und zwar als einzige Versetzung in $\left[\frac{t}{2}\right]$ der von den zusammensetzenden Substitutionen U_1 und U_2 versetzten Buchstaben, unter $\left[\frac{t}{2}\right]$ wie immer die grösste nicht über $\frac{t}{2}$ liegende ganze Zahl verstanden.*

Man kann eben — um den Gedankengang des Beweises hier kurz zu wiederholen — aus den u Buchstaben der gegebenen Substitution U_1 bei der für u bestehenden unteren Grenze stets eine Reihe von $\left[\frac{t}{2}\right]$, A, herausgreifen, die von der Substitution in eine andere, B, von lauter nicht in A vorkommenden Buchstaben umgewandelt wird, und dann, wenn A' eine neue Anordnung der $\left[\frac{t}{2}\right]$ Buchstaben von A bezeichnet der Art, dass die Normalform von $\left(\frac{A}{A'}\right)$, d. h. derjenigen Substitution in diesen Buchstaben, die A durch A' ersetzt, aus z Cyklen der verlangten Eigenschaft besteht, die gegebene Substitution U_1 mit Benutzung der t-fachen Transitivität der Gruppe durch eine Substitution derselben so transformiren, dass B an die Stelle von A, und A' an die von B tritt, immer in der gegebenen Buchstabenfolge. Dadurch erhält man eine derselben Gruppe angehörige, der gegebenen U_1 ähnliche Substitution, U_2, die B in A' umwandelt, und das ist eine solche der behaupteten Art. Denn eine Zusammensetzung derselben mit der gegebenen, $U_1 U_2$, ersetzt ja A durch A', so dass die Normalform dieser Zusammensetzung die z Cyklen der Normalform von $\left(\frac{A}{A'}\right)$ als einzige in den $\left[\frac{t}{2}\right]$ Buchstaben von A bewirkte Versetzung enthalten muss.

In einer solchen Zusammensetzung ist also in der That eine Substitution der gesuchten Beschaffenheit gefunden. Sie enthält unter den Theilern ihrer Ordnung z Potenzen verschiedener Primzahlen und positiven ganzen Grades, die nur der Bedingung zu genügen hatten, dass ihre Summe nicht grösser als $\frac{1}{2}t$ sein durfte; da sich eben in ihrer Normalform für jede dieser Potenzen ein Cyklus findet, der sie zur Buchstabenzahl hat. Sie ist ferner selbstverständlich eine Substitution derselben beliebig gegebenen t-fach transitiven, die alternirende nicht enthaltenden Gruppe, der die beiden sie zusammensetzenden Substitutionen entnommen sind, und für die u die kleinstmögliche Buchstabenzahl einer von der identischen verschiedenen Substitution bezeichnet. Und da sie endlich nur aus zwei Substitutionen dieser Buchstabenzahl entstehen soll, so ist ihre eigene Buchstabenzahl offenbar gleich $(2-\varrho)u$, unter ϱ eine später noch näher zu bestimmende Zahl verstanden, die keinesfalls kleiner als Null ist, sondern sogar immer grösser, da ja die zusammensetzenden Substitutionen nach dem Vorhergehenden nicht durchweg verschiedene Buchstaben umstellen. Dass andererseits ϱ nicht grösser als 1 sein kann, ist klar, weil eben sonst die fragliche Zusammensetzung weniger als u Buchstaben versetzen würde, während sie doch nach dem über ihre Ordnung Gesagten eine von der identischen verschiedene Substitution der gegebenen Gruppe ist.

Dies gezeigt, folgt aber aus dem erwähnten Satze IV (Abschnitt I), dass es unter den Cyklen der Normalform einer solchen Zusammensetzung mindestens einen geben muss, dessen Buchstabenzahl durch nicht weniger als $\frac{zu}{(2-\varrho)u} = \frac{z}{2-\varrho}$ der gegebenen z Primzahlpotenzen theilbar ist $(s = (2-\varrho)u)$ und daher nicht kleiner als das kleinstmögliche Product aus ebensovielen derselben, da ja diese Potenzen zu einander prim sein sollen, so dass auch immer das Product derjenigen von ihnen, durch die eine Zahl theilbar ist, Theiler dieser Zahl und also nicht grösser als dieselbe ist. Ja es muss sogar, abgesehen von dem hier offenbar belanglosen Falle $z = \varrho = 1$, immer mindestens einer jener Cyklen *mehr* als $\frac{z}{2-\varrho}$ der z Potenzen unter den Theilern seiner Buchstabenzahl haben; weil ja sonst demselben Satze zufolge die Buchstabenzahl eines jeden von ihnen durch genau so viele theilbar sein müsste, während doch z dieser Cyklen zu Buchstabenzahlen nur je eine der z Primzahlpotenzen selbst haben sollen, und nach dem von ϱ Geltenden 1 eben nur dann $= \frac{z}{2-\varrho}$ werden kann, wenn sowohl z als $\varrho = 1$ wird. Ist aber, wie hieraus hervorgeht, schon die Buchstabenzahl eines einzelnen Cyklus der fraglichen

Normalform nicht kleiner als das kleinstmögliche Product aus nicht weniger, bezw. sogar mehr als $\frac{z}{2-\varrho}$ der gegebenen z Primzahlpotenzen, d. h. als das Product der kleinsten k unter ihnen, wenn k die kleinste nicht unter, bzw. sogar über $\frac{z}{2-\varrho}$ liegende ganze Zahl bezeichnet, so kann um so weniger die Buchstabenzahl der ganzen Normalform, $(2-\varrho)\,u$, unter diesem Producte liegen; dieselbe muss vielmehr stets grösser sein, da ja andernfalls die fragliche Normalform überhaupt nur aus einem einzigen solchen Cyklus bestehen könnte, im Widerspruche damit, dass schon ein Theil derselben, der nicht mehr als $\frac{t}{2}$ und also sicher nicht alle ihre Buchstaben umfasst, z Cyklen aufweisen soll. Stellt also Π_k jenes Product dar, so ist immer $(2-\varrho)\,u > \Pi_k$; und da andererseits $(2-\varrho)\,u$, die Buchstabenzahl der fraglichen Normalform, nicht grösser als n sein kann, wenn wieder n die Buchstabenzahl der ganzen beliebig gegebenen t-fach transitiven, die alternirende nicht enthaltenden Gruppe ist, der diese Normalform angehört, so hat man auch sofort

$$n \geqq (2-\varrho)\,u > \Pi_k.$$

Das giebt offenbar den sich als Folgerung aus VII_2 und IV darstellenden Satz:

VIII. *Hat man irgend z Potenzen positiven ganzen Grades verschiedener Primzahlen, und ist $\frac{1}{2}\,t$ nicht kleiner als die Summe dieser Potenzen, so muss die Buchstabenzahl jeder t-fach transitiven Gruppe, welche die alternirende nicht enthalten soll, grösser sein als das kleinstmögliche Product aus nicht weniger als $\frac{z}{2-\varrho}$ der gegebenen z Potenzen, ja, abgesehen von dem belanglosen Falle $z=\varrho=1$, sogar aus mehr derselben, unter ϱ eine gewisse positive nicht über 1 liegende Zahl verstanden (irgend eine Zahl nämlich, die der immer erfüllbaren Bedingung genügt, dass, wenn u die kleinstmögliche Buchstabenzahl einer von der identischen verschiedenen Substitution der fraglichen Gruppe bezeichnet, $(2-\varrho)\,u$ die Buchstabenzahl einer Substitution sein kann, die sich aus zwei zu dieser Gruppe gehörigen einander ähnlichen Substitutionen von je u Buchstaben zusammensetzt, und deren Normalform unter ihren Cyklen z enthält, welche die gegebenen z Primzahlpotenzen zu Buchstabenzahlen haben).*

Auch muss dann schon $(2-\varrho)\,u$ grösser als jenes Product sein, d. h. als dasjenige der kleinsten k unter den gegebenen z Primzahlpotenzen, wenn k die kleinste nicht unter, bzw. sogar über $\frac{z}{2-\varrho}$ liegende ganze Zahl bedeutet; oder, was ja dasselbe sagt, es muss jede von der

identischen verschiedene Substitution einer t-fach transitiven, die alternirende nicht enthaltenden Gruppe mehr Buchstaben versetzen, als der $(2-\varrho)$te Theil dieses Productes beträgt.

Bestimmtere functionsmässige Beziehungen von n und u zu t lassen sich aus diesem Satze, d. h. aus $n \geqq (2-\varrho)\, u > \Pi_k$, zunächst wieder mittels eines schon im vorigen Abschnitte benützten einfachen, freilich nur eine erste Annäherung darstellenden, Verfahrens ableiten; indem man nämlich der Bedingung, dass die Summe der sonst beliebigen in Rede stehenden s Potenzen positiven ganzen Grades verschiedener Primzahlen nicht grösser als $\frac{1}{2}\, t$ sein darf, durch die Festsetzung Genüge leistet, dass jede dieser Potenzen die höchste ihrem Werthe nach $\frac{t}{2s}$ nicht übersteigende Potenz positiven ganzen Grades ihrer Grundzahl ist. Das ist offenbar möglich, sobald es nur irgend s verschiedene Primzahlen giebt, von denen keine grösser als $\frac{t}{2s}$ ist; was ja wieder für jeden Werth der ganzen positiven Zahl s der Fall ist, für den $\frac{t}{2s}$ wenigstens nicht kleiner wird als die $s$te in der wachsenden Reihe der Primzahlen, d. h., unter p_s diese $s$te Primzahl verstanden, für den $\frac{t}{2s} \geqq p_s$, also $t \geqq 2sp_s$ ist.

Unter jener Festsetzung muss, ähnlich wie früher, jede der s Primzahlpotenzen grösser als $\left(\frac{t}{2s}\right)^{\frac{1}{2}}$ sein, da ja sonst auch das Quadrat der Potenz, also eine höhere Potenz positiven ganzen Grades derselben Grundzahl der Annahme entgegen $\frac{t}{2s}$ noch nicht übersteigen würde. Und folglich ist dann, bei dem von Null verschiedenen Werthe von k, selbst das Product der kleinsten k unter diesen Potenzen, Π_k, noch grösser als $\left(\frac{t}{2s}\right)^{\frac{1}{2}k}$; was man nur mit der Beziehung

$$n \geqq (2-\varrho)\, u > \Pi_k$$

zu verbinden hat, um sofort

$$n \geqq (2-\varrho)\, u > \left(\frac{t}{2s}\right)^{\frac{1}{2}k}$$

zu erhalten.

Nun liegt nach den im Satze dafür gegebenen Bestimmungen k jedenfalls nicht unter $\frac{s}{2-\varrho}$, und ϱ weder unter Null noch über 1; so dass offenbar um so mehr

$$n \geqq (2-\varrho)\, u > \left(\frac{t}{2z}\right)^{\frac{z}{2(2-\varrho)}},$$

und

$$n \text{ sowohl als } 2u > \left(\frac{t}{2z}\right)^{\frac{z}{4}}$$

sein muss.

Daraus ergeben sich noch etwas einfachere Beziehungen, die freilich auch noch etwas weniger genaue Grenzen liefern, durch die Bestimmung dass die nach unten hin offenbar nicht beschränkte positive ganze Zahl z nicht grösser als $\frac{1}{2}\sqrt{t}$ werden soll, also $\frac{t}{2z}$ nicht grösser als $t^{\frac{1}{2}}$; eine Bestimmung, die von $z = 5$ an aufwärts schon in der ohnehin bestehenden Bedingung $2zp_z \leqq t$ enthalten ist, da dann die z^{te} Primzahl, p_z, grösser ist als die z^{te} ungerade Zahl, und also auch grösser als $2z$. Man erhält auf diese Weise:

$$n \geqq (2-\varrho)\, u > t^{\frac{z}{4(2-\varrho)}},$$

und

$$n \text{ sowie } 2u > t^{\frac{1}{8}z};$$

was ja für jeden unter 5 liegenden Werth der Anzahl z ohne Weiteres gilt, da dann der Werth von $t^{\frac{z}{4(2-\varrho)}}$, und erst recht der von $t^{\frac{1}{8}z}$, nicht über t selbst liegt, während doch n und u hier immer grösser als t sind.

In allen diesen Beziehungen darf also der Werth von z wenigstens unter allen denjenigen positiven ganzen Zahlen beliebig gewählt werden, die der Bedingung $t \geqq 2zp_z$ genügen, unter p_z die z^{te} Primzahl verstanden; und sie gelten dann für jede beliebige t-fach transitive, die alternirende nicht enthaltende Gruppe von n Buchstaben, für die u die kleinstmögliche Buchstabenzahl einer von der identischen verschiedenen Substitution bedeutet.

Von Belang werden sie freilich erst für höhere Werthe von z, und also hohe von t; für solche bezeichnen sie aber, da ja z mit t unbegrenzt wachsen kann, offenbar schon einen wesentlichen Fortschritt gegenüber den in der Einleitung erwähnten älteren Jordan'schen Beziehungen ähnlicher Art.

(Fortsetzung folgt.)

Breslau, im August 1886.

Ueber Gruppen von Bewegungen.

(Zweite Abhandlung.)

Von

A. Schönflies in Göttingen.

Die nachfolgende Abhandlung ist bestimmt, die im 28ten Bande dieser Annalen, p. 318—342, begonnenen Untersuchungen zu Ende zu führen. Diejenigen Gruppen, deren Hilfsgruppe*) die cyklische Gruppe, resp. die Vierergruppe ist, habe ich a. a. O. bereits sämmtlich abgeleitet. Es sind daher noch diejenigen allgemeinen Bewegungsgruppen aufzustellen, welche die Diedergruppen für $n = 3, 4, 6$, die Tetraedergruppe und die Oktaedergruppe als Hilfsgruppe besitzen.

Dazu soll zunächst ein allgemeiner Satz bewiesen werden, der übrigens auch auf die in der ersten Abhandlung betrachteten Gruppen Anwendung findet.

§ 5.

Isomorphismus der allgemeinen Gruppen mit den Hilfsgruppen.

1. Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ zwei Bewegungen von gleichem Winkel und parallelen Axen, so ist, wie ich in der ersten Abhandlung (§ 2, 1) gezeigt habe, das Product

$$\mathfrak{A}^{-1} \cdot \mathfrak{A}_1 = \tau,$$

d. h. es ist einer Translation äquivalent. Sind daher $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ zwei derartige Bewegungen derselben Gruppe, so giebt es stets eine Translation τ der Gruppe, so dass

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A} \cdot \tau$$

ist; d. h. *die Bewegung $\mathfrak{A}_1$ kann durch Multiplication von $\mathfrak{A}$ mit einer Translation der Gruppe erhalten werden.*

---

*) Die Hilfsgruppe ist § 1, 4 definirt worden. Die Paragraphenzahlen 1 bis 4 beziehen sich auf die erste Abhandlung.

2. Hieraus ziehen wir sofort einen wichtigen Schluss. Sei nämlich G irgend eine Rotationsgruppe, Γ eine allgemeine Gruppe, welche G zur Hilfsgruppe hat, und Γ_τ die in Γ enthaltene ausgezeichnete Translationsgruppe. Ist alsdann $\mathfrak{A}'$ eine Rotation der Gruppe G, und $\mathfrak{A}$ eine Bewegung von Γ, deren Axe a zu a' parallel ist, und deren Rotationswinkel gleich demjenigen von $\mathfrak{A}'$ ist, *so erhalten wir alle derartigen Bewegungen von Γ, indem wir $\mathfrak{A}$ mit der Translationsgruppe Γ_τ multipliciren.*

3. Aus der mehrfach angeführten Thatsache, dass bei der Zusammensetzung von Bewegungen der Drehungswinkel der resultirenden Bewegung *allein von den Drehungswinkeln* der zusammengesetzten Bewegungen abhängt, folgt nun unmittelbar, dass *die Gruppen G und Γ isomorph sind, und zwar so, dass der Identität der Hilfsgruppe G die Translationsgruppe Γ_τ von Γ und jeder Drehung*

$$\mathfrak{A}'\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

von G in der Gruppe Γ eine unendliche Reihe von Bewegungen

$$\mathfrak{A}\left(\frac{2\pi}{n}, \tau\right), \quad \mathfrak{A}_1\left(\frac{2\pi}{n}, \tau_1\right), \quad \mathfrak{A}_2\left(\frac{2\pi}{n}, \tau_2\right) \cdots$$

*entspricht, deren Axen sämmtlich parallel sind, und die sich ergeben, wenn die Translationsgruppe Γ_τ mit irgend einer Bewegung $\mathfrak{A}_\varkappa$ dieser Reihe multiplicirt wird**).

4. Isomorphe Gruppen besitzen dieselbe Art der Zusammensetzung. Diejenigen Rotationsgruppen, welche Hilfsgruppen allgemeiner Bewegungsgruppen sein können, besitzen aber die Eigenschaft, dass sie sich durch Multiplication der ausgezeichneten Untergruppe mit einer einzigen Drehung erzeugen lassen.

In der That ergiebt sich die Diedergruppe durch Multiplication der cyklischen Gruppe mit einer Umklappung, die Tetraedergruppe durch Multiplication einer Vierergruppe mit einer Drehung um 120^0, und die Oktaedergruppe durch Multiplication der Tetraedergruppe mit einer Drehung um 90^0; und zwar hat diese Drehung in jedem Fall nur die eine einzige Bedingung zu erfüllen, dass sie die bezügliche Gruppe, d. h. resp. die cyklische Gruppe, die Vierergruppe, die Tetraedergruppe in sich selbst überführt.

5. Aus dem Isomorphismus der allgemeinen Bewegungsgruppen mit den Hilfsgruppen folgt demnach sofort, dass *jede allgemeine Bewegungsgruppe durch Multiplication der ausgezeichneten Untergruppe mit einer einzigen Bewegung $\mathfrak{A}$ hergestellt werden kann*, und zwar ist die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass wir wirklich

*) Vgl. § 3, 3.

neue Gruppen erhalten, wiederum nur die, dass die Bewegung $\mathfrak{A}$ die ausgezeichnete Untergruppe in sich überführt.

6. Der Isomorphismus der allgemeinen Gruppen mit den Hilfsgruppen lässt sich auch benutzen, um die Frage zu beantworten, wieviele Schaaren gleichberechtigter Geraden eine allgemeine Gruppe enthält.

Sei wieder Γ eine allgemeine Gruppe und G ihre Hilfsgruppe. Von den Axen von G können in Folge der Drehungen dieser Gruppe nur diejenigen zusammenfallen, welche gleichberechtigt sind. Alle gleichberechtigten Axen von G können durch eine von ihnen vertreten werden, die im übrigen beliebig ist. Seien jetzt a', b', c' ... diejenigen Geraden von G, welche in diesem Sinne alle in G enthaltenen Axen zu repräsentiren im Stande sind, *so ist die Zahl der Schaaren gleichberechtigter Geraden von* Γ *so zu bestimmen, dass wir untersuchen, in wie viele solcher Schaaren die zu* a', b', c' ... *parallelen Geraden von* Γ *zerfallen.*

7. Jede Rotationsgruppe G enthält Untergruppen G_1, G_2, G_3 .... Das analoge folgt daher auch für die allgemeinen Bewegungsgruppen Γ, und zwar folgt aus dem Isomorphismus noch insbesondere, dass alle diese Untergruppen Γ_1, Γ_2, Γ_3 ... dieselbe Translationsgruppe besitzen wie Γ, nämlich Γ_τ. Da Γ_τ unendlich viele Untergruppen besitzt, so ist leicht ersichtlich, dass es auch in Γ unendlich viele solcher Untergruppen giebt; jede beliebige in Γ_τ enthaltene Untergruppe Γ_τ' liefert im Allgemeinen Gruppen Γ_1', Γ_2', Γ_3' ..., die zu G_1, G_2, G_3 ... isomorph sind. Ich will hierauf nicht näher eingehen, bemerke jedoch ausdrücklich, dass wenn im Folgenden von Untergruppen einer allgemeinen Gruppe Γ die Rede ist, stets nur solche gemeint sind, welche dieselbe Translationsgruppe besitzen, wie Γ selbst.

§ 6.

Die Hilfsgruppe ist die Diedergruppe.

1. Aus dem Vorstehenden folgt, dass sich jede allgemeine Gruppe, deren Hilfsgruppe die Diedergruppe ist, durch Multiplication einer der Gruppen $\mathfrak{C}(3)$, $\mathfrak{C}(4)$, $\mathfrak{C}(6)$ mit einer einzigen Bewegung

$$\mathfrak{H}(\pi, t)$$

ergiebt, deren Axe senkrecht zu den Axen dieser Gruppen liegt.

Die für die Axen der allgemeinen cyklischen Gruppen eingeführte Bezeichnung *Hauptaxen* und *Nebenaxen* soll für die allgemeinen Diedergruppen beibehalten werden. Ferner sollen analog zu § 4 die Ebenen, welche die zu den Hauptaxen senkrechten Geraden enthalten, wieder *Hauptebenen* heissen.

2. Ich schicke zunächst noch einige Hilfssätze voraus.

Aus bekannten Gesetzen über Zusammensetzung von Bewegungen ergiebt sich leicht die Richtigkeit des folgenden Satzes:

Ist $\mathfrak{A}\left(\frac{2\pi}{n}, t_a\right)$ eine Schraubenbewegung um a als Axe, und $\mathfrak{H}(\pi, t)$ eine Bewegung, deren Axe h in einer zu a senkrechten Ebene ε liegt, so liefert das Product aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{H}$ eine Bewegung $\mathfrak{H}_1(\pi, t_1)$, deren Axe h_1 in einer ebenfalls zu a senkrechten Ebene ε_1 liegt, und zwar so, dass ε und ε_1 den Abstand $\frac{1}{2}t_a$ besitzen, und h und h_1 den Winkel $\frac{\pi}{n}$ mit einander einschliessen.

Ist daher $\frac{\tau}{n}$ die kleinste Gleitungscomponente, welche in einer der Gruppen $\mathfrak{C}(3)$, $\mathfrak{C}(4)$, $\mathfrak{C}(6)$ auftritt, so folgen die Hauptebenen im Abstand $\frac{\tau}{2n}$ auf einander.

Kommen in einer Gruppe Drehungen $\mathfrak{A}'\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ vor, so liegen in jeder Hauptebene Axen aller Richtungen.

Axen, welche in zwei benachbarten Hauptebenen liegen, können nicht gleichberechtigt sein. Dagegen muss es in zwei Hauptebenen, deren Abstand $\frac{\tau}{n}$ ist, stets gleichberechtigte Axen geben.

Diese Sätze sind wichtig, um für jede Diedergruppe die Lage der in die Hauptebenen fallenden Axen zu bestimmen. Ich habe dieselben ausführlich angeführt, um nicht bei jeder einzelnen Gruppe darauf zurückkommen zu müssen.

3. Wir betrachten zunächst die aus den Gruppen $\mathfrak{C}(3)$ *) ableitbaren allgemeinen Diedergruppen $\mathfrak{D}(3)$. Die zugehörige Hilfsgruppe enthält Umklappungsaxen von drei verschiedenen Richtungen, welche sämmtlich gleichberechtigt sind. Das analoge gilt daher auch für die allgemeinen Gruppen.

Die Translationsgruppen der Gruppen $\mathfrak{C}(3)$ haben (§ 3) die Eigenschaft, dass die primitiven Translationen, die in eine Hauptebene fallen, gleich und parallel zu zwei Seiten eines regulären Dreiecks sind, also jedenfalls nicht auf einander senkrecht stehen. Daraus folgt (§ 3, 7), dass die Axen h einer Hauptebene für jede Richtung je eine Gruppe $\mathfrak{C}_3'$ bilden; und daraus folgt weiter, dass, welches auch die Richtung dieser Geraden h ist, stets eine zu h parallele Gerade h' existiren muss. *Die allgemeinen Diedergruppen* $\mathfrak{D}(3)$ *lassen sich daher*

*) Von je zwei Gruppen des § 3, welche sich nur durch den Windungssinn der Schraubenbewegungen unterscheiden, werde ich in dieser Abhandlung immer nur eine zur Erzeugung neuer Gruppen benutzen. Dies geschieht deshalb, weil die Axenvertheilung vom Windungssinn unabhängig ist.

sämmtlich durch Multiplication der Gruppen $\mathfrak{C}(3)$ mit einer Umklappung $\mathfrak{H}'$ erzeugen.

4. Für jede der Gruppen $\mathfrak{C}(3)$ bestimmen (§ 3, 11 und 12) die Hauptaxen auf den Hauptebenen ein Netz von regulären Dreiecken. Die Umklappung $\mathfrak{H}'$ soll aber die Gruppen $\mathfrak{C}(3)$, resp. das zugehörige Dreiecksnetz in sich überführen; also *muss h' mit einer Seite oder Höhe eines der Dreiecke zusammenfallen**).

Die eben für die Lage von h' gefundene Bedingung ist zwar nothwendig, es ist aber jedesmal noch zu untersuchen, ob sie auch hinreichend ist. Dies wird nur dann der Fall sein, wenn *die Umklappung $\mathfrak{H}'$ die Gruppen $\mathfrak{C}(3)$ so in sich überführt, dass nur gleichartige Axen zur Deckung gelangen.*

Wir sahen bereits, dass die Geraden jeder Hauptebene Gruppen $\mathfrak{C}_3'$ bilden, und dass die in die Hauptebene fallenden primitiven Translationen τ_1, τ_2, τ_3 sind. Damit ist (§ 3, 7) für jede Hauptebene und jede Richtung von h die zugehörige Gruppe $\mathfrak{C}_3'$, d. h. die Vertheilung der Geraden in den Hauptebenen vollständig bestimmt.

Die Gesammtheit der Geraden h bildet für jede Richtung eine Gruppe $\mathfrak{C}_3(2)$. Solcher Untergruppen giebt es für jede Diedergruppe drei; dieselben sind gleichberechtigt. Nun enthält die Gruppe $\mathfrak{C}_3(2)$ vier Schaaren gleichberechtigter Axen, also folgt, dass *die zu den Hauptaxen senkrechten Geraden für jede allgemeine Diedergruppe in vier Schaaren gleichberechtigter zerfallen.*

Ich bemerke schliesslich, dass von den in den Hauptebenen liegenden Geraden diejenigen, welche den Dreiecksseiten parallel sind, von jetzt an stets durch h, und die den Dreieckshöhen parallelen durch k bezeichnet werden sollen.

5. Betrachten wir zunächst die Gruppen $\mathfrak{C}_1(3)$ und $\mathfrak{C}_2(3)$. Die Axen a, b, c derselben sind sämmtlich gleichartig, dürfen also sämmtlich mit einander zur Deckung gebracht werden. Die Umklappungsaxe kann daher sowohl mit einer Dreiecksseite als auch mit einer Dreieckshöhe zusammenfallen, d. h. sowohl eine Gerade h' als eine Gerade k' sein.

Im ersten Falle theilen sich die Hauptaxen a, b, c, wie im § 4, in drei Schaaren gleichberechtigter Axen; *die zugehörigen Gruppen enthalten daher im Ganzen 7 solcher Schaaren.* Wir erhalten zunächst durch Multiplication von $\mathfrak{C}_1(3)$ mit $\mathfrak{H}'$ die Gruppe**)

$$\mathfrak{D}_1(3) = \{\mathfrak{C}_1(3), \mathfrak{H}'\}.$$

*) Das Fundamentaldreieck des Netzes ist das Dreieck ABC der Fig. 11 u. 12 der ersten Abhandlung. Mit AA_1, AA_2, AA_3 fallen daher Dreieckshöhen zusammen.

**) J. 130, S. 21. Vgl. die Anmerkung zu § 3, 2 der ersten Abhandlung.

In jeder Hauptebene liegen (Fig. 24) Geraden aller drei Richtungen. Zwei benachbarte Hauptebenen haben den Abstand $\frac{1}{2}\tau$. Die Axen sind durch

$$a',\ b',\ c',\ k',\ h,\ h_1',\ h_1$$

bezeichnet worden*).

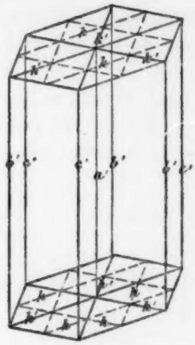


Fig. 24.

Die Multiplication der Gruppe $\mathfrak{C}_2(3)$ mit der Umklappung $\mathfrak{H}'$ ergiebt die Gruppe**)

$$\mathfrak{D}_2(3) = \{\mathfrak{C}_2(3),\ \mathfrak{H}'\}.$$

Je zwei benachbarte Hauptebenen haben (Fig. 25) den Abstand $\frac{1}{6}\tau$. In jeder Ebene liegen Axen nur einer Richtung. Die 7 Schaaren gleichberechtigter Axen sind wieder durch

$$a,\ b,\ c,\ k',\ h,\ h_1',\ h_1$$

repräsentirt worden.

6. Für die Diedergruppen, welche durch Multiplication der Gruppen $\mathfrak{C}_1(3)$ und $\mathfrak{C}_2(3)$ mit einer Umklappung $\mathfrak{K}'$ entstehen, deren Axe k' in eine Dreieckshöhe fällt, möge, um die Begriffe zu fixiren, angenommen werden, dass k' eine Axe a schneidet. Alsdann folgt sofort, dass k' nur Axen a schneidet, und dass durch die Umklappung k' die Axen a nur unter sich, die Axen b und c dagegen unter einander zur Deckung gelangen. Für die so ableitbaren Diedergruppen zerfallen daher die Hauptaxen nur in zwei Schaaren gleichberechtigter Axen; die eine Schaar wird von den Geraden k' getroffen, die andere nicht. *Die Gruppen selbst enthalten daher nur* 6 *Schaaren gleichberechtigter Geraden.*

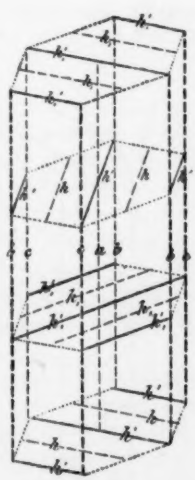


Fig. 25.

Im besonderen erhalten wir durch Multiplication der Gruppe $\mathfrak{C}_1(3)$ mit $\mathfrak{K}'$ die Gruppe***)

$$\mathfrak{D}_3(3) = \{\mathfrak{C}_1(3),\ \mathfrak{K}'\}.$$

---

*) Die Figuren sind nach demselben Princip gezeichnet worden, wie die zu § 4 gehörigen. Jede Gerade ist im Allgemeinen mit einem Buchstaben versehen. Nur bei einigen Figuren, die an sich deutlich sind, ist dies, um die Buchstaben nicht zu häufen, zum Theil unterblieben. Alle Figuren schliessen sich an die Figuren 11—14 der ersten Abhandlung an.

**) J. 132 und 133, S. 19 und 20.

***) Fehlt bei J, S. 25.

In jeder Hauptebene liegen wieder (Fig. 26) Axen aller drei Richtungen; zwei benachbarte Hauptebenen haben den Abstand $\frac{1}{2}\tau$.

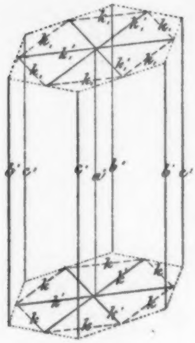


Fig. 26.

Die 6 Schaaren gleichberechtigter Axen sind repräsentirt durch

$$a',\ b',\ k',\ k,\ k_1',\ k_1.$$

Durch Multiplication von $\mathfrak{C}_2(3)$ mit $\mathfrak{K}'$ ergiebt sich die Gruppe*)

$$\mathfrak{D}_4(3) = \{\mathfrak{C}_2(3),\ \mathfrak{K}'\}.$$

Die Lage der Geraden k und k' ist (Fig. 27) analog zu ihrer Lage in Gruppe $\mathfrak{D}_2(3)$. Die 6 Schaaren gleichberechtigter Geraden sind wieder durch

$$a,\ b,\ k'\,k,\ k_1'\,k_1$$

repräsentirt worden.

7. Es ist noch übrig, die Gruppe $\mathfrak{C}_3(3)$ zur Erzeugung neuer Gruppen zu benutzen. Dieselbe enthält drei ungleichartige Schaaren von Geraden. Jede Schaar darf

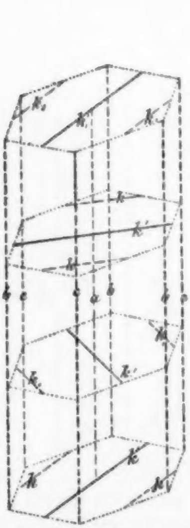


Fig. 27.

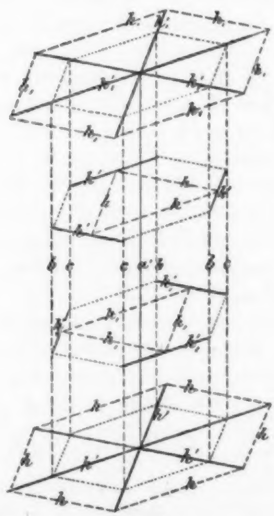


Fig. 28.

durch die Umklappung nur mit sich selbst zur Deckung kommen; daher kann die Umklappungsaxe nur mit einer Dreiecksseite zusammen-

*) Fehlt bei J, S. 23 und 24.

fallen, d. h. eine Gerade h' sein. Jede Dreiecksseite schneidet Axen a', b, c; daher giebt es eine Axe h', die eine Axe a', d. h. eine Drehungsaxe trifft.

Hieraus folgt, dass in der durch h' bestimmten Hauptebene (Fig. 28) Geraden aller drei Richtungen vorhanden sind, und das gleiche folgt nun für jede Hauptebene. Es können jedoch nur die Punkte A von mehr als einer dieser Geraden getroffen werden.

Ist ABC ein Elementardreieck des Dreiecksnetzes, so sind (§ 3, 12) die in die Hauptebene fallenden primitiven Translationen der Gruppe $\mathfrak{C}_3(3)$ $3BC$, $3CA$, $3AB$; und damit ist die Lage der Geraden h in den Hauptebenen wieder bestimmt.

Die kürzeste Entfernung zweier Hauptebenen ist $\frac{1}{6}\tau$. Die Geraden h' einer Hauptebene treffen nur den dritten Theil der Axen a'; alle Axen a' werden also erst von den Geraden dreier auf einander folgenden Hauptebenen geschnitten.

Die Gruppe entsteht durch Multiplication von $\mathfrak{C}_3(3)$ mit $\mathfrak{H}'$; also erhalten wir*)

$$\mathfrak{D}_5(3) = \{\mathfrak{C}_3(3),\ \mathfrak{H}'\}.$$

Es giebt 7 Schaaren gleichberechtigter Geraden; sie sind wieder durch

$$a',\ b,\ c,\ h',\ h,\ h_1',\ h_1$$

bezeichnet worden.

8. Die allgemeinen Diedergruppen $\mathfrak{D}(4)$, welche dem Fall $n = 4$ entsprechen, ergeben sich durch Multiplication der Gruppen $\mathfrak{C}(4)$ mit einer geeigneten Bewegung $\mathfrak{H}$. Die Gruppen $\mathfrak{C}(4)$ bestimmen auf den Hauptebenen ein quadratisches Netz, welches von den Punkten A, B, C gebildet wird (vgl. Fig. 13). AA_1 und AA_2 geben die Richtungen der Seiten dieses Netzes, während AB in eine Diagonale desselben fällt. Da die Bewegung $\mathfrak{H}$ das quadratische Netz in sich überführen muss, so folgt zunächst, dass die Axe h den Seiten oder Diagonalen desselben parallel läuft.

Die gewöhnliche Diedergruppe $n = 4$ enthält zwei Vierergruppen als Untergruppen; daher sind auch in der allgemeinen Diedergruppe $\mathfrak{D}(4)$ zwei allgemeine Vierergruppen als Untergruppen enthalten. Jede derselben ist mit den in einer Gruppe $\mathfrak{C}(4)$ enthaltenen Gruppen $\mathfrak{C}(2)$ gebildet; die eine überdies mit denjenigen Geraden h, welche den Netzseiten parallel laufen, die andere mit denen, welche den Diagonalen parallel sind.

Diese Vierergruppen sind aber durch die Wahl einer einzigen Geraden h bestimmt, und daraus folgt, dass *wir alle Diedergruppen* $\mathfrak{D}(4)$ *erhalten müssen, indem wir die allgemeinen Vierergruppen aufsuchen, welche sich mit den in den Gruppen* $\mathfrak{C}(4)$ *enthaltenen Unter-*

*) J. 131, S. 22.

gruppen $\mathfrak{C}(2)$ *bilden lassen, und überdies der Bedingung genügen, nur gleichartige Axen der Gruppe* $\mathfrak{C}(4)$ *in einander überzuführen.* Alle Vierergruppen, die sich auf diese Weise bilden lassen, führen zu allgemeinen Diedergruppen $\mathfrak{D}(4)$.

Der Grund, aus welchem ich für die allgemeinen Diedergruppen $\mathfrak{D}(4)$ diese Art der Ableitung wähle, ist der, dass sich auf diese Weise sofort ein genaues Bild von der Vertheilung der zu den Hauptaxen senkrechten Geraden h ergiebt.

9. Um die Begriffe zu fixiren, sollen von nun an die den Quadratseiten AA_1 und AA_2 (vgl. Fig. 13) parallelen Axen durch h, h', und die den Diagonalen parallelen durch k, k' bezeichnet werden. Analog mögen $\mathfrak{B}_h$ und $\mathfrak{B}_k$ die zugehörigen allgemeinen Vierergruppen sein.

Bei der gewöhnlichen Diedergruppe $n = 4$ sind nur die zu einander senkrechten Umklappungsaxen gleichberechtigt. Daraus folgt, dass bei den allgemeinen Diedergruppen $\mathfrak{D}(4)$ die Vierergruppen $\mathfrak{B}_h$ und $\mathfrak{B}_k$ nicht gleichberechtigt sein können. *Wenn wir daher für* $\mathfrak{B}_h$, *wie für* $\mathfrak{B}_k$ *die Zahl der ungleichberechtigten Geraden einer einzigen zu den Hauptaxen senkrechten Richtung bestimmen, so erhalten wir dadurch die sämmtlichen ungleichberechtigten Geraden* h, *resp.* k *der Diedergruppe.*

10. In den Gruppen $\mathfrak{C}_1(4)$, $\mathfrak{C}_2(4)$, $\mathfrak{C}_3(4)$ sind die primitiven Translationen

$$\tau, \quad \tau_1 = AA_1, \quad \tau_2 = AA_2,$$

und die Bewegungen $\mathfrak{A}^2$, $\mathfrak{B}^2$, $\mathfrak{C}$ bilden eine Gruppe $\mathfrak{C}(2)$. Dieselbe bestimmt mit den Axen h die Gruppe $\mathfrak{B}_h$, deren primitive Translationen im Sinne von § 4 durch

$$\tau_x, \tau_y, \tau_z$$

zu bezeichnen sind, dagegen mit den Axen k eine Gruppe $\mathfrak{B}_k$, für welche im Sinne des § 4

$$\tau_x, \tau_y, \tau_z, \frac{1}{2}(\tau_x + \tau_y)$$

die Translationsgruppe bestimmen.

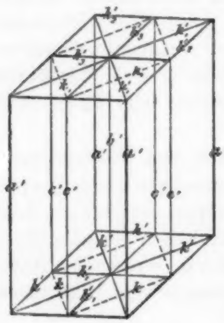


Fig. 29.

Im besondern bilden für die Gruppe $\mathfrak{C}_1(4)$ die Bewegungen $\mathfrak{A}^2$, $\mathfrak{B}^2$, $\mathfrak{C}$ eine Gruppe $\mathfrak{C}_1(2)$. Die Gruppe $\mathfrak{B}_k$ ist daher die Gruppe $\mathfrak{B}_3$, und $\mathfrak{B}_h$ kann nur eine der beiden Gruppen $\mathfrak{B}_4$ oder $\mathfrak{B}_8$ sein; denn dies sind die einzigen allgemeinen Vierergruppen, die sich mit der Gruppe $\mathfrak{C}_1(2)$ und den vorstehenden Translationen bilden lassen.

Im ersten Fall erhalten wir (Fig. 29) eine Gruppe*) durch Multi-

*) J. 116, S. 36.

plication von $\mathfrak{C}_1(4)$ mit einer Umklappung $\mathfrak{H}'$, deren Axe eine Netzseite ist. Sie ist gegeben durch die Gleichung

$$\mathfrak{D}_1(4) = \{\mathfrak{C}_1(4), \mathfrak{H}'\}.$$

Der kürzeste Abstand zweier Hauptebenen ist $\frac{1}{2}\tau$. Da alle Axen von $\mathfrak{C}_1(4)$ Drehungsaxen sind, so liegen in jeder Hauptebene Geraden aller vier Richtungen. Durch jeden Punkt A und B gehen zwei Geraden h' und zwei Geraden k'. Die Axen a' und b' sind nicht gleichberechtigt. Die Gruppe enthält daher 11 Schaaren gleichberechtigter Axen, bezeichnet durch

$$a',\ b',\ c',\ h',\ h_1',\ h_2',\ h_3',\ k',\ k,\ k_1'\ k_1.$$

Ist zweitens $\mathfrak{B}_k$ die Gruppe $\mathfrak{B}_8$, so ergiebt sich die zugehörige Gruppe durch Multiplication von $\mathfrak{C}_1(4)$ mit einer Bewegung

$$\mathfrak{H}\left(\pi,\ \frac{1}{2}\tau_1\right),$$

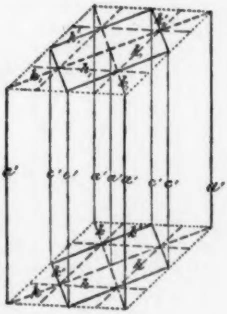


Fig. 30.

deren Axe h den Abstand zweier Netzseiten halbirt. Wir erhalten also die Gruppe*)

$$\mathfrak{D}_2(4) = \{\mathfrak{C}_1(4),\ \mathfrak{H}\}.$$

Die Gruppe $\mathfrak{B}_k$ liegt jetzt so, dass (Fig. 30) die Schraubenaxen sich in den Punkten A und B, die Drehungsaxen in C schneiden. Der Abstand zweier Hauptebenen ist wieder $\frac{1}{2}\tau$; in jeder Hauptebene liegen Axen aller vier Richtungen. Die Axen a' und b' sind diesmal auch gleichberechtigt; die Gruppe enthält daher 8 Schaaren gleichberechtigter Geraden, repräsentirt durch

$$a',\ c',\ h,\ h_1,\ k',\ k,\ k_1',\ k_1.$$

11. Für die Gruppe $\mathfrak{C}_2(4)$ bilden die Bewegungen $\mathfrak{A}^2$, $\mathfrak{B}^2$, $\mathfrak{C}$ eine Gruppe $\mathfrak{C}_2(2)$; daher ist $\mathfrak{B}_k$ die Gruppe $\mathfrak{B}_6$ und $\mathfrak{B}_h$ eine der beiden Gruppen $\mathfrak{B}_7$ oder $\mathfrak{B}_9$.

In beiden Fällen ist der Abstand zweier benachbarten Hauptebenen $\frac{1}{8}\tau$, und jede Hauptebene enthält nur Geraden einer einzigen Richtung.

Insbesondere erhalten wir im ersten Fall eine Gruppe**), abgeleitet aus $\mathfrak{C}_2(4)$ und einer Umklappung $\mathfrak{H}'$, deren Axe h' in eine Netzseite fällt. Dies giebt

$$\mathfrak{D}_3(4) = \{\mathfrak{C}_2(4),\ \mathfrak{H}'\}.$$

---

*) J. 124, S. 41.

**) J. 117 und 119, S. 32 und 33.

Von den Geraden der Gruppe $\mathfrak{B}_k$ gehen (Fig. 31) die Drehungsaxen durch A und B, die Schraubenaxen durch C. Die Axen a und b sind nicht gleichberechtigt; die Gruppe enthält daher 7 Schaaren gleichberechtigter Axen, bezeichnet durch

$$a,\ b,\ c,\ h',\ h_1',\ k',\ k.$$

Im zweiten Fall kann die Diedergruppe*) aus $\mathfrak{C}_2(4)$ und der Bewegung $\mathfrak{H}\left(\pi, \frac{1}{2}\tau_1\right)$ abgeleitet werden, deren Axe h den Abstand zweier Netzseiten halbirt. Also erhalten wir

$$\mathfrak{D}_4(4) = \left\{\mathfrak{C}_2(4),\ \mathfrak{H}\right\}.$$

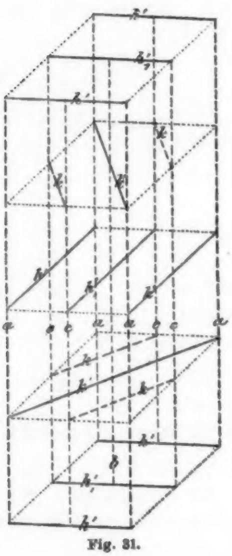


Fig. 31.

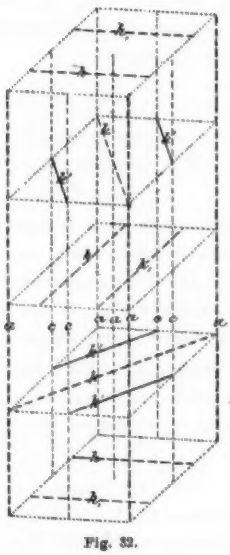


Fig. 32.

Die Gruppe $\mathfrak{B}_k$ liegt jetzt so, dass (Fig. 32) die Schraubenaxen durch A und B, die Drehungsaxen durch C gehen. Die Axen a und b sind diesmal gleichberechtigt; also enthält die Gruppe 6 Schaaren gleichberechtigter Geraden; sie sind bezeichnet durch

$$a,\ c,\ h,\ h_1,\ k',\ k.$$

12. Bei der Gruppe $\mathfrak{C}_3(4)$ bilden die Bewegungen $\mathfrak{A}^2$, $\mathfrak{B}^2$, $\mathfrak{C}$ eine Gruppe $\mathfrak{C}_1(2)$; daher ist $\mathfrak{B}_k$ wieder die Gruppe $\mathfrak{B}_3$ und $\mathfrak{B}_4$ ent-

*) J. 125 und 127, S. 38 und 39.

weder $\mathfrak{B}_4$ oder $\mathfrak{B}_8$. Der Abstand zweier benachbarten Hauptebenen ist beidemal $\frac{1}{4}\tau$.

Im ersten Fall ergiebt sich eine Gruppe durch Multiplication von $\mathfrak{C}_3(4)$ mit der Umklappung $\mathfrak{H}'$, deren Axe h' eine Netzseite ist; also*)

$$\mathfrak{D}_5(4) = \{\mathfrak{C}_3(4), \mathfrak{H}'\}.$$

In jeder Hauptebene liegen (Fig. 33)**) Axen von zwei zu einander senkrechten Richtungen. Von den Geraden der Gruppe $\mathfrak{B}_k$ gehen die Drehungsaxen durch A und B, die Schraubenaxen durch C. Da a und b nicht zusammenfallen können, enthält die Gruppe 11 Schaaren gleichberechtigter Axen; sie sind repräsentirt durch

$$a,\ b,\ c',\ h',\ h_1',\ h_2',\ h_3',\ k',\ k,\ k_1'\ k_1.$$

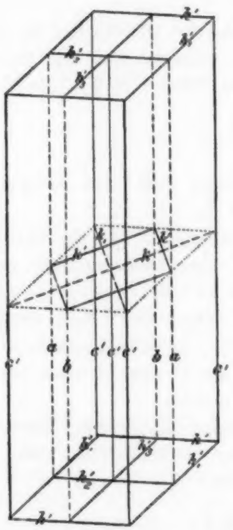


Fig. 33.

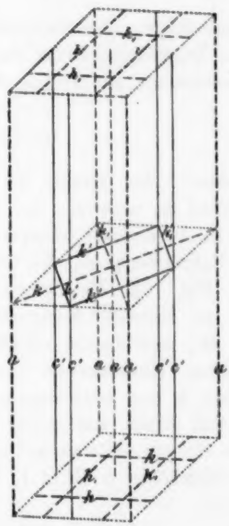


Fig. 34.

Die dem zweiten Fall entsprechende Gruppe***) entsteht durch Multiplication von $\mathfrak{C}_3(4)$ mit einer Bewegung $\mathfrak{H}\left(\pi, \frac{1}{2}\tau_1\right)$, deren Axe h den Abstand zweier Netzseiten halbirt; d. h.

$$\mathfrak{D}_6(4) = \{\mathfrak{C}_3(4), \mathfrak{H}\}.$$

Jetzt gehen die Drehungsaxen der Gruppe $\mathfrak{B}_k$ durch C (Fig. 34),

*) J. 118, S. 35.

**) Die Figur ist mit Rücksicht auf § 8 so gezeichnet, dass die Punkte C in die Ecken der Grundfläche fallen.

***) J. 126, S. 40.

und die Schraubenaxen durch A und B. Da a und b zusammenfallen können, so enthält die Gruppe 8 Schaaren gleichberechtigter Axen; sie sind repräsentirt durch

$$a,\ c',\ h,\ h_1,\ k',\ k,\ k_1',\ k_1.$$

13. Werden bei den Gruppen $\mathfrak{C}_4(4)$ und $\mathfrak{C}_1(4)$ die in die Hauptebene fallenden Translationen

$$2AA_1 = \tau_1,\quad 2AA_2 = \tau_2$$

gesetzt, so haben die primitiven Translationen dieser Gruppen die Werthe

$$\frac{1}{2}(\tau_1+\tau_2),\quad \frac{1}{2}(\tau_2+\tau),\quad \frac{1}{2}(\tau+\tau_1).$$

Ferner folgt, dass diese Grössen im Sinn des § 4 gleichzeitig die primitiven Translationen der Gruppe $\mathfrak{B}_h$ sind, während sich als primitive Translationen der Gruppe $\mathfrak{B}_k$, ebenfalls im Sinne des § 4, die Werthe

$$\tau_x,\ \tau_y,\ \tau_z,\ \frac{1}{2}(\tau_x+\tau_y+\tau_z)$$

ergeben. Die Gruppe $\mathfrak{B}_h$ ist also in jedem Fall eine Gruppe $\mathfrak{B}_2$, während $\mathfrak{B}_k$ entweder die Gruppe $\mathfrak{B}_1$ oder $\mathfrak{B}_5$ ist.

Im besonderen entsprechen bei der Gruppe $\mathfrak{C}_4(4)$ die Geraden c den Schraubenaxen, die Geraden a' und b den Drehungsaxen von $\mathfrak{B}_2$ (vgl. Fig. 16). Es können sich daher nur in den Punkten A oder B zwei zu einander senkrechte Geraden h' schneiden. Nun zeigt die Fig. 16, dass beides gleichzeitig stattfindet, jedoch so, dass in den einzelnen Hauptebenen abwechselnd nur die Punkte A oder nur die Punkte B von zwei Geraden h' getroffen werden.

Um daher aus $\mathfrak{C}_4(4)$ eine Diedergruppe abzuleiten, haben wir diese Gruppe mit einer Umklappung $\mathfrak{H}'$ zu multipliciren, deren Axe eine Netzseite, z. B. AA_1 ist; so ergiebt sich die Gruppe*)

$$\mathfrak{D}_7(4) = \{\mathfrak{C}_4(4),\ \mathfrak{H}'\}.$$

Der Abstand zweier benachbarten Hauptebenen (Fig. 35 und 36)**) ist $\frac{1}{4}\tau$. Da die Gruppe $\mathfrak{C}_4(4)$ die Drehung $\mathfrak{A}'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ enthält, so liegen in jeder Hauptebene Geraden aller vier Richtungen. Im besonderen folgt, dass durch A vier Drehungsaxen $h',\ k'$ gehen. Die Gruppe $\mathfrak{B}_k$ enthält also drei sich schneidende Geraden und ist demnach die Gruppe $\mathfrak{B}_1$.

*) J. 120, S. 37.

**) Von Fig. 36 haben wir später in § 8 Anwendung zu machen. Die Grundfläche dieser Figur ist ein Quadrat mit der Seite $2AB$.

Aus der Gruppe $\mathfrak{C}_4(4)$ entsteht daher nur *eine* Diedergruppe. Sie enthält 10 Schaaren gleichberechtigter Geraden, welche durch

$$a',\ b,\ c,\ h',\ h,\ h_1',\ h_1,\ k',\ k,\ k_1'$$

bezeichnet worden sind.

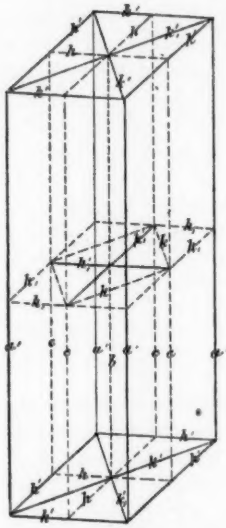


Fig. 35.

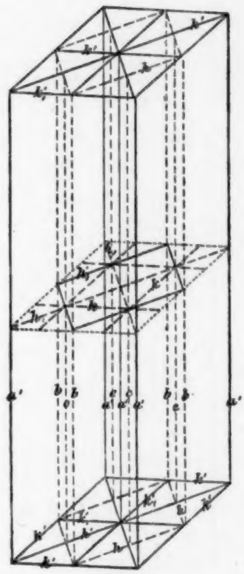


Fig. 36.

14. Bei der Gruppe $\mathfrak{C}_5(4)$ liefern die Geraden c' die Drehungsaxen, die Geraden a und b hingegen die Schraubenaxen von $\mathfrak{B}_2$. Es schneiden sich daher nur in den Punkten C zwei zu einander senkrechte Geraden h'. Wir gelangen demnach zu einer Diedergruppe nur dadurch, dass wir die Gruppe $\mathfrak{C}_5(4)$ mit einer Umklappung $\mathfrak{H}'$ multipliciren, deren Axe eine Netzseite ist; d. h. es ist*)

$$\mathfrak{D}_8(4) = \{\mathfrak{C}_5(4),\ \mathfrak{H}'\}.$$

Die Gruppe $\mathfrak{B}_k$ ist die Gruppe $\mathfrak{B}_5$. Die Gruppe $\mathfrak{B}_1$ enthält nämlich drei zu einander senkrechte Drehungsaxen. Da aber $\mathfrak{A}^2$ und $\mathfrak{B}^2$ keine reinen Umklappungen sind, so könnten nur die Geraden c' von den Drehungsaxen der Gruppe $\mathfrak{B}_1$ geschnitten werden. Dies ist aber nicht möglich, weil dadurch die ungleichartigen Axen a und b zur Deckung gelangen würden.

*) J. 121, S. 34.

Der Abstand zweier benachbarten Hauptebenen (Fig. 37 und 38)*) ist diesmal $\frac{1}{8}\tau$. In jeder Hauptebene liegen nur Geraden von zwei zu einander senkrechten Richtungen. Dieselben gehören abwechselnd den Gruppen $\mathfrak{B}_2$ und $\mathfrak{B}_5$ an.

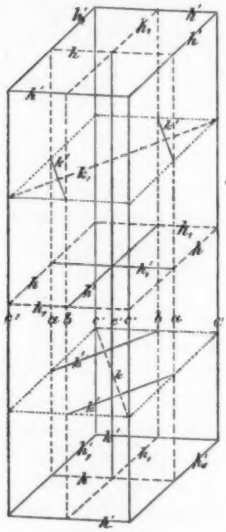


Fig. 37.

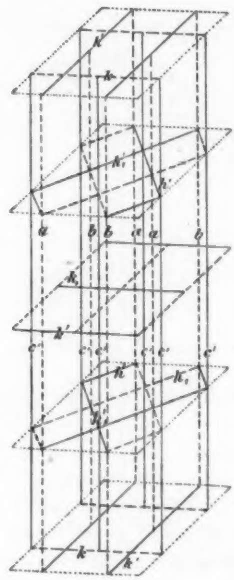


Fig. 38.

Die Gruppe enthält im Ganzen 10 Schaaren gleichberechtigter Geraden, bezeichnet durch

$$a,\ b,\ c',\ h',\ h_1',\ h,\ h_1,\ k',\ k,\ k_1.$$

15. Die allgemeinen Diedergruppen $\mathfrak{D}(6)$ ergeben sich mit Hilfe der cyklischen Gruppen $\mathfrak{C}(6)$. Die gewöhnliche Diedergruppe $n = 6$ besitzt Umklappungsaxen von sechs verschiedenen Richtungen; das gleiche gilt daher auch von den allgemeinen Gruppen.

Ebenso wie für die Gruppen $\mathfrak{D}(3)$ beweist man, dass für jede dieser sechs Richtungen eine Umklappungsaxe h' existirt; *alle Gruppen* $\mathfrak{D}(6)$ *lassen sich daher durch Multiplication von Gruppen* $\mathfrak{C}(6)$ *mit einer einzigen Umklappung* $\mathfrak{H}'$ *erzeugen.*

Bei den Gruppen $\mathfrak{C}(6)$ sind alle Hauptaxen a gleichberechtigt. Die Punkte A bestimmen (vgl. Fig. 14) ein Netz von regulären

*) Vgl. die Anmerkungen zu Fig. 33 und 36.

Sechsecken, resp. Dreiecken. Die Gerade h' kann daher nur mit den Seiten oder den Höhen dieser Dreiecke zusammenfallen.

Um die Begriffe zu fixiren, werden wir die den Netzseiten parallelen Geraden durch h, die andern durch k bezeichnen, und überdies stets annehmen, dass die Umklappungsaxe in eine Netzseite fällt, also eine Gerade h' ist. Dies ist erlaubt, da, wie oben gezeigt, für jede der abzuleitenden Gruppen sowohl Geraden h' wie k' existiren.

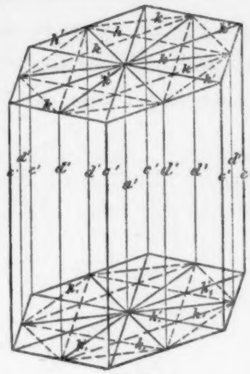


Fig. 39.

Die Lage der Axen h und k in jeder Hauptebene ist durch die primitiven Translationen τ_1, τ_2, τ_3 dieser Ebenen wieder bestimmt.

16. Zunächst ergiebt sich durch Multiplication von $\mathfrak{C}_1$ (6) mit $\mathfrak{H}'$ die Gruppe*)

$$\mathfrak{D}_1(6) = \{\mathfrak{C}_1(6),\ \mathfrak{H}'\}.$$

Hier liegen (Fig. 39) in jeder Hauptebene Axen aller sechs Richtungen. Je zwei benachbarte Hauptebenen haben den Abstand $\frac{1}{2}\tau$.

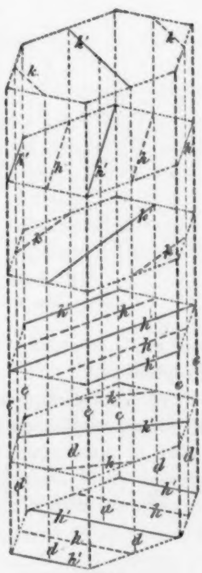


Fig. 40.

Die in einer Hauptebene liegenden Geraden zerfallen in 4 Classen gleichberechtigter. Die Gruppe selbst enthält daher im Ganzen 11 solcher Schaaren; sie sind durch

$$a',\ c',\ d',\ h',\ h,\ h_1',\ h_1,\ k',\ k,\ k_1',\ k_1$$

bezeichnet worden.

17. Die Multiplication von $\mathfrak{C}_2(6)$ mit $\mathfrak{H}'$ giebt die Gruppe**)

$$\mathfrak{D}_2(6) = \{\mathfrak{C}_2(6),\ \mathfrak{H}'\}.$$

Je zwei benachbarte Hauptebenen haben (Fig. 40) den Abstand $\frac{1}{12}\tau$. In jeder Hauptebene liegen nur Geraden einer einzigen Richtung; dieselben zerfallen in je zwei Schaaren gleichberechtigter. Die Gruppe enthält daher 7 solcher Schaaren, nämlich

$$a,\ c,\ d,\ h',\ h,\ k',\ k.$$

*) J. 108, S. 53.

**) J. 109 und 113. S. 48 und 49. Die Figur enthält eine Hauptebene weniger, als sonst.

18. Ferner leiten wir aus $\mathfrak{C}_3(6)$ und $\mathfrak{H}'$ die Gruppe*)

$$\mathfrak{D}_3(6) = \{\mathfrak{C}_3(6),\ \mathfrak{H}'\}$$

ab. Für sie haben je zwei benachbarte Hauptebenen (Fig. 41) den Abstand $\frac{1}{6}\tau$. Die Umklappung $\mathfrak{D}'$ bestimmt mit $\mathfrak{H}'$ eine gewöhnliche Vierergruppe; also enthält die durch h' gelegte Hauptebene Geraden

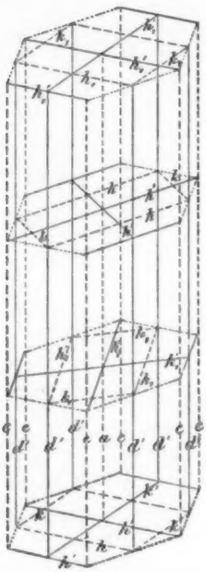


Fig. 41.

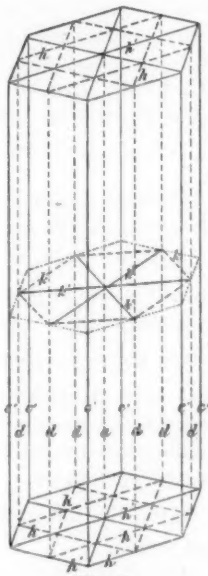


Fig. 42.

von zwei zu einander senkrechten Richtungen. Dies gilt für jede Hauptebene.

In jeder Hauptebene liegen vier Schaaren gleichberechtigter Axen. Die Gruppe selbst enthält daher 11 solcher Schaaren, bezeichnet durch

$$a,\ c,\ d',\ h',\ h,\ h_1',\ h_1,\ k',\ k,\ k_1',\ k_1.$$

19. Endlich ergiebt sich aus $\mathfrak{C}_4(6)$ und $\mathfrak{H}'$ die Gruppe**)

$$\mathfrak{D}_4(6) = \{\mathfrak{C}_4(6),\ \mathfrak{H}'\}.$$

Je zwei benachbarte Hauptebenen haben (Fig. 42) den Abstand $\frac{1}{4}\tau$. Die Existenz der Bewegung $\mathfrak{C}'$ zeigt, dass für diese Gruppe die durch

*) J. 110 und 112. S. 50 und 51.

**) J. 111. S. 52.

h' gelegte Hauptebene Axen h' von drei verschiedenen Richtungen enthält; analog enthält die benachbarte Ebene Axen k' von drei verschiedenen Richtungen.

Die in einer Hauptebene liegenden Geraden bilden zwei Schaaren gleichberechtigter Axen. Die Gruppe enthält daher 7 solcher Schaaren, bezeichnet durch

$$a,\ c',\ d,\ h,\ h',\ k,\ k'.$$

20. Setzen wir in den Gruppen $\mathfrak{D}_1(3)$, $\mathfrak{D}_2(3)$, $\mathfrak{D}_1(4)$, $\mathfrak{D}_2(4)$ und $\mathfrak{D}_1(6)$ die Translation $\tau = 0$, so ergeben sich die speciellen Gruppen $\mathfrak{D}_0(3)$, $\mathfrak{D}_0'(3)$, $\mathfrak{D}_0(4)$, $\mathfrak{D}_0'(4)$, $\mathfrak{D}_0(6)$*). Dieselben sind dadurch charakterisirt, dass bei ihnen alle Geraden h nnd k in dieselbe Ebene fallen.

§ 7.

Die Hilfsgruppe ist die Tetraedergruppe.

1. Die gewöhnliche Tetraedergruppe lässt sich durch Multiplication der Vierergruppe mit einer einzigen Drehung $\mathfrak{R}'\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ erzeugen. Ihre Axe r' liegt so, dass $\mathfrak{R}'$ die drei Axen der Vierergruppe in einander überführt.

Das analoge gilt nach § 5 für die allgemeinen Tetraedergruppen. Dieselben enthalten also allgemeine Vierergruppen als Untergruppen, und die drei verschiedenen Axenschaaren derselben müssen durch die Bewegungen der Tetraedergruppen in einander übergeführt werden können. Es lassen sich daher nur diejenigen Gruppen des § 4 zur Erzeugung von allgemeinen Tetraedergruppen benutzen, bei welchen die Axen symmetrisch nach den drei Richtungen liegen; d. h. die Gruppen $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{V}_2$, $\mathfrak{V}_4$, $\mathfrak{V}_5$, $\mathfrak{V}_9$. Gleichzeitig folgt, dass

$$\tau_x = \tau_y = \tau_z$$

wird.

2. Die zu § 4 gehörigen Figuren, welche die Vertheilung der Geraden x, y, z für die bezüglichen Vierergruppen zur Darstellung bringen, sind im Allgemeinen rechtwinklige Parallelepipeda. Wenn τ_x, τ_y, τ_z der vorstehenden Gleichung genügen, gehen sie in Würfel über. Von diesen Würfeln werden wir im Folgenden stets ausgehen müssen; ich bezeichne dieselben durch w. Sei O irgend ein Eckpunkt eines solchen Würfels w, und denken wir uns einen Würfel mit den doppelten Kantenlängen, der mit w den Eckpunkt O und die durch O gehenden Kanten gemein hat, so soll dieser Würfel mit den in ihm liegenden Geraden x, y, z durch W bezeichnet werden.

---

*) $\mathfrak{D}_0'(3)$ fehlt bei J. Die übrigen Gruppen sind J. 129, 115, 123, 107.

3. Jede allgemeine Tetraedergruppe enthält Bewegungen von der Form

$$\mathfrak{R}\left(\frac{2\pi}{3}, t_r\right),$$

sie enthält daher irgend welche der Gruppen $\mathfrak{C}(3)$ zu Untergruppen. Nun ist die Axe r von $\mathfrak{R}$ einer Körperdiagonale des Würfels W parallel; daher *sind die primitiven Translationen der Gruppen* $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_4$, $\mathfrak{B}_5$, $\mathfrak{B}_9$ *sämmtlich so gerichtet, dass sie mit* $\mathfrak{R}$ *eine Gruppe* $\mathfrak{C}_3(3)$ *bestimmen.* Dies gilt für alle vier Würfeldiagonalen.

Die Gruppe $\mathfrak{C}_3(3)$ enthält reine Drehungen. Daraus folgt, *dass wir die allgemeinen Tetraedergruppen erhalten, wenn wir die Gruppen* $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_4$, $\mathfrak{B}_5$, $\mathfrak{B}_9$ *so mit einer Drehung* $\mathfrak{R}'\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ *multipliciren, dass ihre drei Axenschaaren in einander übergehen, und nur gleichartige Axen zur Deckung gelangen.*

Dies wird, wie wir bereits hinzufügen können, sicher nur dann der Fall sein, *wenn* r' *in eine Diagonale des Würfels* w *hineinfällt.*

4. Ehe wir an die Aufstellung der einzelnen Gruppen gehen, sind noch einige Bemerkungen über die in ihnen enthaltenen Untergruppen $\mathfrak{C}_3(3)$ voranzuschicken. In jeder allgemeinen Tetraedergruppe kommen vier solche Untergruppen vor; es genügt jedoch eine derselben zu untersuchen, da sie sich alle vier in einander überführen lassen.

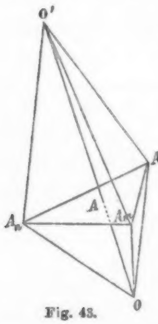


Fig. 43.

Wir hatten in § 3 die Translationsgruppe von $\mathfrak{C}_3(3)$ durch

$$\tau, \tau_l, \tau_m, \tau_n$$

definirt, und zwar bestand die Gleichung

$$\tau_l + \tau_m + \tau_n = \tau.$$

Die Translationen $\tau_l = OA_l$, $\tau_m = OA_m$, $\tau_n = OA_n$ bilden (Fig. 43) eine gerade Pyramide mit regulärer Basis, deren Höhe $OA = \frac{1}{3}\tau$ ist. Verlängern wir die Höhe OA über A hinaus bis O', so dass $OO' = \tau$ ist, und verbinden O' mit A_l, A_m, A_n, so sind $OO'A_mA_n$, $OO'A_nA_l$, $OO'A_lA_m$ primitive Tetraeder. Aus den in der ersten Abhandlung bewiesenen Sätzen (§ 1, II) folgt daher, dass auch

$$\begin{aligned} OO' &= \tau, & O'A_m &= \tau_m', & O'A_n &= \tau_n', \\ OO' &= \tau, & O'A_n &= \tau_n', & O'A_l &= \tau_l', \\ OO' &= \tau, & O'A_l &= \tau_l', & O'A_m &= \tau_m' \end{aligned}$$

als primitive Translationen betrachtet werden können. Die Translationen τ_l', τ_m', τ_n' bilden allerdings kein primitives System; dagegen sind, wie das vorstehende lehrt, τ_l, τ_m, τ_n durch τ_l', τ_m', τ_n' unmittelbar bestimmt.

5. Die Axen der Untergruppen $\mathfrak{C}_3(3)$, welche im § 3 a', b, c genannt wurden, sollen von nun an durch r', p, q bezeichnet werden. Ferner seien r_1', r_2', r_3' die Axen, welche aus r' durch Umklappung um die x-, resp. y- und z-Axe hervorgehen.*) Die analoge Bedeutung mögen p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3 haben. Diese Axen entsprechen gleichzeitig den andern drei Untergruppen $\mathfrak{C}_3(3)$, welche noch in den Tetraedergruppen enthalten sind.

Bei der gewöhnlichen Tetraedergruppe sind einerseits die vier Würfeldiagonalen, andrerseits die drei Geraden der Vierergruppe gleichberechtigte Axen. *Um daher für eine allgemeine Tetraedergruppe $\mathfrak{T}$ die Schaaren gleichberechtigter Axen zu untersuchen, ist zu prüfen, wie viel ungleichberechtigte Geraden die Gruppe $\mathfrak{C}_3(3)$ und wie viel ungleichberechtigte Geraden derselben Richtung die in $\mathfrak{T}$ enthaltene Vierergruppe enthält.*

6. Wir betrachten im besonderen zunächst die Gruppe $\mathfrak{B}_1$. Ihre Translationen sind

$$\tau_x,\ \tau_y,\ \tau_z,\ \tau = \frac{1}{2}(\tau_x + \tau_y + \tau_z).$$

Nun sind die Projectionen von τ_x, τ_y, τ_z auf τ gleich $\frac{2}{3}\tau$; also entsprechen τ_x, τ_y, τ_z den oben eingeführten Translationen τ_l', τ_m', τ_n' und wir erhalten τ_l, τ_m, τ_n, wenn wir den Endpunkt von τ mit den Endpunkten von τ_x, τ_y, τ_z verbinden. Der Endpunkt von τ ist aber der Mittelpunkt des zur Gruppe $\mathfrak{B}_1$ gehörigen Würfels W_1, und wir sehen, dass *drei beliebige der vier halben Würfeldiagonalen zu primitiven Translationen gewählt werden können.*

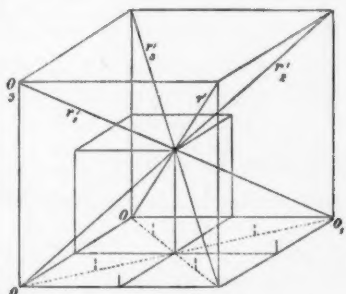


Fig. 44.

Da alle Kanten des Würfels w_1 (Fig. 44)**) gleichartige Axen repräsentiren, so kann die Drehungsaxe r' mit einer beliebigen Diagonale dieses Würfels zusammenfallen. Sei O einer der Endpunkte dieser Diagonale, so gehen durch O noch drei andere Drehungsaxen r_1', r_2', r_3'. In jeder Ecke, sowie im Mittel-

---

*) In allen Tetraedergruppen werden wir unter r' dieselbe Würfeldiagonale verstehen. Alsdann bedeuten auch r_1', r_2', r_3' in allen Gruppen Geraden der nämlichen Richtung.

**) In den Figuren dieses Paragraphen sind die in der Grundfläche von W enthaltenen Geraden sämmtlich gezeichnet, die zu ihr senkrechten Axen zum Theil nur angedeutet worden. Die punktirten Linien sind keine Axen.

punkt des Würfels W_1 schneiden sich vier Drehungsaxen r', r_1', r_2', r_3'. Im Innern des Würfels W_1 liegen übrigens noch acht Punkte, in denen sich je drei Schraubenaxen der Gruppe $\mathfrak{V}_1$ treffen; und zwar sind dies die Mittelpunkte der acht Theilwürfel, in welche W_1 zerfällt. Durch jeden dieser Punkte geht nur eine Drehungsaxe, und zwar so, dass jede Drehungsaxe zwei der acht Mittelpunkte enthält.

Wir erhalten daher eine Gruppe*)

$$\mathfrak{T}_1 = \{\mathfrak{V}_1, \mathfrak{R}'\}$$

mit 6 Schaaren gleichberechtigter Geraden, die sich durch

$$r', \; p, \; q, \; x', \; x_1', \; x$$

repräsentiren lassen.

7. Für die Gruppe $\mathfrak{V}_2$ hat (Fig. 16 und 45) der Würfel w_2 die Kanten $\frac{1}{4}\tau_x$, $\frac{1}{4}\tau_y$, $\frac{1}{4}\tau_z$. In zwei Ecken desselben schneiden sich drei Drehungsaxen. Wir denken uns den Würfel W_2 so bestimmt, dass er eine dieser Ecken von w_2 enthält; alsdann gehen durch jede Ecke von W_2 drei Drehungsaxen hindurch.

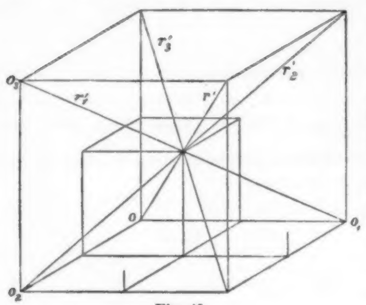


Fig. 45.

Die Translationen der Gruppe $\mathfrak{V}_2$ sind

$$\frac{1}{2}(\tau_y + \tau_z), \quad \frac{1}{2}(\tau_z + \tau_x),$$
$$\frac{1}{2}(\tau_x + \tau_y).$$

Hier haben wir direct

$$\tau_l = \frac{1}{2}(\tau_y + \tau_z),$$
$$\tau_m = \frac{1}{2}(\tau_z + \tau_x),$$
$$\tau_n = \frac{1}{2}(\tau_x + \tau_y)$$

zu setzen; denn die Summe

$$\tau_l + \tau_m + \tau_n = \tau_x + \tau_y + \tau_z = \tau$$

giebt in der That die kleinste Translation längs der Diagonale. Die primitiven Translationen lassen sich übrigens auch als die Flächendiagonalen des Würfels W_2 definiren.

Die Drehungsaxe r' kann wieder mit einer beliebigen Körperdiagonale des Würfels W_2 zusammenfallen. In jedem Eckpunkt, sowie im Mittelpunkt von W_2 schneiden sich vier solcher Drehungsaxen.

*) J. 151. S. 56.

Wir erhalten eine Gruppe*)

$$\mathfrak{T}_2 = \{\mathfrak{V}_2, \mathfrak{R}'\}$$

mit 7 Schaaren gleichberechtigter Geraden; dieselben lassen sich durch

$$r', p, q, x', x_1', x, x_1$$

repräsentiren.

8. Die Translationen der Gruppe $\mathfrak{V}_4$ sind

$$\tau_x, \tau_y, \tau_z; \quad \tau = \tau_x + \tau_y + \tau_z;$$

sie entsprechen direct den Translationen τ_l, τ_m, τ_n, τ der Gruppe $\mathfrak{C}_3(3)$.

Die Drehungsaxe r' kann mit einer beliebigen Diagonale des zu $\mathfrak{V}_4$ gehörigen Würfels w_3 (Fig. 18 und 46) zusammenfallen. In jeder Ecke, sowie im Mittelpunkt des Würfels W_3 schneiden sich wieder vier solcher Drehungsaxen.

Die Gruppe**) ist durch

$$\mathfrak{T}_3 = \{\mathfrak{V}_4, \mathfrak{R}'\}$$

darstellbar; sie enthält im Ganzen 7 Schaaren gleichberechtigter Geraden, nämlich

$$r', p, q, x', x_1', x_2', x_3'.$$

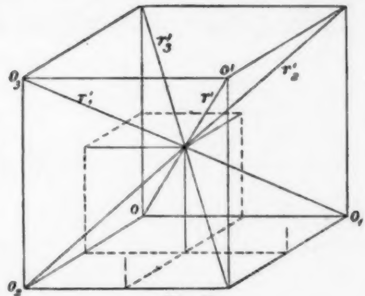


Fig. 46.

9. Die Vertheilung der Geraden r', p, q der Gruppe $\mathfrak{C}_3(3)$ ist für die drei vorstehenden Tetraedergruppen innerhalb des Würfels W dieselbe. Sind nämlich O_1, O_2, O_3 die Endpunkte der von O ausgehenden Kanten dieses Würfels, so entsprechen O_1, O_2, O_3 den Punkten A_l, A_m, A_n der Fig. 43. Dies ist für die Gruppen $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_3$ unmittelbar ersichtlich; für $\mathfrak{T}_2$ ergiebt es sich, wenn für O der O gegenüberliegende Eckpunkt O' gesetzt wird. Es gehen daher 3 Geraden p und 3 Geraden q durch das Innere von W.

Das analoge gilt für die drei andern Gruppen $\mathfrak{C}_3(3)$. Ausser den Geraden r', r_1', r_2', r_3' gehen also noch 24 andere Geraden durch das Innere von W. Man überzeugt sich leicht davon, dass dieselben vier windschiefe Sechsecke bilden, deren Ecken in den Seitenflächen liegen; jede Seitenfläche von W enthält vier solcher Eckpunkte, nämlich jede Diagonale deren zwei.

10. Die drei Gruppen $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_3$ sind dadurch ausgezeichnet, dass sie Punkte enthalten, in denen sich je vier Drehungsaxen r', r_1', r_2', r_3' schneiden. Dies ist bei den Gruppen, die sich aus $\mathfrak{V}_5$ und $\mathfrak{V}_9$ ableiten lassen, nicht mehr der Fall. Denn wenn zwei der vier Axen

*) J. 164. S. 55.
**) J. 150. S. 54.

r', r_1', r_2', r_3' durch denselben Punkt O gehen, so wird dadurch die Existenz einer gewöhnlichen Vierergruppe bewirkt, deren Mittelpunkt O ist; aber keine der Gruppen $\mathfrak{B}_5$ und $\mathfrak{B}_9$ enthält drei sich in einem Punkt schneidende Axen.

Betrachten wir im Besondern zunächst die Gruppe $\mathfrak{B}_5$. Ihre Translationen sind mit denjenigen der Gruppe $\mathfrak{B}_1$ identisch; die oben (S. 69) für die Translationen der Gruppe $\mathfrak{C}_3(3)$ gezogenen Folgerungen bleiben also hier bestehen.

Jede Diagonale des Würfels w_4 resp. W_4 kann als Drehungsaxe gewählt werden; wir wählen dazu diejenige, die auch sonst durch r' bezeichnet worden ist. Transformiren wir sie (Fig. 19, 47 und 48)*) mit den Bewegungen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, deren Axen auf den Seitenflächen des Würfels w_4 liegen, so erhalten wir die Drehungsaxen r_1', r_2', r_3'; jede

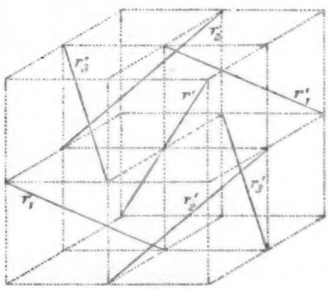


Fig. 47.

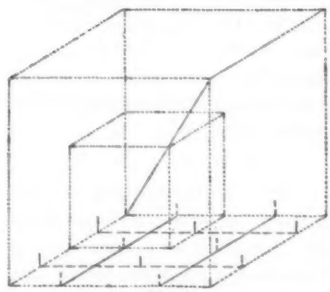


Fig. 48.

derselben liegt in einem der acht Theilwürfel, in welche W_4 zerfällt. Transformiren wir sie nochmals mit den Translationen τ_x, τ_y, τ_z, so erkennen wir, dass durch jede Ecke jedes dieser Theilwürfel eine Drehungsaxe hindurchgeht. Die Drehungsaxen, welche die 4 Ecken derselben Seitenfläche eines solchen Theilwürfels treffen, haben sämmtlich verschiedene Richtung.

Da zwei Drehungsaxen verschiedener Richtung sich nicht schneiden, so folgt, dass auch zwei verschieden gerichtete Axen p und q niemals durch denselben Punkt hindurchgehen. Die Axen irgend zweier Gruppen $\mathfrak{C}_3(3)$ liegen also sämmtlich windschief zu einander. Für jede einzelne derselben bleiben übrigens die oben (S. 68) angegebenen Eigenschaften bestehen.

Die Gruppe**) lässt sich in der Form

---

*) Fig. 47 zeigt die Lage der Drehungsaxen innerhalb W_4; die Axen x, y, z sind nicht mitgezeichnet worden. Fig. 48 und 49 dagegen enthalten nur die eine Drehungsaxe r'.

**) J. 156. S. 57.

$$\mathfrak{T}_4 = \{\mathfrak{B}_5, \mathfrak{R}'\}$$

darstellen. Sie enthält 6 Schaaren gleichberechtigter Axen, nämlich

$$r', p, q, x', x, x_1.$$

11. Die Translationen der Gruppe $\mathfrak{B}_9$ sind mit denen von $\mathfrak{B}_4$ identisch; es gelten daher für jede der Gruppen $\mathfrak{G}_3(3)$ dieselben Gesetze, wie bei der Gruppe $\mathfrak{T}_3$.

Die Axe r' kann wieder mit irgend einer Diagonale des Würfels w_5 resp. W_5 (Fig. 20 und 49) zusammenfallen; wir wählen sie, wie bei der vorstehenden Gruppe.

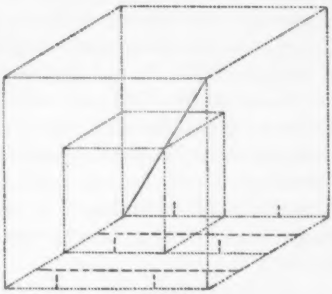


Fig. 49.

Durch Transformation von r' mittelst der Bewegungen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, deren Axen in den Seitenflächen von w_5 liegen, ergeben sich wieder die Axen r_1', r_2', r_3'.*) Sie haben dieselbe Lage wie bei der Gruppe $\mathfrak{T}_4$. Auch die andern für $\mathfrak{T}_4$ gezogenen Folgerungen über die Gruppen $\mathfrak{G}_3(3)$ bleiben hier bestehen.

Die Gruppe**) ist durch

$$\mathfrak{T}_5 = \{\mathfrak{B}_9, \mathfrak{R}'\}$$

definirt; sie enthält 5 Schaaren gleichberechtigter Geraden, nämlich

$$r', p, q, x, x_1.$$

§ 8.

Die Hilfsgruppe ist die Oktaedergruppe.

1. Die gewöhnliche Oktaedergruppe entsteht durch Multiplication der Tetraedergruppe mit einer Drehung vom Winkel 90^0 um eine Oktaederdiagonale, d. h. um eine Gerade der in der Tetraedergruppe enthaltenen Vierergruppe.

Analog erhalten wir die allgemeinen Oktaedergruppen $\mathfrak{O}$, indem wir die allgemeinen Tetraedergruppen mit einer Bewegung

$$\mathfrak{A}\left(\frac{\pi}{2}, t_a\right)$$

multipliciren, welche, wie folgt, zu wählen ist:

---

*) Vgl. Fig. 47.

**) J. 155. S. 58. Die übrigen bei J. aufgezählten Tetraedergruppen geben nichts Neues.

Erstens muss ihre Axe a einer Geraden der in der Tetraedergruppe enthaltenen Vierergruppe parallel sein, und zweitens hat sie das Axensystem der Tetraedergruppe in sich selbst überzuführen, und zwar so, dass nur gleichartige Axen zur Deckung gelangen.

2. Die elementare Oktaedergruppe enthält drei gleichberechtigte Diedergruppen als Untergruppen; das analoge gilt daher für die allgemeine Oktaedergruppe. Sei $\mathfrak{T}$ eine allgemeine Tetraedergruppe, und $\mathfrak{O}$ eine aus ihr ableitbare Oktaedergruppe. Ist nun $\mathfrak{D}(4)$ eine Diedergruppe, die in dieser Oktaedergruppe als Untergruppe enthalten ist, so besitzen $\mathfrak{D}(4)$, $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{O}$ dieselbe Translationsgruppe. Ist daher a eine Hauptaxe von $\mathfrak{D}(4)$, so müssen alle Geraden der Tetraedergruppe, welche zu a parallel sind, der Gruppe $\mathfrak{D}(4)$ als Haupt- oder Nebenaxen angehören; umgekehrt müssen aber auch sämmtliche Haupt- oder Nebenaxen der Diedergruppe sich unter den zu a parallelen Axen der Tetraedergruppe vorfinden; d. h. die zu a parallelen Axen der Tetraedergruppe sind mit den Haupt- resp. Nebenaxen der Diedergruppe $\mathfrak{D}(4)$ identisch.

Jedesmal, wenn die Axe a der Bewegung $\mathfrak{A}$ dem Vorstehenden gemäss gewählt werden kann, erhalten wir eine Oktaedergruppe. Gleichzeitig bestimmt die Lage von a diejenige Diedergruppe, welche in der Oktaedergruppe als Untergruppe enthalten ist. Die Vertheilung der neu auftretenden Axen lässt sich dann aus den zu den Gruppen $\mathfrak{D}(4)$ gehörigen Figuren leicht erkennen. Ist diese Vertheilung für eine Diedergruppe bestimmt, so ist sie es für alle drei, da diese drei Gruppen unter sich gleichberechtigt sind.

3. Die gewöhnliche Oktaedergruppe enthält drei ungleichberechtigte Geraden; sie sind parallel einer Kante, einer Flächendiagonale und einer Körperdiagonale eines Würfels. *Die ungleichberechtigten Geraden einer allgemeinen Oktaedergruppe $\mathfrak{O}$ werden daher repräsentirt von den drei Axen r', p, q der Gruppe $\mathfrak{C}_3(3)$, von den ungleichberechtigten Haupt- und Nebenaxen der in $\mathfrak{O}$ enthaltenen Diedergruppe, und von den ungleichberechtigten Geraden h, resp. k dieser Gruppe.* Von den letzteren Geraden sind diejenigen zu wählen, die nicht mit den Haupt-, resp. Nebenaxen der Diedergruppe zur Deckung gelangen. Hierauf werde ich im Folgenden noch ausführlicher eingehen.

4. Die wirkliche Aufstellung und Beschreibung der Oktaedergruppen $\mathfrak{O}$ kann wieder an die Betrachtung der im vorigen Paragraphen eingeführten Würfel W angeschlossen werden. Die Grundfläche derselben bildet jedesmal ein Quadrat, dessen Seiten resp. Diagonalen die kleinsten in die Grundfläche fallenden Translationen sind, und zwar sind es die Diagonalen nur beim Würfel W_2, resp. der Gruppe $\mathfrak{T}_2$.

Die zu den Diedergruppen $\mathfrak{D}_4(4)$ gehörigen Figuren sind eben-

falls so gezeichnet, dass ihre Grundfläche ein Quadrat ist, dessen Seiten resp. Diagonalen die kleinsten in die Hauptebenen fallenden Translationen darstellen. Nun haben wir aber gesehen, dass die Haupt- und Nebenaxen der Diedergruppe mit den auf der Grundfläche von W senkrechten Axen identisch sind; daher kann jede Oktaedergruppe nur solche Diedergruppen als Untergruppen enthalten, welche oder deren Figuren die Eigenschaft haben, dass ihre Grundfläche der Grösse nach der Grundfläche von W gleich ist, und dass die zu den Seiten der Grundfläche parallelen Geraden dieselbe Lage zu einander haben, wie die in der Grundfläche von W enthaltenen Geraden.

Im besonderen folgt daher bereits, dass die Grundflächen von W_1 und W_4 nur den Grundflächen der Figuren 36 und 38, die Grundfläche von W_2 den Grundflächen von Fig. 35 und 37 und die Grundflächen von W_3 und W_5 denjenigen der Fig. 29 bis 34 entsprechen. Ich werde bei den einzelnen Gruppen hierauf noch zurückkommen. Damit ist dann auch bestimmt, ob die Geraden h oder k der Diedergruppen die dritte Art ungleichberechtigter Geraden der Oktaedergruppen liefern.

Ist die in der Oktaedergruppe enthaltene Diedergruppe gefunden, so ist damit die Axenvertheilung der Gruppe vollständig bestimmt und kann mit Hilfe von W und der bezüglichen Diederfigur leicht hergestellt werden.

Die zu der Grundfläche des Würfels W senkrechten Axen sollen, wie in § 6, wieder a, b, c heissen.

5. Die primitiven Translationen der Gruppe $\mathfrak{T}_1$ sind

$$\tau_x,\ \tau_y,\ \tau_z,\ \frac{1}{2}(\tau_x+\tau_y+\tau_z).$$

Die Diedergruppe ist daher, wie auch oben gefunden, $\mathfrak{D}_7(4)$ oder $\mathfrak{D}_8(4)$. Nun geht die Gruppe $\mathfrak{T}_1$, resp. der Würfel W_1 (Fig. 44) in sich selbst über, wenn er Drehungen vom Winkel 90^0 um diejenigen Axen erfährt, welche durch die Ecken oder die Mitte der Grundfläche gehen, ebenso bei Schraubenbewegungen $\mathfrak{A}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}\tau_z\right)$ um die in den Seitenflächen liegenden Axen. Die Diedergruppe kann daher nur $\mathfrak{D}_7(4)$, und die zugehörige Figur, wie schon erwähnt, Fig. 36 sein; auch sieht man, dass die Gruppe $\mathfrak{D}_7(4)$ *alle* eben genannten Bewegungen enthält, welche W_1, resp. $\mathfrak{T}_1$ in sich überführen.

Aus $\mathfrak{T}_1$ ergiebt sich daher nur eine Oktaedergruppe*)

$$\mathfrak{O}_1 = \{\mathfrak{T}_1, \mathfrak{A}'\}.$$

*) J. 167, S. 61.

Die Hauptebenen (parallel den Würfelflächen) folgen in Abständen $\frac{1}{4}\tau_x$, $\frac{1}{4}\tau_y$, $\frac{1}{4}\tau_z$ auf einander.

Es folgt, dass die Gruppe $\mathfrak{O}_1$ im Ganzen 10 Schaaren gleichberechtigter Geraden enthält, nämlich

$$r',\ p,\ q,\ a',\ b,\ c,\ h',\ h,\ h_1',\ h_1.$$

6. Die primitiven Translationen der Gruppe $\mathfrak{T}_2$ stimmen wiederum nur mit denjenigen der Gruppen $\mathfrak{D}_7(4)$ und $\mathfrak{D}_8(4)$ überein.

Die Kanten des Würfels W_2, der zur Gruppe $\mathfrak{T}_2$ gehört, haben die Längen $\frac{1}{2}\tau_x$, $\frac{1}{2}\tau_y$, $\frac{1}{2}\tau_z$; nur die Diagonalen der Grundfläche liefern Translationen der Gruppe. Die Grundfläche von W_2 kann, wie schon erwähnt, nur den Hauptebenen der Fig. 35 und 37 gleich sein.

Die Bewegungen, welche den Würfel W_2 resp. die Gruppe $\mathfrak{T}_2$ in sich überführen, sind

1) Die Drehungen $\mathfrak{A}'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ um die Axen, welche durch die Ecken und die Mitte der Grundfläche gehen,

2) Schraubenbewegungen $\mathfrak{A}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}\tau_z\right)$ um dieselben Axen, und

3) Schraubenbewegungen $\mathfrak{A}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{4}\tau_z\right)$ um die in den Seitenflächen liegenden Axen.

Im ersten Falle erhalten wir die Oktaedergruppe*)

$$\mathfrak{O}_2 = \{\mathfrak{T}_2, \mathfrak{A}'\}.$$

Die in ihr enthaltene Diedergruppe ist die Gruppe $\mathfrak{D}_7(4)$. In der That entsprechen die in der Grundfläche von W_2 liegenden Geraden den Geraden h der Grundfläche von Fig. 35. Die in den Seitenflächen von W_2 liegenden Axen sind die Nebenaxen der Diedergruppe.

Die Hauptebenen folgen in Abständen $\frac{1}{4}\tau_x$, $\frac{1}{4}\tau_y$, $\frac{1}{4}\tau_z$ auf einander; jede derselben enthält Geraden aller vier Richtungen.

Die Gruppe enthält 9 Schaaren gleichberechtigter Axen, die sich durch

$$r',\ p,\ q,\ a',\ b,\ c,\ k',\ k,\ k_1'$$

repräsentiren lassen.

7. Da die vorstehende Gruppe auch eine Bewegung $\mathfrak{A}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}\tau_z\right)$ um die Mittelhöhe des Würfels W_2 enthält, so ergiebt sich eine neue Gruppe**) nur durch Multiplication von $\mathfrak{T}_2$ mit der Bewegung

$$\mathfrak{A}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{4}\tau_z\right)$$

*) J. 168, S. 60.
**) J. 172. S. 63.

um die Axe einer Seitenfläche von W_2; also

$$\mathfrak{O}_3 = \{\mathfrak{T}_2, \mathfrak{A}\}.$$

Diese Gruppe hat die Gruppe $\mathfrak{D}_8(4)$ zur Untergruppe. Die Grundfläche von W_2 entspricht der Grundfläche von Fig. 37; aber jetzt sind die in den Seitenflächen des Würfels W_2 liegenden Axen die Hauptaxen der Diedergruppe, während die Nebenaxen durch die Ecken und die Mitte der Grundfläche gehen.

Die Hauptebenen folgen in Abständen $\frac{1}{8}\tau_x$, $\frac{1}{8}\tau_y$, $\frac{1}{8}\tau_z$ auf einander, jede enthält Axen von nur zwei Richtungen.

Die Gruppe enthält 9 Schaaren gleichberechtigter Axen; sie lassen sich durch

$$r', p, q, a', b, c, k', k, k_1$$

charakterisiren.

8. Die Translationen der Gruppe $\mathfrak{T}_3$ sind τ_x, τ_y, τ_z. Der zu ihr gehörige Würfel W_3 (Fig. 46) kann durch Drehungen $\mathfrak{A}'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ um die Kanten oder die Mittelhöhe und durch Schraubenbewegungen $\mathfrak{A}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}\tau_z\right)$ um die in den Seitenflächen liegenden Axen mit sich zur Deckung gebracht werden.

Im ersten Fall erhalten wir die Gruppe*)

$$\mathfrak{O}_4 = \{\mathfrak{T}_3, \mathfrak{A}'\}.$$

Ihre diedrische Untergruppe kann zunächst noch $\mathfrak{D}_1(4)$ oder $\mathfrak{D}_2(4)$ sein; die Axen der Grundfläche von W_3 stimmen aber nur mit den bezüglichen Axen h der Grundfläche der zu $\mathfrak{D}_1(4)$ gehörigen Fig. 29 überein. Die Kanten und die Mittelhöhe des Würfels W_3 geben die Hauptaxen, während die Nebenaxen in die Seitenflächen fallen.

Die Hauptebenen folgen in Abständen $\frac{1}{2}\tau_x$, $\frac{1}{2}\tau_y$, $\frac{1}{2}\tau_z$ auf einander, jede enthält Axen aller vier Richtungen.

Die Gruppe enthält 10 Schaaren gleichberechtigter Geraden, die sich durch

$$r', p, q, a', b', c', k', k, k_1', k_1$$

kennzeichnen lassen.

9. Die zweite aus $\mathfrak{T}_3$ ableitbare Gruppe**) kann durch

$$\mathfrak{O}_5 = \{\mathfrak{T}_3, \mathfrak{A}\}$$

dargestellt werden. Die zugehörige Diedergruppe kann zunächst $\mathfrak{D}_5(4)$ oder $\mathfrak{D}_6(4)$ sein; allein nur die Grundfläche von $\mathfrak{D}_5(4)$, (Fig. 33) stimmt

*) J. 166. S. 59.
**) J. 169. S. 64.

mit der Grundfläche von W_3 überein. Die Hauptaxen der Diedergruppe fallen jetzt in die Seitenflächen des Würfels, während Kanten und Mittelhöhe die Nebenaxen liefern.

Die Hauptebenen folgen in Abständen $\frac{1}{4}\tau_x$, $\frac{1}{4}\tau_y$, $\frac{1}{4}\tau_z$ auf einander; jede enthält Geraden von nur zwei Richtungen.

Die Gruppe zerfällt in 9 Schaaren gleichberechtigter Geraden, nämlich

$$r',\ p,\ q,\ a,\ b,\ c',\ k',\ k,\ k_1.$$

10. Um aus den Gruppen $\mathfrak{T}_4$ und $\mathfrak{T}_5$ Oktaedergruppen abzuleiten, werde ich den umgekehrten Weg, wie bisher einschlagen. Es soll nämlich zuerst die Diedergruppe bestimmt werden, welche in der bezüglichen Oktaedergruppe als Untergruppe vorkommen kann; dadurch ist dann auch die eventuelle Oktaedergruppe selbst bestimmt.

Die Translationen der Gruppe $\mathfrak{T}_4$ zeigen, dass die fragliche Diedergruppe nur die Gruppe $\mathfrak{D}_4(4)$ oder $\mathfrak{D}_8(4)$ sein kann. In der Grundfläche des zu $\mathfrak{T}_4$ gehörigen Würfels W_4 (Fig. 48) sind die zu einander senkrechten Axen ungleichartig; dies ist (Fig. 38) nur bei der Gruppe $\mathfrak{D}_8(4)$ der Fall, also ist sie die Diedergruppe. Ferner lehren Fig. 38 und 48 dass die zur Grundfläche von W_4 senkrechten Drehungsaxen die Nebenaxen der Diedergruppe liefern, und die zur Grundfläche von W_4 senkrechten Schraubenaxen die Hauptaxen.

Die aus $\mathfrak{T}_4$ ableitbare Oktaedergruppe lässt sich also durch Multiplication von $\mathfrak{T}_4$ mit einer Bewegung $\mathfrak{A}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{4}\tau_z\right)$ erzeugen, deren Axe a in eine auf der Grundfläche von W_4 senkrechte Schraubenaxe fällt. Die Gruppe enthält überdies die Bewegungen $\mathfrak{B}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\tau_z\right)$ um andere dieser Schraubenaxen.*) In der That findet sich auch sonst, dass diese Bewegungen die einzigen sind, die den Würfel W_4 in sich überführen.

Wir erhalten demgemäss die Gruppe**)

$$\mathfrak{O}_6 = \{\mathfrak{T}_4, \mathfrak{A}\}.$$

Die Hauptebenen folgen in Abständen $\frac{1}{8}\tau_x$, $\frac{1}{8}\tau_y$, $\frac{1}{8}\tau_z$ auf einander; in jeder derselben liegen Geraden von nur zwei Richtungen.

Die Gruppe enthält im Ganzen 10 Schaaren gleichberechtigter Geraden, darstellbar durch

$$r',\ p,\ q,\ a,\ b,\ c',\ h',\ h,\ h_1',\ h_1.$$

11. Die Translationen der Gruppe $\mathfrak{T}_5$ sind τ_x, τ_y, τ_z, ausserdem enthält dieselbe keine einzige reine Drehungsaxe. Die zugehörige

*) Die Vertheilung der Axen a und b ist aus Fig. 38 zu ersehen.

**) Fehlt bei J; S. 62.

Diedergruppe kann daher nur die Gruppe $\mathfrak{D}_3(4)$ oder $\mathfrak{D}_4(4)$ sein. Nun enthält die Grundfläche des zu $\mathfrak{T}_5$ gehörigen Würfels W_5 (Fig. 49) nur Schraubenaxen; die Diedergruppe ist daher $\mathfrak{D}_4(4)$. Wir erhalten daher eine Oktaedergruppe, indem wir $\mathfrak{T}_5$ mit einer Bewegung $\mathfrak{A}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{4}\tau_z\right)$ multipliciren, deren Axe eine zur Grundfläche von W senkrechte Gerade von $\mathfrak{T}_5$ ist. Es ergiebt sich somit als letzte Gruppe*)

$$\mathfrak{O}_7 = \{\mathfrak{T}_5, \mathfrak{A}\}.$$

Die Bewegungen $\mathfrak{A}$ sind in der That die einzigen, welche den Würfel W_5 in sich überführen. Welche Axen von $\mathfrak{T}_5$ als Hauptaxen resp. als Nebenaxen der Diedergruppe zu wählen sind, hängt von dem Richtungssinn der in W_5 liegenden Geraden r', r_1', r_2', r_3' ab. Damit hängt auch zusammen, ob der Gruppe rechts oder links gewundene Schraubenbewegungen zukommen. Die Axenvertheilung ist in beiden Fällen nur dem Sinne nach verschieden.**)

Die Hauptebenen folgen in Abständen $\frac{1}{8}\tau_x$, $\frac{1}{8}\tau_y$, $\frac{1}{8}\tau_z$ auf einander; in jeder liegen nur Axen einer einzigen Richtung.

Die Gruppe zerfällt in 7 Schaaren gleichberechtigter Geraden, die wir durch

$$r',\ p,\ q,\ a,\ c,\ k',\ k$$

bezeichnen können.

§ 9.

Zusammenhang der Bewegungsgruppen mit den regelmässigen Punktsystemen.

Die allgemeinen Bewegungsgruppen hängen, wie Herr Camille Jordan bemerkt hat,***) mit *den regulären Punktsystemen von unendlicher Ausdehnung* eng zusammen. Unter einem solchen regulären Punktsystem versteht man nämlich ein System discreter Punkte, bei welchem um jeden Punkt herum die Anordnung aller übrigen Punkte die gleiche ist. †) Derartige Systeme haben die Eigenschaft, dass sie auf unendlich viele Weisen mit sich zur Deckung gebracht werden können, und zwar kann, wie aus der Definition folgt, stets bewirkt werden, dass ein beliebiger Punkt P mit irgend einem beliebigen Punkt Q zusammenfällt. Es giebt daher unendlich viele Bewegungen, welche ein regelmässiges Punktsystem in sich selbst überführen, und alle diese Bewegungen bilden eine Gruppe.

*) J. 170 und 171. S. 65 und 66.

**) Das Nähere bei Sohncke, pg. 171.

***) a. a. O. pg. 168.

†) Sohncke, a. a. O. pg. 23 und 28. Chr. Wiener: Grundzüge der Weltordnung. Zweite Ausgabe, Bd. I, pg. 82 ff.

Umgekehrt ist ersichtlich, dass jede allgemeine Bewegungsgruppe regelmässige Punktsysteme von unendlicher Ausdehnung liefert. Ist nämlich Γ eine solche Gruppe, ist P ein *beliebiger* Punkt des Raumes, und bestimmen wir alle Lagen, in welche P in Folge der in Γ enthaltenen Bewegungen übergeht, so bildet die Gesammtheit dieser Punkte stets ein regelmässiges Punktsystem. *Alle überhaupt möglichen regelmässigen Punktsysteme können daher auf die angegebene Art aus den vorstehenden Bewegungsgruppen abgeleitet werden.*

In dieser Weise sind die sämmtlichen regelmässigen Punktsysteme von Herrn Sohncke aufgestellt worden. Eine genauere Untersuchung derselben ist in dem vielfach erwähnten Buch „Entwickelung einer Theorie der Krystallstructur" zu finden.

Göttingen, October 1886.

Berichtigung zur ersten Abhandlung, Bd. XXVIII.
Seite 328, Zeile 12 von unten: $\mathfrak{C}_3'$ statt $\mathfrak{C}_3$.

Die Flächen vierter Ordnung hinsichtlich ihrer Knotenpunkte und ihrer Gestaltung.*)

(Mit einer Figurentafel).

Von

Karl Rohn in Dresden.

Die vorliegende Arbeit besteht aus zwei Theilen, von denen sich der erste mit den Flächen 4. Ordnung mit Knotenpunkten, der zweite aber mit den gestaltlichen Verhältnissen der Flächen 4. Ordnung überhaupt beschäftigt. Der *erste Theil* knüpft an gewisse Untersuchungen von Herrn Cayley an, die sich in drei Abhandlungen: *First, second and third memoir on Quartic surfaces*, im III. Bande der *Proceedings of the London Math. Society* finden. Bei Behandlung der gleichen Frage gelangt Herr Cayley nur bei den Flächen mit 8 und 9 Knotenpunkten zur vollständigen und bei den Flächen mit 10 Knotenpunkten zur theilweisen Lösung, während hier in systematischer Weise *alle Flächen 4. Ordnung mit 8 bis 16 Knotenpunkten* aufgestellt werden. Demgemäss finden sich hier die Flächen 4. Ordnung, zu welchen Herr Kummer in den beiden Abhandlungen: *Die algebraischen Strahlensysteme, insbesondere der 1. und 2. Ordnung* in den *Abhandlungen der Berliner Academie von 1866* und: *Flächen, welche von einer Schaar von Flächen 2. Grades eingehüllt werden* in den *Monatsberichten der Berliner Academie 1872*, gelangt.

Der *zweite Theil* behandelt rein gestaltliche Betrachtungen. Es wird daselbst der Begriff der Grenzflächen eingeführt und durch sie ein gewisser Einblick in den Gestaltenreichthum gewonnen. Ferner wird für die Flächen mit einem Knotenpunkt der Zusammenhang ihrer Gestalten mit den Projectionscurven 6. Ordnung untersucht, welche man durch Wahl des Knotens zum Projectionscentrum erhält. Im Folgenden soll nun ein kurzes Referat über den Inhalt der Abhandlung gegeben werden.

*) Referat über eine von der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft zu Leipzig gekrönte Preisschrift gleichen Titels, welche im Verlag von Hirzel in Leipzig (1886) erschienen ist.

Erster Theil.

1) Diesem Theile liegt der Gedanke zu Grunde die Fläche 4. Ordnung mit einem (oder mehreren) Knotenpunkte und gewisse Schnittcurven auf derselben aus diesem Knotenpunkte zu projiciren und von dieser Projection rückwärts auf die Eigenschaften der Fläche zu schliessen. Ist $x = y = z = 0$ der Knotenpunkt, so ist die Gleichung der Fläche 4. Ordnung:

$$u_2 w^2 + 2 u_3 w + u_4 = 0,$$

wo u_2, u_3, u_4 homogene Ausdrücke vom 2., 3. und 4. Grade in $x\ y\ z$ sind.

Die Gleichung des Tangentenkegels aus dem Knotenpunkte wird dann:

$$u_2 u_4 - u_3^2 = 0;$$

sie stellt mit $w = 0$ zusammen eine Curve 6. Ordnung mit einem Berührungskegelschnitt $u_2 = 0$ dar, welche die Projection unserer Fläche 4. Ordnung repräsentirt.

2) Von Bedeutung für die weiteren Untersuchungen sind dann die Projectionen der Curven, welche erstens eine beliebige Ebene $t_0 w + t_1 = 0$, zweitens eine Fläche 2. Grades durch $x = y = z = 0$: $t_1 w + t_2 = 0$, und drittens eine Fläche 3. Ordnung mit dem Knoten $x = y = z = 0$: $t_2 w + t_3 = 0$ aus der Fläche 4. Ordnung ausschneiden. Die Projection des ebenen Schnittes ist: $u_2 t_1^2 - 2 u_3 t_0 t_1 + u_4 t_0^2 = 0$. Aus dieser Gleichung lässt sich schliessen, dass jede Curve 4. Ordnung, welche die Curve $u_2 u_4 - u_3^2 = 0$ zwölf Mal berührt, und deren 12 Berührungspunkte mit den 6 Berührungspunkten von $u_2 = 0$ auf einer Curve 3. Ordnung liegen, die Projection eines ebenen Schnittes unserer Fläche 4. Ordnung ist.

Die Gleichung der Projection der Curve 8. Ordnung, welche aus der Fläche 4. Ordnung durch jene Fläche 2. Grades ausgeschnitten wird, ist analog: $u_2 t_2^2 - 2 u_3 t_1 t_2 + u_4 t_1^2 = 0$. Aus derselben folgt, dass jede Curve 4. Ordnung, welche durch die 6 Berührungspunkte von $u_2 = 0$ hindurchgeht, die Curve $u_2 u_4 - u_3^2 = 0$ noch in 18 Punkten schneidet, in denen dieselbe von einem Büschel von Curven 6. Ordnung berührt wird; unter den Curven des Büschels giebt es *eine* mit zwei Doppelpunkten, sie ist die Projection der Schnittcurve unserer Fläche 4. Ordnung mit einer Fläche 2. Ordnung.

In ganz gleicher Weise giebt die Gleichung

$$u_3 t_2^2 - 2 u_4 t_1 t_2 + u_5 t_1^2 = 0$$

Anlass zu folgendem Resultate. Legt man durch die 6 Berührungspunkte von $u_2 = 0$ eine beliebige Curve 5. Ordnung, welche $u_2 = 0$ noch in 4 und $u_2 u_4 - u_3^2 = 0$ noch in 24 Punkten schneidet, so giebt

es noch 6-fach unendlich viele Curven 8. Ordnung, welche die Curve 6. Ordnung in diesen 24 Punkten berühren. Unter den Curven 8. Ordnung giebt es noch doppelt unendlich viele, welche die 4 weiteren Schnittpunkte der Curve 5. Ordnung mit $u_2 = 0$ passiren, und unter diesen noch einfach unendlich viele Curven 8. Ordnung, welche sechs Doppelpunkte besitzen; die letzteren Curven sind Projectionen von Schnittcurven unserer Fläche 4. Ordnung mit Flächen 3. Ordnung, die in $x = y = z = 0$ einen Knoten haben.

3) Als specieller Fall des ersten der hier angeführten Sätze ist zu erwähnen: Besitzt die Curve $u_2 u_4 - u_3^2 = 0$ sechs Doppelpunkte und liegen dieselben mit den 6 Berührungspunkten von $u_2 = 0$ auf einer Curve 3. Ordnung, so liegen sie auch auf einem Kegelschnitt. Die entsprechenden 6 Knotenpunkte der zugehörigen Fläche 4. Ordnung liegen alsdann in einer Ebene und zwar auf einem Kegelschnitt.

Auch ein specieller Fall des zweiten Satzes ist zu erwähnen, nämlich: Besitzt die Curve $u_2 u_4 - u_3^2 = 0$ sieben Doppelpunkte und giebt es durch diese unendlich viele Curven 3. Ordnung, welche die Curve noch zwei Mal berühren, so wird die zugehörige Fläche 4. Ordnung von den Flächen 2. Grades, die man durch den Knoten $x = y = z = 0$ und die 7 weiteren Knoten — entsprechend jenen Doppelpunkten — hindurchlegen kann, in je zwei Raumcurven 4. Ordnung erster Species geschnitten. Die 8 Knotenpunkte der Fläche 4. Ordnung bilden also den gemeinsamen Schnitt dreier Flächen zweiten Grades, wir bezeichnen sie als *acht syzygetische Punkte* oder als *syzygetisches Punktsystem.*

4) Um nun zu den verschiedenen Flächen 4. Ordnung mit 16, 15, . ., 8 Knotenpunkten zu gelangen, hat man nur nöthig die verschiedenen Curven 6. Ordnung mit einem Berührungskegelschnitt und 15, 14, . . ., 7 Doppelpunkten aufzustellen, die gegenseitige Lage ihrer Doppelpunkte zu studiren, und mit Hülfe der Sätze in Nr. 2 und Nr. 3 die Lage der Knotenpunkte der zugehörigen Flächen 4. Ordnung zu erschliessen.

Die gegenseitige Lage der Doppelpunkte einer Curve 6. Ordnung mit Berührungskegelschnitt kann bei den meisten der hier in Betracht kommenden dadurch erschlossen werden, dass dieselbe sich als Projection einer Raumcurve 6. Ordnung auf einer Fläche 2. Grades auffassen lässt. Für solche Raumcurven gilt aber der Satz: Die Schnittcurve $2n$. Ordnung einer Fläche 2. Grades mit einer Fläche n. Ordnung schickt durch jeden Raumpunkt $n(n-1)$ Doppelsecanten; dieselben bilden den Durchschnitt eines Kegels $(n-1)$. Ordnung und eines Kegels n. Ordnung, welcher durch die $2n$ Schnittpunkte der Polarebene jenes Raumpunktes, in Bezug auf die Fläche 2. Grades, mit der Curve $2n$. Ordnung hindurchgeht.

5) Beginnen wir mit den *Flächen 4. Ordnung mit 16 Knotenpunkten,* welche sich als Curven 6. Ordnung mit 15 Doppelpunkten, d. h. als

6 Tangenten $t_1, t_2, \ldots, t_6$ eines Kegelschnittes projiciren. Fassen wir diese 6 Tangenten als Projectionen von 6 Erzeugenden einer Fläche 2. Grades auf, so sind folgende zwei Möglichkeiten von Belang. Entweder wir haben es mit 3 Erzeugenden der einen Schaar, etwa t_1, t_2, t_3 entsprechend, und mit dreien der andern Schaar, etwa t_4, t_5, t_6 entsprechend, zu thun; alsdann liegen die 6 Punkte t_1t_2, t_1t_3, t_2t_3, t_4t_5, t_4t_6, t_5t_6 auf einem Kegelschnitte und also auch die zugehörigen Knoten unserer Fläche 4. Ordnung; dieser Fall tritt 10 Mal ein. Oder wir haben es mit 4 Erzeugenden der einen Schaar (t_1, t_2, t_3, t_4) und 2 Erzeugenden der andern (t_5, t_6) zu thun, welche zusammen mit einer beliebigen doppelt gezählten Erzeugenden der letzteren Schaar (deren Projection t sei) einen vollständigen Durchschnitt bilden. Es giebt demnach eine Curve 3. Ordnung durch die Punkte t_1t_2, t_1t_3, t_1t_4, t_2t_3, t_2t_4, t_3t_4, t_5t_6, welche t_5 und t_6 in ihren Schnittpunkten mit t tangirt; die entsprechenden 7 Knoten unserer Fläche 4. Ordnung bilden also mit dem Knoten, von dem aus die Fläche projicirt wurde, ein syzygetisches System; dieser Fall tritt 15 Mal ein.

Die Fläche 4. Ordnung mit 16 Knoten hat hiernach die Eigenschaft, dass ihre Knoten 16 Mal zu 6 in 16 Ebenen liegen, und dass sie 30 Mal zu 8 ein syzygetisches System bilden; der Tangentenkegel 6. Ordnung aus jedem Knoten zerfällt in 6 Ebenen.

6) Nachdem bei der Fläche mit 16 Knoten kurz die Schlussweise angegeben wurde, welche die Gruppirung der Knotenpunkte erkennen lässt, sollen für die weiteren Flächen nur die Resultate angegeben werden, und zwar wenden wir uns zuerst den *Flächen mit 8 Knoten* zu und steigen dann zu Flächen mit mehr Knoten auf.

Die Curven 6. Ordnung mit Berührungskegelschnitt und 7 Doppelpunkten zerfallen in 2 verschiedene Arten, je nachdem es durch die 7 Doppelpunkte unendlich viele Curven 3. Ordnung giebt, welche jene Curve noch zwei Mal berühren oder nicht. Im ersteren Falle bilden die 8 Knoten der zugehörigen Fläche 4. Ordnung ein syzygetisches System, im letzteren Falle ist dieses nicht der Fall. Die allgemeine Gleichung der ersteren Fläche, welche wir als *syzygetische Fläche* bezeichnen, ist:

$$\alpha \mathsf{A}^2 + \beta \mathsf{B}^2 + \gamma \Gamma^2 + 2\varkappa \mathsf{B}\Gamma + 2\lambda \Gamma \mathsf{A} + 2\mu \mathsf{AB} = 0.$$

wo $\mathsf{A} = 0$, $\mathsf{B} = 0$, $\Gamma = 0$ drei Flächen 2. Grades bedeuten. Bei der letzteren — *asyzygetischen — Fläche* können 7 Knoten beliebig angenommen werden, *der achte Knoten muss dann auf einer gewissen Fläche 6. Ordnung liegen*, die sich auf folgende Weise bestimmt. Ist $\Sigma = 0$ eine Fläche 4. Ordnung mit 7 Knoten und sind $\mathsf{A} = 0$, $\mathsf{B} = 0$, $\Gamma = 0$ drei Flächen 2. Grades durch dieselben, so ist die allgemeinste Fläche 4. Ordnung mit 7 Knoten:

$$\alpha \mathsf{A}^2 + \beta \mathsf{B}^2 + \gamma \Gamma^2 + 2\varkappa \mathsf{B}\Gamma + 2\lambda \Gamma \mathsf{A} + 2\mu \mathsf{AB} + 2\varrho \Sigma = 0.$$

Soll eine derartige Fläche noch einen achten Knoten besitzen, ohne irreducibel zu werden, so muss derselbe auf der Fläche*) 6. Ordnung

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 & \Sigma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 & \Sigma_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 & \Sigma_3 \\ A_4 & B_4 & \Gamma_4 & \Sigma_4 \end{vmatrix} = 0$$

liegen.

7) Bei den *Flächen mit 9 Knoten* sind ebenfalls zwei Arten zu unterscheiden. Eine *syzygetische Fläche* mit 8 Knoten kann noch einen *neunten* Knoten besitzen, derselbe muss auf der Jacobi'schen Curve:

$$\begin{Vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ \Gamma_1 & \Gamma_2 & \Gamma_3 & \Gamma_4 \end{Vmatrix} = 0$$

liegen.

Die Gleichung der syzygetischen Fläche mit 9 Knoten kann demnach in die Form:

$$A^2 - \varrho K \,.\, B = 0$$

gebracht werden, wo $A = 0$ ein Fläche 2. Grades durch alle 9 Knoten, $B = 0$ eine solche durch das syzygetische Knotensystem und $K = 0$ einen Kegel durch eben dieses Knotensystem, dessen Scheitel im neunten Knoten liegt, bedeutet. Der Tangentenkegel aus dem neunten Knoten an die Fläche 4. Ordnung zerfällt in einen Kegel 2. Ordnung und einen Kegel 4. Ordnung.

Ist $T = 0$ eine asyzygetische Fläche mit 8 Knoten und sind $A = 0$, $B = 0$ zwei Flächen 2. Grades durch dieselben, so ist die allgemeinste derartige Fläche:

$$\alpha A^2 + \beta B^2 + 2\varkappa AB + 2\varrho T = 0.$$

Der neunte Knoten einer solchen asyzygetischen Fläche muss in Folge dessen auf der Curve 18. Ordnung**):

$$\begin{Vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ T_1 & T_2 & T_3 & T_4 \end{Vmatrix} = 0$$

liegen.

8) Um die *Flächen mit 10 Knotenpunkten* zu gewinnen, muss man die Curven 6. Ordnung mit Berührungskegelschnitt und 9 Doppelpunkten studiren, und zwar sowohl die reduciblen als die irreduciblen.

---

*) Die Eigenschaften dieser Fläche sind in der Preisschrift ausführlich dargelegt.

**) Verschiedene Eigenschaften dieser Curve finden sich in der Originalabhandlung.

Die irreduciblen Curven können erstens ohne weitere besondere Eigenschaften sein; zweitens kann es durch sieben von ihren Doppelpunkten unendlich viele, zwei Mal berührende Curven 3. Ordnung geben; drittens können 6 Doppelpunkte auf einem Kegelschnitt liegen. Die erstgenannte Curve liefert die *asyzygetische Fläche mit 10 Knoten;* die Tangentenkegel aus allen 10 Knoten sind irreducibel. Die folgende Curve führt zu der *syzygetischen Fläche mit 10 Knoten;* acht Knoten bilden ein syzygetisches System, ihre Tangentenkegel sind irreducibel, die Kegel aus den beiden übrigen Knoten zerfallen in je einen Kegel zweiter und einen vierter Ordnung. Dem dritten Fall entsprechend erhält man *Flächen mit 10 Knoten, von denen sechs in einer Ebene liegen;* bei dieser Fläche zerfällt der Tangentenkegel für die 6 Knoten in der Ebene in diese Ebene und einen Kegel 5. Ordnung.

Von den reduciblen Curven erwähne ich nur diejenigen, welche nicht zu den bereits genannten Flächen zurückführen. Zerfällt die Curve 6. Ordnung in zwei Curven 3. Ordnung, so wird die zugehörige Fläche *ein Symmetroid; die Tangentenkegel aus allen 10 Knoten zerfallen in zwei Kegel 3. Ordnung**). Eine solche Fläche erhält man durch Nullsetzen einer symmetrischen vierreihigen Determinante, deren Glieder lineare Ausdrücke in den Variablen sind. Zerfällt die Curve 6. Ordnung in eine Curve 4. Ordnung und zwei Geraden, so liegen von den 10 Knoten der zugehörigen Fläche 4. Ordnung *zwei Mal sechs auf zwei Ebenen*, welchen 2 Knoten gemeinsam sind. Für diese beiden Knoten zerfallen die Tangentenkegel in je zwei Ebenen und einen Kegel 4. Ordnung, für die übrigen in eine Ebene und einen Kegel 5. Ordnung.

9) Die asyzygetischen Flächen mit 9 gemeinsamen Knoten bilden ein Büschel; ist $\mathsf{P}=0$ eine solche Fläche, so hat das Büschel die Gleichung, $\mathsf{A}^2+2\varrho\mathsf{P}=0$, wo $\mathsf{A}=0$ eine Fläche 2. Grades durch die 9 Knoten bedeutet. In diesem Büschel giebt es noch eine Anzahl Flächen mit einem zehnten Knoten, der zehnte Knoten muss ein Punkt der Gruppe:

$$\left\|\begin{matrix}\mathsf{A}_1 & \mathsf{A}_2 & \mathsf{A}_3 & \mathsf{A}_4\\ \mathsf{P}_1 & \mathsf{P}_2 & \mathsf{P}_3 & \mathsf{P}_4\end{matrix}\right\|=0$$

sein. Dieses Gleichungssystem hat 40 Lösungen, wozu jedoch dreifach zählend die 9 Knoten des Büschels gehören. *Unter den Flächen des Büschels* $\mathsf{A}^2+2\varrho\mathsf{P}=0$ *giebt es also 13 Flächen mit einem zehnten Knotenpunkte; unter diesen 13 Flächen sind 12 asyzygetische Flächen*

*) Herr Cayley hat zuerst bewiesen, dass die Tangentenkegel aus allen 10 Knoten in zwei Kegel 3. Ordnung zerfallen, wenn dieses für *einen* Knoten der Fall ist; auch bei mir findet sich ein Beweis, der sich vor dem andern durch grosse Einfachheit auszeichnet.

und ein Symmetroid. Den Beweis erbringt man, indem man das ganze Flächenbüschel aus einem seiner 9 Knoten projicirt; es entsteht dann ein Büschel von Curven 6. Ordnung mit 8 gemeinsamen Doppelpunkten und zwei gemeinsamen Berührungsstellen. Unter den Curven des Büschels giebt es eine, welche in zwei Curven 3. Ordnung zerfällt, ihr entspricht das Symmetroid.

Die syzygetischen Flächen mit 10 Knoten lassen sich in der Form schreiben $A^2 - \varrho K_1 K_2 = 0$, wenn $K_1 = 0$, $K_2 = 0$ irgend zwei Kegel 2. Ordnung und $A = 0$ eine Fläche 2. Grades durch ihre Scheitel ist. Die Flächen mit 10 Knoten endlich, deren Knoten auf zwei Mal zu sechs auf zwei Kegelschnitten liegen, haben die Gleichung:

$$A^2 - \varrho B E_1 E_2 = 0;$$

wo $A = 0$, $B = 0$ zwei Flächen 2. Grades und $E_1 = 0$, $E_2 = 0$ zwei Ebenen sind.

10) Die Curven 6. Ordnung mit Berührungskegelschnitt und 10 Doppelpunkten sind entweder irreducibel, oder reducibel. Die irreducibeln Curven bilden noch 3 Arten, indem entweder 6 Doppelpunkte auf einem Kegelschnitte liegen, oder durch 7 Doppelpunkte unendlich viele, zwei Mal berührende Curven 3. Ordnung gehen, oder durch je 9 Doppelpunkte eine Curve 4. Ordnung geht, die im zehnten einen dreifachen Punkt hat. Es folgt dieses daraus, dass die genannten Curven stets als Projectionen von Raumcurven 6. Ordnung auf einer Fläche 2. Grades angesehen werden können.

Die erste Art von Curven liefert eine *Fläche 4. Ordnung* XI_c *mit elf Knoten*, von denen 6 auf einem Kegelschnitte liegen; der Tangentenkegel aus diesen Knoten zerfällt natürlich in eine Ebene und einen Kegel 5. Ordnung. Die zweite Art von Curven führt zu den *syzygetischen Flächen* XI_b *mit elf Knoten;* 8 Knoten bilden ein syzygetisches System, die zugehörigen Tangentenkegel sind irreducibel; die 3 weiteren Knoten liegen auf der Jacobi'schen Curve des syzygetischen Systems, ihre Tangentenkegel zerfallen also in je einen Kegel zweiter und einen vierter Ordnung. In einem Büschel von Flächen mit 10 gemeinsamen Knoten: $A^2 - \varrho K_1 K_2 = 0$ giebt es noch 12 Flächen XI_b.

Die dritte Curvenart ergiebt *Flächen von elf Knoten* XI_a, *wovon 10 gleichberechtigt sind.* Diese Flächen sind *Symmetroide* mit 11 Knoten; aus einem Knoten ist der Tangentenkegel irreducibel, aus allen andern zerfällt er in einen Kegel 3. Ordnung *mit* und einen Kegel 3. Ordnung *ohne* Doppelkante; die Doppelkanten gehen alle durch den erstgenannten Knotenpunkt. Die reducibeln Curven 6. Ordnung mit Berührungskegelschnitt und 10 Doppelpunkten führen nur zu *einer einzigen neuen Flächenclasse;* sie bildet einen speciellen Fall der Flächen:

$$A^2 - \varrho B E_1 E_2 = 0$$

und hat die Gleichungsform:

$$A^2 - \varrho K E_1 E_2 = 0,$$

wo $E_1 = 0$, $E_2 = 0$ wieder zwei Ebenen, $K = 0$ ein Kegel 2. Ordnung und $A = 0$ eine Fläche 2. Grades durch den Scheitel des Kegels bedeuten. Aus 8 Knoten zerfällt der Tangentenkegel in eine Ebene und einen Kegel 5. Ordnung, aus zweien in 2 Ebenen und einen Kegel 4. Ordnung, und aus einem in zwei Kegel von der zweiten und vierten Ordnung respective.

11) Die *Flächen mit zwölf Knoten* werden von Curven 6. Ordnung mit elf Doppelpunkten abgeleitet, die also nothwendig reducibel sein müssen und entweder in eine Curve 5. Ordnung und eine Gerade, oder in eine Curve 4. Ordnung und zwei Geraden, oder in eine Curve 4. Ordnung und einen Kegelschnitt, oder in zwei Curven 3. Ordnung, oder endlich in eine Curve 3. Ordnung, einen Kegelschnitt und eine Gerade zerfallen. Es werden hieraus vier Arten von Flächen 4. Ordnung gewonnen.

Es giebt eine *Fläche* XII_c *mit 12 Knoten. welche die Schnittpunkte der Kanten eines Tetraeders mit einer Fläche 2. Grades bilden;* sie hat die Gleichung:

$$A^2 - \varrho E_1 E_2 E_3 E_4 = 0.$$

Die Tangentenkegel aus allen 12 Knoten zerfallen in 2 Ebenen und einen Kegel 4. Ordnung.

Es giebt eine *Fläche* XII_b, *deren 12 Knoten in drei Quadrupel zerfallen; je zwei Quadrupel bilden ein syzygetisches System.* Der Tangentenkegel aus jedem Knoten zerfällt in einen Kegel 2. Ordnung und einen Kegel 4. Ordnung mit 3 Doppelkanten, welche durch die drei Knoten verlaufen, die mit jenem ein Quadrupel ausmachen. Um ein solches Knotenpunktsystem zu construiren, gehe man von 8 syzygetischen Punkten aus, theile dieselben beliebig in zwei Quadrupel, etwa D_1, D_2, D_3, D_4 und D_5, D_6, D_7, D_8, dann liegt das dritte Quadrupel auf der Jacobi'schen Curve dieser 8 Punkte. D_9 kann noch beliebig auf dieser Curve angenommen werden, dann schneiden sich in D_{10}, D_{11}, D_{12} vier Kegel, deren Scheitel in D_1, D_2, D_3, D_4 respective liegen und die durch $D_5, \ldots, D_9$ hindurchgehen.

Einen Specialfall des Symmetroids bildet die Fläche XII_a, *von ihren 12 Knoten liegen sechs auf einem Kegelschnitt*, etwa $D_1, D_2, \ldots, D_6$ *während acht ein syzygetisches System bilden*, etwa: $D_1, D_2, D_7, D_8, \ldots$ $\ldots, D_{12}$. Die Tangentenkegel aus den 6 Knoten: $D_7, D_8, \ldots, D_{12}$ zerfallen in zwei Kegel 3. Ordnung mit Doppelkanten, die alle durch D_1 und D_2 hindurchgehen. Die Tangentenkegel aus D_1 und D_2 zerfallen je in eine Ebene und einen Kegel 5. Ordnung, dessen Doppelkanten durch $D_7, \ldots, D_{12}$ verlaufen; die Kegel aus D_3, D_4, D_5, D_6 endlich zerfallen in je eine Ebene, einen Kegel zweiter und einen

dritter Ordnung. Um ein solches Knotenpunktsystem zu erhalten, wähle man irgend 8 syzygetische Punkte, lege durch zwei von ihnen eine beliebige Ebene, dann schneidet die Jacobi'sche Curve jener acht Punkte aus dieser Ebene die vier weiteren Knoten aus (und ausserdem noch 2 Punkte, die auf der Verbindungslinie jener beiden Punkte liegen).

Endlich gewinnt man noch eine *Fläche* XII$_d$, *bei welcher zwei Mal sechs Knoten auf zwei Kegelschnitten liegen*, sie ist ein specieller Fall der Fläche XI$_d$. In dem Büschel:

$$\mathsf{A}^2 - \varrho \mathsf{K} \,.\, \mathsf{E}_1 \mathsf{E}_2 = 0$$

giebt es noch 10 Flächen, welche einen zwölften Knotenpunkt besitzen. Die Tangentenkegel aus 8 Knoten zerfallen je in einen Kegel 5. Ordnung und eine Ebene; die Kegel aus zwei weiteren Knoten zerfallen je in 2 Ebenen und einen Kegel 4. Ordnung, und die Kegel aus den beiden übrigen Knoten zerfallen je in einen Kegel zweiter und einen Kegel vierter Ordnung.

12) Die Curven 6. Ordnung mit 12 Doppelpunkten zerfallen entweder in eine Curve 4. Ordnung und zwei Geraden, oder in eine Curve 3. Ordnung, einen Kegelschnitt und eine Gerade, oder in eine Curve 3. Ordnung und drei Geraden, oder endlich in drei Kegelschnitte. Aus den Eigenschaften dieser Curven, welche einen Berührungskegelschnitt besitzen müssen, erschliesst man zwei Arten von Flächen 4. Ordnung mit dreizehn Knoten. Die eine Art bildet einen Specialfall der Fläche XII$_c$; *in dem Büschel:* $\mathsf{A}^2 - \varrho \mathsf{E}_1 \mathsf{E}_2 \mathsf{E}_3 \mathsf{E}_4 = 0$ *giebt es noch acht Flächen mit einem Knoten* XIII$_a$. Die Tangentenkegel in den 12 Knoten, welche die Durchstosspunkte der Kanten eines Tetraeders mit einer Fläche 2. Grades bilden, zerfallen in je zwei Ebenen und einen Tangentenkegel 4. Ordnung; der Kegel aus dem dreizehnten Knoten zerfällt in drei Kegel 2. Grades.

Die andere Art von Flächen mit 13 Knoten XIII$_b$ *ist ein Specialfall des Symmetroids*, ihre Knoten sind folgendermassen gruppirt. Die 13 Knoten liegen zu je 6 in drei Ebenen; ein Knoten ist den drei Ebenen gemeinsam, ferner liegt auf jeder der drei Schnittgeraden der Ebenen noch je ein Knoten, so dass es in jeder Ebene noch drei weitere Knoten giebt. Der Knoten jeder Schnittgeraden bildet mit den drei Knoten der gegenüberstehenden Ebene ein Quadrupel, und je zwei Quadrupel bilden ein syzygetisches System. Der Tangentenkegel aus einem Knoten zerfällt in drei Ebenen und einen Kegel 3. Ordnung; die Kegel aus den drei Knoten auf den 3 Schnittgeraden zerfallen in je zwei Ebenen und einen Kegel 4. Ordnung mit 3 Doppelkanten, welche durch die 3 Knoten laufen, die jenen zu einem Quadrupel ergänzen. Die Tangentenkegel aus den 9 übrigen Knoten zerfallen je in eine Ebene, einen Kegel 2. Ordnung und einen Kegel 3. Ordnung

mit einer Doppelkante; dieselbe läuft stets durch den Knoten der Schnittgeraden, welche der Ebene des bezüglichen Knotens gegenübersteht.

Zur Construction eines solchen Knotensystems nehme man 4 Knoten D_1, D_2, D_3, D_4 beliebig an, dann vertheilen sich die 9 übrigen Knoten auf die Ebenen durch $D_1 D_2 D_3$, resp. durch $D_1 D_2 D_4$, resp. durch $D_1 D_3 D_4$. In der ersten Ebene wähle man drei weitere Knoten D_5, D_6, D_7, welche mit D_1, D_2, D_3 auf einem Kegelschnitt liegen; ebenso wähle man in der zweiten Ebene zwei weitere Knoten D_8 und D_9, so ist der Knoten D_{10} dieser Ebene eindeutig bestimmt, seine Construction liegt auf der Hand. Legt man nun noch durch die Punkte D_2, D_4, D_5, D_6, D_7 zwei Kegel, deren Scheitel in D_8, resp. D_9 liegen, so schneiden dieselben aus der dritten Ebene zwei Kegelschnitte aus, die ausser D_4 noch die drei Punkte D_{11}, D_{12}, D_{13} gemeinsam haben.

13) Die Curven 6. Ordnung mit 13 Doppelpunkten zerfallen entweder in zwei Geraden und zwei Kegelschnitte, oder in drei Geraden und eine Curve 3. Ordnung mit Doppelpunkt; sie führen zu derselben *Fläche 4. Ordnung mit 14 Knotenpunkten, welche ebenfalls ein Specialfall des Symmetroides ist. Die Knoten dieser Flächen liegen 6 Mal zu sechs in 6 Ebenen und bilden 7 syzygetische Systeme.* Die 6 Ebenen, welche die Knoten enthalten, bilden drei Ebenenpaare, die sich in 8 syzygetischen Knoten schneiden, ferner liegen auf der Axe jedes Ebenenpaares noch zwei Knoten. Zwei Ebenenpaare durchschneiden sich in vier Geraden, die paarweise windschief sind, und es bilden jedes Mal die vier Knoten der Axen zweier Ebenenpaare mit den vier Knoten zweier windschiefer Schnittgeraden der Ebenenpaare ein syzygetisches System.

Um das Knotenpunktsystem einer Fläche mit 14 Knoten zu construiren, gehe man von drei Ebenenpaaren aus, deren Schnittpunkte 8 Knoten 7, 8, . . ., 14 bestimmen, welche in folgender Weise vertheilt sein mögen. Das erste Ebenenpaar spalte die 8 Knoten in 7, 8, 9, 10 und 11, 12, 13, 14, das zweite in 7, 9, 12, 14 und 8, 10, 11, 13, das dritte in 7, 10, 12, 13 und 8, 9, 11, 14. Auf der Axe des ersten Ebenenpaares wählen wir zwei Knoten 1 und 2, welche mit 7, 8, 9, 10 auf einem Kegelschnitt liegen, und ebenso auf der Axe des zweiten Ebenenpaares zwei Knoten 3 und 4, welche mit 7, 9, 12, 14 auf einem Kegelschnitt liegen. Ein bestimmter Kegelschnitt durch die Punkte 7, 10, 12, 13 wird nun die dritte Axe in den Knoten 5 und 6 schneiden. Um diesen Kegelschnitt zu erhalten construire man zunächst den Kegelschnitt durch 7, 10, 12, 13, der auf der Fläche 2. Grades durch die bereits bekannten 12 Knoten liegt. Dieser Kegelschnitt theilt mit dem gesuchten die Winkel der beiden Geradenpaare $\overline{7,10}$; $\overline{12,13}$ und $\overline{7,12}$; $\overline{10,13}$ harmonisch, wodurch letzterer bestimmt ist.

14) Die Curven 6. Ordnung mit 14 Doppelpunkten zerfallen nothwendig in 4 Geraden und einen Kegelschnitt, in Folge dessen giebt es eine *einzige Flächenart mit 15 Knoten. Diese Knoten liegen 10 Mal zu sechs in 10 Ebenen und bilden 15 Mal zu acht fünfzehn syzygetische Gruppen.* Die Gruppirung der Knotenpunkte in Ebenen giebt das Schema:

1	1	1	1	2	2	2	3	3	3
2	12	11	10	9	8	7	9	8	7
3	15	14	13	15	14	13	12	11	10
4	6	5	4	6	5	4	6	5	4
5	7	7	8	10	10	11	13	13	14
6	8	9	9	11	12	12	14	15	15

Die Knoten jeder Ebene bilden zwei Tripel; durch zwei Knoten, welche verschiedenen Tripeln einer Ebene angehören, geht immer noch eine zweite singuläre Ebene. Der Tangentenkegel 2. Ordnung (nicht Tangentialkegel) aus einem Knotenpunkte geht noch durch alle Knotenpaare hindurch, die mit ersterem ein Tripel bilden; so geht z. B. der Tangentenkegel mit dem Scheitel 1 durch die Knoten: 2, 3; 12, 15; 11, 14; 10, 13; solche 8 Knoten bilden natürlich ein syzygetisches System.

Zweiter Theil.

15) In gestaltlicher Hinsicht wird man die einzelnen Theile einer Fläche in *paare* und *unpaare* Gebilde zu trennen haben; die ersteren zerfallen weiter in *ganzpaare* Gebilde — oder *paare* Gebilde schlechthin — und in *halbpaare* Gebilde, je nachdem auf denselben *nur* paare, oder paare und unpaare Curven gezogen werden können. Die *paaren* Flächentheile können die Form eines *Ovals*, eines *Ringes*, oder eines *ringförmigen* Gebildes mit *mehreren* Durchbrechungen, oder Oeffnungen haben; ebenso können die halbpaaren Flächentheile *eine* oder *mehrere* Oeffnungen aufweisen.

Sehen wir von den Flächen ab, welche einen und also noch einen zweiten unpaaren Theil und demnach eine Doppelcurve besitzen, so hat man es nur mit Flächen zu thun, die aus *paaren* und *halbpaaren* Flächenstücken bestehen. Erstere werden in *Ovale*, *einfache*, *Doppel-* und *mehrfache Ringe* unterschieden, je nachdem sie das Geschlecht 0, 1, 2, 3,...haben; letztere können ebenfalls das Geschlecht 1, 2, 3, ... besitzen.

16) Aus der Definition der Flächen 4. Ordnung folgen leicht die drei Sätze:

Erstens: In den *beiden* Räumen, in welche der ganze Raum durch

einen *halbpaaren* Flächentheil gespalten wird, giebt es *unpaare* Curvenzüge, unter anderen auch gerade Linien.

Zweitens: Durch jeden Raumpunkt giebt es entweder Geraden, welche eine ganz beliebige Ringfläche vier Mal schneiden, oder solche, welche die Oeffnung des Ringes passiren, ohne ihn zu schneiden.

Drittens: Besitzt eine Fläche 4. Ordnung zwei ringförmige Theile, so giebt es immer Geraden, welche durch die Oeffnungen der beiden Ringe hindurchgehen, ohne die Fläche zu schneiden. Ebenso giebt es durch die beiden Oeffnungen eines Doppelringes immer Geraden, die den Ring nicht treffen.

Diesen Sätzen entsprechend kann eine Fläche 4. Ordnung ohne Knotenpunkt:

a) aus zwei in einander liegenden Ovalen bestehen, dann aber kein weiteres Flächenstück mehr besitzen. Keines der Ovale kann ringförmig sein.

b) aus zwei Ringen bestehen, von denen jedoch keiner ein Doppelring ist; weitere Theile kann es nicht geben.

c) aus zwei halbpaaren Theilen vom Geschlecht 1 bestehen, dann aber kein weiteres Flächenstück mehr enthalten.

d) aus *höchstens* 12 Ovalen bestehen. Neben einem Ringe vom Geschlecht p kann eine Fläche 4. Ordnung noch höchstens $(11-p)$ Ovale aufweisen; auch ein halbpaarer Flächentheil vom Geschlecht p erlaubt höchstens noch $(11-p)$ Ovale, die jedoch nicht auf verschiedenen Seiten des halbpaaren Flächentheils liegen dürfen.

Aus den angezogenen Sätzen folgt noch weiter, dass eine Fläche 4. Ordnung nicht gleichzeitig einen Ring und einen halbpaaren Flächentheil enthalten kann; auch zwei halbpaare Flächentheile können nur existiren, wenn ihr Geschlecht beiderseits gleich 1 ist.

Um die Resultate unter d) zu erhalten, muss man ausser den obigen Sätzen noch folgende Betrachtungen anstellen. Aendert man die Constanten einer vorliegenden Fläche 4. Ordnung stetig, bis dieselbe einen Knotenpunkt erhält, und projicirt dieselbe aus diesen Knoten, so erhält man eine Curve 6. Ordnung mit Berührungskegelschnitt. Da das Geschlecht der Curven 6. Ordnung ohne Doppelpunkte gleich 10 ist, so giebt es nach Herrn Klein Curven 6. Ordnung mit 11 Ovalen, und aus dieser Bemerkung folgt unmittelbar das unter d) Gesagte. Dabei ist noch zu bemerken, dass hieraus keineswegs folgt, dass es wirklich Flächen mit 12 Ovalen gebe, denn dazu wäre erforderlich, dass die 11 Ovale der Curve 6. Ordnung eine bestimmte Lage gegen den Berührungskegelschnitt besässen.

Die Projectionen der Flächen 4. Ordnung mit einem oder mehreren Knotenpunkten, vorgenommen aus einem derselben, können benutzt werden, um Aufschlüsse über die gestaltlichen Verhältnisse dieser

Flächen zu gewinnen. Es lässt sich leicht aus der Form dieser Curven 6. Ordnung auf die der zugehörigen Flächen 4. Ordnung schliessen, wobei natürlich die Lage der Curvenzweige gegen den Berührungskegelschnitt von fundamentaler Bedeutung ist. Studirt man demnach die Formen der Curven 6. Ordnung mit Berührungskegelschnitt, so erhält man dadurch auch diejenigen der Flächen 4. Ordnung. Dabei ist noch auf zweierlei zu achten. Einerseits können Flächen mit mehreren Knotenpunkten ganz verschiedene Projectionen ergeben, je nach der Wahl des Knotenpunktes, aus dem man projicirt, andererseits müssen auch Flächen als gestaltlich gleich angesehen werden, deren Projectionen wesentlich verschiedene Formen besitzen. Um dieses zu verstehen bedarf es einer kurzen Erläuterung. Besitzt die Curve 6. Ordnung auf dem Berührungskegelschnitte einen Doppelpunkt, so giebt es auf der zugehörigen Fläche 4. Ordnung eine Gerade, welche durch den Knoten verläuft, von dem man projicirt. Das Entstehen und Auflösen von Doppelpunkten der Curve auf dem Berührungskegelschnitt wird desshalb keine gestaltliche Aenderung der Fläche 4. Ordnung nach sich ziehen, weil bei dieser weder ein Knoten entsteht noch verschwindet. So wird es also z. B. ganz gleich sein, ob ein Oval, das den Kegelschnitt nur ein Mal berührt, ausserhalb oder innerhalb desselben liegt, denn beide Male kann dasselbe auf einen isolirten Doppelpunkt auf den Kegelschnitt zusammengezogen werden. Zwei Ovale, welche auf verschiedenen Seiten des Berührungskegelschnittes liegen und von denen das eine denselben berührt, können in einen Curvenzug mit Doppelpunkt verwandelt und dieser dann so aufgelöst werden, dass das andere Oval den Kegelschnitt berührt. Auf diese Weise kann man Ovale von der einen Seite des Kegelschnittes auf die andere bringen, ohne die zugehörige Fläche gestaltlich zu ändern. In Bezug auf die Details dieser Untersuchungen muss ich auf die Originalarbeit verweisen.

Zum Schluss soll noch eines Mittels gedacht werden, das uns einen bequemen Ueberblick über die meisten Flächen 4. Ordnung gewährt; es sind dieses die *Grenzflächen*. Betrachtet man nämlich das Büschel von Flächen 4. Ordnung: $\varrho\Phi - F^2 = 0$, wobei $\Phi = 0$ eine ganz beliebige Fläche 4. Ordnung und $F = 0$ eine solche 2. Grades bedeutet, so sieht man, dass die doppelt gezählte Fläche 2. Grades durch continuirlichen Uebergang aus den Flächen 4. Ordnung bei abnehmendem Parameter ϱ entsteht. So lange ϱ einen endlichen, wenn auch sehr kleinen Werth hat, ist die zugehörige Fläche eine wirkliche Fläche 4. Ordnung, erst wenn $\varrho = 0$ wird, entsteht die Fläche 2. Grades, indem je zwei Punkte der Fläche 4. Ordnung coincidiren. Hierbei zeigt sich folgendes Verhalten. Die Raumcurve 8. Ordnung $\Phi = 0$, $F = 0$ theilt die Oberfläche 2. Grades in verschiedene Gebiete; einen Theil derselben nennen wir *positive*, den andern *negative* Gebiete, und

zwar sollen je zwei Gebiete, welche längs eines Curvenstücks aneinanderstossen, entgegengesetztes Vorzeichen erhalten. Beim Grenzübergang, d. h. bei verschwindendem ϱ, wird die Fläche $\varrho\Phi - F^2 = 0$ die sämmtlichen *positiven*, resp. *negativen* Gebietstheile der Fläche 2. Grades doppelt überdecken, je nachdem ϱ sich von der positiven oder negativen Seite der Null nähert. Die Fläche 2. Grades mit ihrer Raumcurve 8. Ordnung kann demnach als Bild von zwei verschiedenen Flächen 4. Ordnung aufgefasst werden, *je nachdem man die positiven oder negativen Gebiete mit zwei Blättern überdeckt, welche längs der Raumcurven 8. Ordnung zusammenhängen. Solche Flächen nenne ich Grenzflächen.* Hier muss jedoch sogleich hinzugefügt werden, dass nicht jede Fläche 4. Ordnung stetig, d. h. ohne dass dabei gelegentlich ein Knotenpunkt entsteht oder verschwindet, in eine Grenzfläche übergeführt werden kann, jedoch ist dieses bei den meisten Flächen der Fall.

Die Grenzflächen bieten, abgesehen von der grossen Bequemlichkeit für das Studium der Gestalten, auch für die Erkenntniss vieler Eigenschaften der Flächen 4. Ordnung eine ungemeine Erleichterung. Hierher gehören vor allen Dingen die Erkenntniss der Reducibilität der Tangentenkegel aus den Knotenpunkten, sowie des Strahlensystems 12. Ordnung und 28. Classe, welches die Doppeltangenten bilden. Man kann an der Grenzfläche sofort erkennen, in welcher Weise die einzelnen Tangentenkegel und wie das Strahlensystem zerfällt. Es soll hier nur kurz an einigen Beispielen erläutert werden; vorher aber will ich für die Flächen 4. Ordnung mit 8 bis 16 Knoten kurz die Grenzflächen angeben. Die unteren Indices geben dabei die Ordnung der bez. Curve, die oberen die Anzahl ihrer Doppelpunkte.

Flächen mit 8 Knoten: 1) C_8^8, 2) $C_4^0 + C_4^0$, 3) $C_2 + C_6^2$.

Flächen mit 9 Knoten: 1) C_8^9, 2) $C_4^1 + C_4^0$, 3) $C_2 + C_6^3$.

Flächen mit 10 Knoten: 1) C_8^{10}, 2) $C_4^1 + C_4^1$, 3) $C_4 + C_4$, zwei Curven 4. Ordnung zweiter Species, 4) $C_2 + C_6^4$, 5) $C_2 + C_2 + C_4^0$.

Flächen mit 11 Knoten: XI$_a$: C_4 (zweiter Species) $+ C_3 + C_1$, XI$_b$: $C_6^3 + C_1 + C_1$ (zwei Erzeugende derselben Schaar), XI$_c$: $C_6^4 + C_1 + C_1$ (zwei Erzeugende verschiedener Schaaren), XI$_d$: $C_4^1 + C_2 + C_2$.

Flächen mit 12 Knoten: XII$_a$: $C_3 + C_3 + C_1 + C_1$ (zwei Erzeugende verschiedener Schaaren), XII$_b$: $C_3 + C_3 + C_1 + C_1$ (zwei Erzeugenden derselben Schaar), XII$_c$: $C_2 + C_2 + C_2 + C_2$, XII$_d$: $C_4^1 + C_2 + C_1 + C_1$.

Flächen mit 13 Knoten: XIII$_a$: $C_2 + C_2 + C_2 + C_1 + C_1$, XIII$_b$: $C_3 + C_2 + C_1 + C_1 + C_1$.

Fläche mit 14 Knoten: $C_2 + C_2 + C_1 + C_1 + C_1 + C_1$; Fläche mit 15 Knoten: $C_2 +$ 6 Erzeugende; Fläche mit 16 Knoten: 8 Erzeugende.

Gehen wir nun zu den *Tangentenkegeln aus den Knotenpunkten* über. Hat die Raumcurve 8. Ordnung, welche die Grenzfläche bestimmt,

δ Doppelpunkte, so besitzt der Kegel, der sich auf die Raumcurve stützt und seinen Scheitel in einem ihrer Doppelpunkte A hat, $\delta + 1$ Doppelkanten, indem die beiden Erzeugenden der Fläche 2. Grades durch A ebenfalls Doppelkanten dieses Kegels sind. Der Tangentenkegel aus A an die *Grenzfläche* wird mit jenem Kegel identisch sein; $\delta - 1$ Doppelkanten des Kegels werden durch die Knotenpunkte der Grenzfläche bedingt, während die beiden übrigen erst bei dem Grenzübergang von der allgemeinen Fläche zur Grenzfläche entstehen. Will man also den Tangentenkegel der Grenzfläche durch Bewegung einer Kante entstehen lassen, so wird dieselbe die $\delta - 1$ Doppelkanten, welche den Knoten entsprechen, in gewöhnlicher Weise durchlaufen, nicht so aber die beiden übrigen Doppelkanten. Hier wird die bewegliche Kante auf dem *einen* Mantel in die Doppelkante hineinrücken; um sie auf dem andern wieder zu verlassen. In Figur 1 wird die Kante, durch deren Bewegung der Tangentenkegel entsteht, der Reihe nach die Punkte: 1, 2, 3 = 4 vorn, 5, 6, 3 = 4 rückwärts, 1 passiren; die Schraffirung deutet die Grenzfläche an.

Etwas anders gestaltet sich die Sache bei einer reduciblen Raumcurve 8. Ordnung, wenn eine oder beide Erzeugende durch A Theile dieser Curve bilden, indem die Erzeugende zur dreifachen Kante des bez. Tangentenkegels wird. Figur 2 giebt das Verhalten des Tangentenkegels in der dreifachen Kante, wobei unter a), b), c) die drei Aeste der Berührungscurve dargestellt sind, welche der Grenzfläche angehören.

Mit Rücksichtnahme auf das Gesagte, wird z. B. in Figur 3 der Kegel aus den sämmtlichen Punkten A irreducibel sein, aus den beiden Punkten B aber in je einen Kegel zweiter und einen Kegel 4. Ordnung zerfallen. In Figur 4 werden die Kegel aus den Punkten A in je einen Kegel dritter, einen zweiter Ordnung und eine Ebene zerfallen; die Kegel aus den Knoten B spalten sich in zwei Kegel 3. Ordnung mit je einer Doppelkante, während die Kegel aus den Knoten C je aus einem Kegel 5. Ordnung und einer Ebene bestehen.

Auch für das Strahlensystem 12. Ordnung und 28. Classe ergiebt sich die Reducibilität auf das einfachste. Es zeigt sich, dass beim Grenzübergang von der allgemeinen zur Grenzfläche die Strahlensysteme der allgemeinen Fläche theilweise zerfallen; aber man kann leicht erkennen, welche Strahlensysteme*) der Grenzfläche zusammengehören und bei der allgemeinen Fläche nur ein einziges Strahlensystem bilden. Es gilt nämlich der Satz: *Zwei Strahlensysteme, deren Leitcurven die eine Schaar von Erzeugenden der sie enthaltenden Fläche 2. Grades*

*) Die Doppeltangentensysteme der allgemeinen Fläche werden bei der Grenzfläche Doppelsecantensysteme der Raumcurve 8. Ordnung.

in vier getrennten Punkten schneiden, gehören zusammen; dieselben bilden Theile eines Strahlensystems, welches bei der allgemeinen Fläche 4. Ordnung irreducibel ist.

Als Beispiel mag die Fläche mit 16 Knotenpunkten dienen, Figur 5. Die Strahlensysteme 1. Ordnung und 1. Classe, welche g_1 und g_2, resp. g_3 und g_4 treffen, gehören zusammen; demgemäss giebt es sechs Strahlensysteme 2. Ordnung und 2. Classe, nämlich:*)

$$g_1g_2 + g_3g_4,\quad g_1g_3 + g_2g_4,\quad g_1g_4 + g_2g_3,\quad h_1h_2 + h_3h_4,\quad h_1h_3 + h_2h_4,$$
$$h_1h_4 + h_2h_3,$$

ferner 16 Strahlensysteme 0. Ordnung und 1. Classe, nämlich:

$$g_ih_k (i=1, 2, 3, 4;\ k=1, 2, 3, 4).$$

Als zweites Beispiel wählen wir die Fläche XII_a, Figur 4. Diese Fläche besitzt ein Strahlensystem 0. Ordnung und 1. Classe: gh, ferner zwei Strahlensysteme 2. Ordnung und 6. Classe: $gC_3 + C_3'C_3'$ und $hC_3' + C_3C_3$, endlich ein Strahlensystem 8. Ordnung und 15. Classe: $gC_3' + C_3C_3' + hC_3$. Hiermit dürfte der Vortheil der Einführung der Grenzflächen genügend dargethan sein, besonders wenn man bedenkt, welche Schwierigkeit sowohl die Aufstellung der Tangentenkegel aus den einzelnen Knotenpunkten, wie es im ersten Theil dieser Arbeit geschieht, als auch die der Strahlensysteme, wie es Herr Kummer gethan hat, bietet.

Dresden, im Oktober 1886.

---

*) Die Strahlensysteme sind in leicht verständlicher Weise durch ihre Leitcurven charakterisirt.

Die Congruenzgruppen der sechsten Stufe*).

(Mit einer Figurentafel.)

Von

Robert Fricke in Braunschweig.

Durch die nachfolgende Mittheilung beabsichtige ich eine vollständige Darstellung der zu den Congruenzgruppen der sechsten Stufe gehörenden elliptischen Modulfunctionen zu entwickeln. Die Stellung meiner Arbeit zu den allgemeinen hier in Betracht kommenden Untersuchungen der Herren Klein**) und Hurwitz***) lässt sich mit kurzen Worten kennzeichnen. Zuvörderst erinnere ich daran, dass Herr Klein Modulsysteme nur für den Fall ungerader Stufenzahlen aufstellt, während auch die Erweiterung des Herrn Hurwitz, über welche man § 5 der citirten Abhandlung vergleichen möge, den Fall der sechsten Stufe als solchen nicht umfasst. Bleibt dieser letztere hiernach überhaupt noch unerledigt, so darf man überdies behaupten, dass durch die gedachten Verallgemeinerungen die directe functionentheoretische Untersuchung auch der übrigen Stufen noch keineswegs überflüssig geworden ist, wie es denn wahrscheinlich ist, dass insbesondere für zusammengesetzte Stufenzahlen n die gefundenen Modulsysteme noch nicht die einfachsten sind†).

Zugleich gedenke ich hier noch zweier speciellen Absichten, welche ich mit meiner Arbeit verfolge. Einmal führt die ausführliche Betrachtung der sechsten Stufe mit Nothwendigkeit zu weitergehenden

*) Die Resultate des vorliegenden Aufsatzes habe ich zum Theil bereits im vierten Kapitel meiner Inaugural-Dissertation entwickelt (Leipzig, 1885).

**) „Ueber die elliptischen Normalcurven der n^{ten} Ordnung etc." Abhandlungen der mathem.-phys. Classe der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Bd. 13 Nr. IV.

***) „Ueber endliche Gruppen linearer Substitutionen, welche in der Theorie der elliptischen Transcendenten auftreten." Math. Ann. Bd. XXVII p. 183.

†) Untersuchungen, die sich in dieser Richtung bewegen, hat schon seit längerer Zeit Hr. Kiepert angestellt; ich hoffe, dass dieselben bald veröffentlicht werden sollen. F. Kl.

Untersuchungen, die über das Gebiet der Congruenzgruppen hinausreichen und für die ich meine gegenwärtige Darstellung als Einleitung ansehen möchte. Andrerseits schien mir die Untersuchung der sechsten Stufe deshalb der Mittheilung werth, weil sie und mit ihr die Stufenzahlen $2p$ [unter p eine der ersten ungeraden Primzahlen verstanden] in einer speciellen Beziehung zur Theorie der elliptischen Functionen stehen, welche freilich wohl nur in der historischen Entwicklung dieser Theorie begründet erscheint. Ich denke hier an die Relationen, welche zwischen den Nullwerthen der Thetafunctionen ϑ_0, ϑ_2, ϑ_3 und den aus ihnen durch Transformation p^{ter} Ordnung entstehenden Grössen bestehen. Für die Aufstellung dieser Relationen, von denen sich Beispiele bereits im Gauss'schen Nachlass*) vorfanden und die seither wiederholt Gegenstand der Untersuchung geworden sind**), liefert die Betrachtung der Stufe $2p$ einheitliche Gesichtspunkte, wie ich solches für Transformation dritter Ordnung ausführlich erläutern werde.

Meine Arbeit, die für die sechste Stufe erschöpfend sein soll, hat dieselbe zuerst in *arithmetisch-gruppentheoretischer* Beziehung zu betrachten. Es wird sich darum handeln, sämmtliche durch Congruenzen (mod. 6) definirbaren Untergruppen aufzuzählen. Besondere Beachtung werden die ausgezeichneten Untergruppen verdienen. Indem sich die Untersuchung sodann den *algebraischen Moduln* zuwendet, dürfen diejenigen als die einfachsten angesprochen werden, welche als *Hauptmoduln****) den Gruppen sechster Stufe vom Geschlecht $p = 0$ zukommen. Zwei unter diesen wählen wir aus, die geeignet sind, ein *volles Modulsystem* sechster Stufe zu bilden, und stellen die übrigen Hauptmoduln als rationale Functionen dieser beiden dar. Eine *transcendente* Modulfunction sechster Stufe, welche ich sodann drittens betrachte, ergänzt wesentlich die Untersuchung der algebraischen Moduln.

Die hiermit abgeschlossene Entwicklung vervollständige ich weiter dadurch, dass ich die betrachteten Hauptmoduln als Quotienten von Thetafunctionen darstelle und gewinne insbesondere hierdurch die bereits oben erwähnten Thetarelationen.

---

*) Gauss, Werke Bd. III, pag. 470 ff.

**) Man vergl. hier namentlich die Habilitationsschrift von Hrn. Schroeter und im Anschluss daran eine Abhandlung von Göring: „Ueber die Theilwerthe der Jacobischen Thetafunctionen" Math. Ann. Bd. VII, p. 311, sowie aus neuerer Zeit zwei Notizen von Herrn Krause im 25^{ten} Bande der Annalen resp. im 3^{ten} der Acta mathem., an welche sich dann wieder die Untersuchungen der Herren Müller und Rohde anschliessen, die unter dem gleichen Titel „Zur Transformation der Thetafunctionen" in Grunert's Archiv (Zweite Reihe, Bd. 1 und 3) erschienen sind.

***) Bezüglich der hier gebrauchten Terminologie vergl. man Hrn. Klein's Abhandlung „Zur Theorie der elliptischen Modulfunctionen". Math. Ann. Bd. XVII, p. 62.

§ 1.

Aufzählung aller Congruenzgruppen sechster Stufe.

Eine lineare ω-Substitution von der Determinante 1:

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$$

will ich der Abkürzung wegen in der Folge stets durch die symbolische Bezeichnung:

$$\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$$

andeuten. Zwei Substitutionen $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}\alpha', & \beta'\\ \gamma', & \delta'\end{pmatrix}$ heissen dann jedesmal einander *congruent* bezüglich der Zahl 6:

$$\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}\alpha', & \beta'\\ \gamma', & \delta'\end{pmatrix} \pmod{6},$$

wenn entweder die erste oder die zweite Reihe der folgenden Congruenzen erfüllt ist:

$$\left.\begin{array}{llll}\alpha \equiv \alpha', & \beta \equiv \beta', & \gamma \equiv \gamma', & \delta \equiv \delta'\\ \alpha \equiv -\alpha', & \beta \equiv -\beta', & \gamma \equiv -\gamma', & \delta \equiv -\delta'\end{array}\right\} \pmod{6}.$$

Man weiss, dass es im Ganzen 72 *incongruente* Substitutionen giebt und dass sich somit die Gesammtheit der linearen ω-Substitutionen auf eine Gruppe der endlichen Ordnung 72 zusammenzieht, sofern wir alle die Substitutionen, die (mod. 6) übereinstimmen, als nicht verschieden ansehen. Jede Congruenzgruppe der sechsten Stufe wird, falls wir auch sie (mod. 6) reduciren, eine Untergruppe der G_{72}*) werden, deren Existenz wir soeben erkannten und umgekehrt führt jede Untergruppe der G_{72}, sofern wir ihr sämmtliche Substitutionen hinzugesellen, welche den in ihr enthaltenen (mod. 6) congruent sind, auf eine Congruenzgruppe der vorliegenden Stufe, also dass die Aufzählung aller dieser Untergruppen und die vollständige Zerlegung der G_{72} im Grunde dieselben Aufgaben sind.

Die Substitutionen der G_{72} ordnen sich in Ansehung ihrer Periodicität in folgende cyklische Untergruppen ein:

1) Zwölf mit einander gleichberechtigte Cyklen der Ordnung 6, G_6 z. B. die Gruppe:

$$\begin{pmatrix}1, & 1\\ 0, & 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1, & 2\\ 0, & 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1, & 3\\ 0, & 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1, & 4\\ 0, & 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1, & 5\\ 0, & 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}.$$

Dabei ist zu beachten, dass von den zwölf erzeugenden Substitutionen jedesmal drei dieselbe zweite Potenz, bez. immer vier verschiedene

*) Der untere Index bedeutet, wie gewohnt, die Ordnung der Gruppe; ein oberer Index soll zur Unterscheidung von Gruppen gleicher Ordnung dienen.

dieselbe dritte Potenz haben, sodass in den zwölf G_6 vier gleichberechtigte cyklische G_3 und drei ebensolche G_2 enthalten sind.

Denken wir uns entsprechend den 72 incongruenten Substitutionen innerhalb der ω-Halbebene einen Complex von 72 *Doppeldreiecken* abgegrenzt, der dann zugleich das Fundamentalpolygon für die Gruppe der Substitutionen abgiebt, die mod. 6 der Identität $\begin{pmatrix}1, & 0\\0, & 1\end{pmatrix}$ congruent sind, so übersehen wir sofort die geometrische Deutung der genannten G_6. Sie sind die Drehungen dieses Polygons um die zwölf bei $J=\infty$ gelegenen Punkte desselben.

2) *Acht gleichberechtigte Cyklen* G_3'' der Ordnung drei, z. B.

$$\begin{pmatrix}0, & 1\\5, & 1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1, & 5\\1, & 0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1, & 0\\0, & 1\end{pmatrix}.$$

Bei der einzelnen Substitution bleiben immer drei von den 24 bei $J=0$ gelegenen Punkten des Polygons erhalten.

3) *Neun gleichberechtigte Cyklen* G_2'' der Ordnung 2 z. B.

$$\begin{pmatrix}0, & 1\\5, & 0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1, & 0\\0, & 1\end{pmatrix}.$$

Die einzelne Operation ist eine Drehung um vier bei $J=1$ gelegene Punkte.

4) Es restiren *drei gleichberechtigte Cyklen* G_6' der Ordnung sechs, welche ich ihrer Bedeutung wegen vollständig angebe:

$$\left.\begin{matrix}\begin{pmatrix}3, & 1\\5, & 0\end{pmatrix}\\[4pt]\begin{pmatrix}1, & 1\\1, & 2\end{pmatrix}\\[4pt]\begin{pmatrix}1, & 5\\5, & 2\end{pmatrix}\end{matrix}\right\}\;\begin{pmatrix}2, & 3\\3, & 5\end{pmatrix}\;\left\{\begin{matrix}\begin{pmatrix}3, & 4\\2, & 3\end{pmatrix}\\[4pt]\begin{pmatrix}1, & 4\\4, & 5\end{pmatrix}\\[4pt]\begin{pmatrix}1, & 2\\2, & 5\end{pmatrix}\end{matrix}\right\}\;\begin{pmatrix}1, & 3\\3, & 10\end{pmatrix}\;\left\{\begin{matrix}\begin{pmatrix}0, & 1\\5, & 3\end{pmatrix}\\[4pt]\begin{pmatrix}2, & 5\\5, & 1\end{pmatrix}\\[4pt]\begin{pmatrix}2, & 1\\1, & 1\end{pmatrix}\end{matrix}\right\}\;\begin{pmatrix}1, & 0\\0, & 1\end{pmatrix}.$$

Diese zwölf Substitutionen, von denen jede überdies noch mit ihrer inversen Operation gleichberechtigt ist, bilden zusammen eine *ausgezeichnete Untergruppe* G_{12}' der Ordnung 12, welche ich hier an die Spitze der *nichtcyklischen* Untergruppen stelle. Die weitere Zerlegung der G_{12}' ist einfach:

Ausser den drei G_6', der *ausgezeichneten* G_3':

$$\begin{pmatrix}2, & 3\\3, & 5\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1, & 3\\3, & 10\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1, & 0\\0, & 1\end{pmatrix},$$

sowie den *drei gleichberechtigten* G_2':

$$\begin{pmatrix}3, & 4\\2, & 3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1, & 0\\0, & 1\end{pmatrix}\quad \text{etc.}$$

ist eine *ausgezeichnete Vierergruppe* G_4' zu notiren:

$$\begin{pmatrix}3, & 4\\ 2, & 3\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1, & 4\\ 4, & 5\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1, & 2\\ 2, & 5\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}.$$

Zur Aufstellung der noch fehlenden nichtcyklischen Untergruppen ordne ich die 72 Substitutionen in dem wohlbekannten Schema an:

$$\text{(a)} \qquad \begin{matrix} S, & S^2, & \ldots, & S^5, & 1 \\ U_1.S, & U_1.S^2, & \ldots, & U_1.S^5, & U_1 \\ U_2.S, & \ldots & \ldots & & \vdots \\ \vdots & & & & \end{matrix}$$

wobei wir unter S in gewohnter Weise die Substitution $\begin{pmatrix}1, & 1\\ 0, & 1\end{pmatrix}$, unter $1, U_1, U_2, \ldots$ die zwölf Substitutionen der *ausgezeichneten* G_{12}' verstehen. Eben dieserhalb genügen die Substitutionen U_i der Gleichung:

$$S.U_i = U_k.S,$$

welcher man sofort auch die allgemeinere Form:

$$\text{(b)} \qquad U_i.S^\alpha.U_k.S^\beta = U_n.S^{\alpha+\beta}$$

verleiht. Es folgt hieraus, dass die Combination zweier Substitutionen, welche bez. der α^{ten} und β^{ten} Colonne unseres Schemas angehören, auf eine Substitution der $(\alpha+\beta)^{ten}$ Colonne führt, wobei wir natürlich die Zahl $\alpha+\beta$ vorkommenden Falls mod. 6 zu reduciren haben. Im Weiteren folgt, dass die Untergruppen der G_{72} entweder Substitutionen aus allen sechs Colonnen enthalten, oder aber nur solche aus der zweiten, vierten, sechsten oder aus der dritten und sechsten oder letzten Endes allein aus der sechsten Colonne. Wichtig ist hierbei, dass die Colonnen, welche sich überhaupt an der Bildung einer Untergruppe betheiligen, die *gleiche* Anzahl von Substitutionen zu diesem Zwecke stellen, wie man solches sehr leicht erkennt, wenn man die betreffende Untergruppe wieder nach dem Schema (a) anordnet. Die Substitutionen U, welche in einer Untergruppe enthalten sind, bilden offenbar für sich eine Untergruppe, welche somit eine der unter 4) genannten ist. Diese Verhältnisse lassen uns leicht die noch zu nennenden Gruppen übersehen. Ich ordne dieselben in folgender Reihenfolge:

I. Gruppen, welche Substitutionen aus allen sechs Colonnen enthalten:

a) *Drei gleichberechtigte Untergruppen* der Ordnung 24, G_{24}. Die einzelne G_{24} enthält diejenigen vier G_6, welche dieselbe dritte Potenz besitzen, ausserdem aber die ausgezeichnete G_4' und drei G_2''.

b) *Vier gleichberechtigte* G_{18}, deren einzelne die drei G_6 enthält, die in der zweiten Potenz der Erzeugenden übereinstimmen. Ausserdem finden sich in einer G_{18} noch zwei G_3'' und die G_3'.

II. Gruppen, die nur Substitutionen der zweiten, vierten und sechsten Colonne enthalten. Voran steht sie alle umfassend:

a) Eine *ausgezeichnete* G_{36}, welche ausser der G'_{12} alle Cyklen der Ordnung drei enthält. Weiter ordnen sich hier die Gruppen der Substitutionen an, welche der G_{36} bez. mit den eben genannten G_{24} und G_{18} gemeinsam sind. Es sind dies:

b) Eine *ausgezeichnete* G_{12}, dem Tetraedertypus angehörend,

c) *Vier gleichberechtigte* G_9, den 4 G_{18} entsprechend.

Schliesslich gehören hier noch her:

d) *Zwei gleichberechtigte* Gruppen der *zwölften* Ordnung, ebenfalls dem Tetraedertypus angehörend. Beiden Gruppen gemeinsam ist die Vierergruppe G_4', während die einzelne ausserdem noch vier G_3'' enthält.

III. Gruppen, welche Substitutionen der 3ten und 6ten Colonne enthalten. Voran steht wieder, alle übrigen hierher gehörenden Gruppen umfassend:

a) Die *ausgezeichnete* G_{24}, welche aus der G'_{12} im Verein mit den Substitutionen der Periode zwei gebildet ist. Indem wir dann wieder den Antheil feststellen, welchen die hierher gehörigen Substitutionen an den unter I genannten Gruppen haben, finden wir weiter:

b) Drei *gleichberechtigte* G_8, den G_{24} entsprechend und

c) Eine *ausgezeichnete Diëdergruppe* G_6'', den G_{18} entsprechend.

Eine Reihe weiterer Untergruppen ordne ich mit Rücksicht auf die Gruppen von Substitutionen U, welche in ihnen enthalten sind:

d) Gruppen, welche die G_6' einzeln enthalten:

α) *Drei gleichberechtigte* Gruppen der Ordnung *zwölf*, deren jede eine G_6', die drei G_2 und je drei G_2'' enthält.

β) *Drei gleichberechtigte* Gruppen der Ordnung *zwölf*, deren jede eine G_6' im Verein mit sechs bestimmten G_2'' enthält.

Die ausgezeichnete G_4' giebt zur Bildung der unter b) genannten Gruppen Anlass. Die ausgezeichnete G_3' führt neben der in c) genannten G_6'' auf:

e) Drei *gleichberechtigte Diëdergruppen* G_6''', welche einzeln noch drei G_2'' enthalten.

f) Endlich sind noch die Cyklen der Periode zwei G_2' heranzuziehen, deren Vereinigung mit den G_2 resp. G_2'' auf *zwei* Arten von je *neun* mit einander gleichberechtigten *Vierergruppen* führt.*)

*) Die Kenntniss einiger von den hier aufgezählten Untergruppen danke ich einer Mittheilung von Hrn. Gierster.

§ 2.

Die ausgezeichneten Congruenzgruppen der sechsten Stufe.

Indem wir zu den Substitutionen einer einzelnen Untergruppe der G_{72} alle Substitutionen hinzugesellen, welche jenen mod. 6 congruent sind, gewinnen wir ebensoviele Congruenzgruppen der sechsten Stufe. Indessen ist es doch gerechtfertigt, wenn wir den Namen der *Gruppen sechster Stufe* nur für diejenigen vorbehalten, deren Substitutionen nicht bereits durch Congruenzen mod. 2 oder mod. 3 *einzeln* charakterisirt werden können. Fragen wir überdies nur nach *ausgezeichneten* Gruppen der Stufe 6, so ist deren Anzahl nur gleich *vier*. Sie sind gebildet durch die Substitutionen, welche bez. der G_{12}', der G_4', der G_3' und endlich nur der Identität congruent sind mod. 6.

Wenn ich diese Gruppen, die in der Folge vielfach zu nennen sind, durch Γ_6, Γ_{18}, Γ_{24}, Γ_{72} bezeichne, so hat man unter der unten angefügten Zahl den *Index* zu verstehen, welcher der einzelnen Gruppe in Beziehung auf die Gesammtheit der ω-Substitutionen zukommt. Von den vier Gruppen enthält die erste die drei übrigen, während die Γ_{72} aus allen Substitutionen besteht, die zugleich der Γ_{18} und der Γ_{24} angehören.

In den Figuren 1 bis 4 der beigegebenen Tafel habe ich die Fundamentalpolygone angegeben, welche den Gruppen Γ zukommen. Dieselben sind nicht in der Form angenommen, wie sie sich in der ω-Halbebene anordnen, sondern entstehen aus diesen Figuren dadurch, dass man gewisse von den freien Kreiskanten dieser Figuren in der Folge, wie sie durch die Substitutionen der Untergruppe einander angehören, wirklich zur Deckung bringt. Wie man sieht, konnte es hierbei insbesondere erreicht werden, dass die Kreisbogendreiecke der ω-Halbebene sich in geradlinige Dreiecke mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$ verwandelten. Aber man hat diesen Gestalten, in denen wir allerdings später *conforme Abbildungen* der ursprünglichen Polygone in der ω-Halbebene erkennen werden, zuvörderst nur eine schematische Bedeutung zu geben.

Auch bei den mitgetheilten Figuren bleiben noch mehrere begrenzende Kanten frei. Die Reihenfolge, in der sie durch die Substitutionen der bez. Untergruppen in einander überführt werden, ist jedesmal neben der Figur angegeben. Dabei gilt für Fig. 3 die unter I stehende Tabelle. Durch wirkliches Zusammenfügen der zusammengehörenden Kanten erhält man in jedem Falle eine im Raume gelegene Riemann'sche Fläche des Geschlechtes $p = 1$, sodass die vier Gruppen Γ übereinstimmend *dem Geschlechte Eins* angehören. Fig. 5 giebt für die Γ_6 die für Polygone dieses Geschlechtes typische Gestalt an und man ergänzt ohne jede Mühe die analogen Formen für die drei andern Gruppen Γ.

§ 3.

Das volle Modulsystem sechster Stufe.

Die Γ_{72} war in jeder andern Congruenzgruppe der vorliegenden Stufe enthalten. Wenn wir demnach jetzt nach den *algebraischen Moduln* der sechsten Stufe fragen, so können wir als eine sie alle umfassende Definition diese an die Spitze stellen: Ein *algebraischer Modul* der 6^{ten} Stufe ist eine eindeutige Function von ω, welche bei den Substitutionen der Γ_{72} unverändert bleibt und auf der geschlossenen Riemann'schen Fläche, in welche wir am Schluss des vorigen Paragraphen das Polygon der Gruppe Γ_{72} verwandelten, keine Unstetigkeiten höherer Ordnung zeigt. Des Näheren haben wir aus der grossen Zahl von Functionen dieser Kategorie diejenigen als die einfachsten anzusehen, welche als *Hauptmoduln* den Gruppen sechster Stufe vom Geschlecht *Null* zukommen, und werden ihnen allein die weitere Untersuchung widmen. Aber auch hierbei habe ich noch einer Restriction zu gedenken. Vollständig sollen die Hauptmoduln nur für die *cyklischen* Untergruppen des Geschlechts Null angegeben werden, d. h. nur für diejenigen Congruenzgruppen 6^{ter} Stufe, welche sich mod. 6 auf die Cyklen des Paragraph 1 reduciren, einmal weil die nichtcyklischen Untergruppen des Geschlechts Null z. Th. gar nicht der sechsten Stufe angehören, dann vorzüglich, weil in jedem Falle der Hauptmodul einer nichtcyklischen Gruppe des Geschlechts Null als einfache rationale Function vom Hauptmodul einer cyklischen Gruppe angegeben werden kann.

Vom Geschlecht Null sind die Gruppen G_6, G_2, G_3, G_2'', G_3'', so dass wir im Ganzen 5 Arten von Hauptmoduln 6^{ter} Stufe betrachten werden. Wenn ich hierbei den beiden Hauptmoduln der Gruppen: $\begin{pmatrix}1, 2\\0, 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1, 4\\0, 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1, 0\\0, 1\end{pmatrix}$ resp. $\begin{pmatrix}1, 3\\0, 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1, 0\\0, 1\end{pmatrix}$ eine principielle Stellung gegenüber den andern einräume, so hat dieses nur den technischen Zweck, für die übrigen Functionen eine bequeme Ausdrucksweise als rationale Functionen jener beiden zu erhalten. Sie bilden ein *volles Modulsystem* sechster Stufe, so dass jeder Punkt auf dem Polygon der Γ_{72} durch ein Paar zusammengehöriger Werthe jener Moduln eindeutig bestimmt werden kann.

Und nun stellen uns die Figuren 6, 7, 8 die Polygone der drei Gruppen

$$\left.\begin{array}{c}\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\\gamma, \delta\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1, 1\\0, 1\end{pmatrix}, \equiv\begin{pmatrix}1, 2\\0, 1\end{pmatrix}, \cdots, \equiv\begin{pmatrix}1, 5\\0, 1\end{pmatrix}, \equiv\begin{pmatrix}1, 0\\0, 1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}\alpha, \beta\\\gamma, \delta\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1, 2\\0, 1\end{pmatrix}, \equiv\begin{pmatrix}1, 4\\0, 1\end{pmatrix}, \equiv\begin{pmatrix}1, 0\\0, 1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}\alpha, \beta\\\gamma, \delta\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1, 3\\0, 1\end{pmatrix}, \equiv\begin{pmatrix}1, 0\\0, 1\end{pmatrix}\end{array}\right\}\ (\text{mod. } 6)$$

dar, wobei die ausführlich angedeutete Zusammengehörigkeit der Kanten das Geschlecht der Flächen als Null bestimmt. Die Orientirung derselben in der ω-Halbebene ist durch die beigesetzten Zahlen angedeutet. Als Riemann'sche Fläche über der Ebene der absoluten Invariante J lagert das Polygon der ersten Gruppe zwölfblättrig und ist bei $J=\infty$ derart verzweigt, dass ein Blatt dem Werthe $\omega = i\infty$ entsprechend isolirt verläuft, während sechs Blätter für $\omega = 0$, zwei Blätter für $\omega = \frac{1}{3}$, drei dagegen für $\omega = \frac{1}{2}$ cyklisch zusammenhängen. Bei $J=0$ ordnen sich die Blätter zu je drei in vier Verzweigungspunkte, bei $J=1$ zu je zwei in sechs solche.

Den *Hauptmodul* der nun beschriebenen Fläche nenne ich $\tau(\omega)$ und setze fest, dass:

$$\tau(0)=0,\quad \tau\left(\tfrac{1}{2}\right)=1,\quad \tau(i\infty)=\infty \tag{1}$$

wird, wodurch τ völlig bestimmt ist*). Eine Reihe von Zahlen, die in Fig. 6 angebracht sind, soll uns die Lagerung der reellen τ-Axe zur Anschauung bringen. Wie dieselben in Erfahrung gebracht sind, zeige ich an einem Beispiel. Handelt es sich um die Bestimmung des Zahlwerthes $\tau\left(\frac{1}{3}\right)$, so führe ich die Congruenzgruppe 3^{ter} Stufe:

$$\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1, & 1\\ 0, & 1\end{pmatrix},\quad \equiv \begin{pmatrix}1, & 2\\ 0, & 1\end{pmatrix},\quad \equiv \begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}\quad (\text{mod. } 3)$$

in die Betrachtung ein. Das Polygon derselben entsteht durch dieselbe Kürzung aus dem Polygon der Γ_{24}, welche uns oben vom Polygon der Γ_{72} auf die Fläche des Moduls τ führte. Dasselbe ist vom Geschlecht Null, definirt also einen Hauptmodul $\varphi(\omega)$, des Näheren festgesetzt durch die Bestimmung:

$$\varphi(0)=0,\quad \varphi\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{6}\right)=1,\quad \varphi(i\infty)=\infty.$$

Die Beziehungen der Figuren 3 und 6 lassen erkennen, dass $\varphi(\omega)$ eine rationale Function dritten Grades von τ ist und die specielle Verzweigungsart führt auf die explicite Form dieser Function:

$$\varphi = c\cdot\frac{\tau^2(\tau-1)}{(\tau-a)^2},$$

wobei wir unter c eine Constante und unter a den fraglichen Werth $\tau\left(\frac{1}{3}\right)$ zu verstehen haben. Hierbei tritt die Besonderheit ein, dass die 3 Punkte, für welche $\varphi = 1$ wird, in einen einzigen Punkt der

*) Herr Gierster braucht in Band XII der Annalen p. 541 eine mit τ nahe verwandte Function, um die Modulargleichung für Transformation 6^{ten} Grades von $J(\omega)$ aufzustellen.

τ-Ebene, nämlich $\tau\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{6}\right)$, zusammenfallen. Somit muss die Gleichung:

$$c\tau^2(\tau-1)-(\tau-a)^2=0$$

eine dreifache Wurzel haben, was uns sofort die Resultate

$$c=\frac{1}{3},\quad \tau\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{8}{9},\quad \tau\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{6}\right)=\frac{4}{3}$$

ergiebt.

Nennt man die Hauptmoduln der Polygone in Fig. 7 und 8 bez. $y(\omega)$ und $x(\omega)$, mit der Bestimmung:

$$\tag{2} \begin{array}{lll} y(0)=3, & y(1)=-3, & y(i\infty)=\infty \\ x\left(\frac{5}{2}\right)=\varepsilon, & x\left(\frac{3}{2}\right)=-1, & x\left(\frac{1}{2}\right)=\varepsilon^5 \quad \left(\varepsilon=e^{\frac{\pi i}{3}}\right), \end{array}$$

so überblickt man ohne Mühe, dass wir y und x als Wurzeln der Function τ darstellen können. Es ist:

$$\tag{3} \begin{aligned} y(\omega)&=3\sqrt{1-\tau},\\ x(\omega)&=\sqrt[3]{8-9\tau}; \end{aligned}$$

$y(\omega)$ ist auf dem Polygon der Γ_{72} dreiwerthig und zwar kehren dieselben Werthe in den 3 Punkten ω, $\omega+2$, $\omega+4$ wieder. Entsprechend kehrt derselbe Werth von $x(\omega)$ in den *beiden* Punkten ω, $\omega+3$ wieder. x und y zugleich nehmen somit ein bestimmtes System von *zusammengehörigen* Werthen nur in einem *einzigen Punkte* des Polygons der Γ_{72} an. Die Zusammengehörigkeit der Werthe regelt sich nach der Relation, welche diese beiden Grössen auf Grund von (3) mit einander verknüpft:

$$\tag{4} y^2=x^3+1.$$

Deuten wir (4) geometrisch als Curve dritter Ordnung, so sind Curve und Polygon Punkt für Punkt *eindeutig* auf einander bezogen und jede algebraische Modulfunction der sechsten Stufe ist eine *rationale* Function von x und y. Uebrigens weicht diese Curve dritter Ordnung von der Weierstrass'schen Normalform für Curven des Geschlechts $p=1$ nur unwesentlich ab.

§ 4.

Die Moduln der Gruppen Γ_{24}, Γ_{18}, Γ_6.

Den Hauptmodul der *zweiten Stufe*, der bekanntlich mit dem Legendreschen Integralmodul identisch ist, nenne ich $\lambda(\omega)$ und fixire ihn durch Angabe der drei Werthe:

$$\lambda(0)=0,\quad \lambda(1)=1,\quad \lambda(i\infty)=\infty.$$

Den Hauptmodul der *dritten Stufe*, die Tetraederirrationalität, bezeichne ich durch $a(\omega)$ und setze fest:

$$a(0) = 1,\quad a(1) = \varepsilon^4,\quad a(2) = \varepsilon^2,\quad \left(\varepsilon = e^{\frac{\pi i}{3}}\right).$$

Die Gruppe der Function $y(\omega)$ ist eine Untergruppe der Congruenzgruppe zweiter Stufe, welcher λ angehört, sodass λ eine rationale Function von y ist. Die Betrachtung der bez. Verzweigung der Flächen giebt sofort:

$$\lambda = \frac{(3-y)^3(1+y)}{16y^3}. \tag{1}$$

Ein analoger Gedankengang führt für die Grösse $a(\omega)$ auf:

$$a = \frac{x^3+4}{3x^3}. \tag{2}$$

Unter Rücksichtnahme auf die Formeln des letzten Paragraphen berechnen wir hieraus die beiden Beziehungen

$$\sqrt{a^3-1} = \frac{(9-y^2)\,y}{3^{\frac{3}{2}}(1-y^2)},\qquad \sqrt[3]{\lambda(1-\lambda)} = \frac{(8-x^3)\,x}{2^{\frac{8}{3}}(x^3+1)}. \tag{3}$$

Die beiden Grössen $\sqrt{a^3-1}$, $\sqrt[3]{\lambda(1-\lambda)}$ sind rationale Functionen resp. von y und x, d. h. sie sind *Congruenzmoduln der* 6^{ten} *Stufe*.

Im Speciellen bilden die beiden Grössen a, $\sqrt{a^3-1}$ ein *volles Modulsystem* für die *ausgezeichnete* Γ_{24}; ein gleiches System für die Γ_{18} bilden die Functionen $\sqrt[3]{\lambda(1-\lambda)}$, λ und letztes Endes übernimmt dieselbe Rolle für die Γ_6 das System $\sqrt[3]{J}$ und $\sqrt{J-1}$.

Alle diese Systeme nehmen zu ihren Gruppen genau dieselbe Stellung ein, wie x, y zu der Γ_{72}, wie denn auch die in jedem Falle eintretende Relation zwischen den beiden Moduln im Wesentlichen die Weierstrass'sche Normalform annimmt:

$$\begin{aligned}
&(\sqrt{a^3-1})^2 = a^3-1,\\
&\left(\lambda-\tfrac{1}{2}\right)^2 = (\sqrt[3]{\lambda(\lambda-1)})^3 + \tfrac{1}{4},\\
&(\sqrt{J-1})^2 = (\sqrt[3]{J})^3 - 1.
\end{aligned} \tag{4}$$

Dabei fehlt jedesmal rechter Hand das lineare Glied, sodass wir es stets mit dem *äquianharmonischen* Falle der Fläche vom Geschlecht $p = 1$ zu thun haben.

§ 5.

Die mit x und y gleichberechtigten Hauptmoduln.

Die Einführung der Moduln τ, x, y geschah in unsymmetrischer Weise. τ blieb erhalten bei der Substitution $\begin{pmatrix}1, & 1\\ 0, & 1\end{pmatrix}$, die doch nur eine unter zwölf gleichberechtigten war. Indem wir in diesem Sinne der Symmetrie gerecht werden wollen, haben wir neben die Substitution S oder $\begin{pmatrix}1, & 1\\ 0, & 1\end{pmatrix}$ die elf andern mit ihr gleichberechtigten S_1, $S_2 \ldots S_{11}$ zu stellen und neben die Function $\tau(\omega)$ in entsprechender Weise elf andere $\tau_i(\omega)$, die den Bedingungen:

$$\tau_i(S_i(\omega)) = \tau_i(\omega)$$

genügen.

Gehen wir von hier aus, wie es oben geschah durch Wurzelziehung zu y, so stellen sich neben das ursprüngliche y elf andere y_i den Gleichungen genügend:

$$y_i(S_i^2(\omega)) = y_i(\omega).$$

Aber unter den S_i^2 sind, wie oben gezeigt, nur *vier* von einander verschiedene:

$$\begin{pmatrix}1, & 2\\ 0, & 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1, & 0\\ 4, & 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1, & 4\\ 2, & 3\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}3, & 4\\ 2, & 1\end{pmatrix}.$$

Es folgt, dass auch unter den y_i nur vier wesentlich verschiedene sind, je drei aber Hauptmoduln derselben Fläche und also linear von einer unter ihnen abhängig.

Die nähere Untersuchung der y_i bestätigt dieses. Neben y treten in dem eben erörterten Sinne als gleichberechtigt die beiden linearen Functionen:

$$\frac{y+3}{y-1}, \quad \frac{y-3}{y+1}.$$

Ferner bestätigt man sofort, dass $y\left(\frac{-1}{\omega}\right)$, $y\left(\frac{-1}{\omega+2}\right)$, $y\left(\frac{-1}{\omega+4}\right)$ resp. bei der zweiten, dritten und vierten der obigen Substitutionen unverändert bleiben, so dass wir diese Grössen im Verein mit y selbst als vier wesentlich verschiedene Functionen y_i annehmen könnten. Indessen empfiehlt es sich, an Stelle der drei letztgenannten y_i drei mit ihnen gleichberechtigte lineare Functionen einzuführen, indem man setzt:

$$(1)\quad y_1 = \frac{3 - y\left(\frac{-1}{\omega}\right)}{1 + y\left(\frac{-1}{\omega}\right)}, \quad y_2 = \frac{3 - y\left(\frac{-1}{\omega+2}\right)}{1 + y\left(\frac{-1}{\omega+2}\right)}, \quad y_3 = \frac{3 - y\left(\frac{-1}{\omega+4}\right)}{1 + y\left(\frac{-1}{\omega+4}\right)},$$

Die Moduln y_1, y_2, y_3 werden wir nunmehr als rationale Functionen auf der Curve:

$$y^2 = x^3 + 1$$

darzustellen haben. Eine etwas längere Zwischenbetrachtung, die indess keinerlei Schwierigkeit darbietet, führt zu dem Resultate:

$$(2)\quad y_1 = -\frac{3y}{(1+x)^2},\quad y_2 = -\frac{3y}{(1+\varepsilon^2\cdot x)^2},\quad y_3 = -\frac{3y}{(1+\varepsilon^4\cdot x)^2}.$$

Dabei ist ε in der mehrfach definirten Bedeutung gebraucht. Es entspringen aus diesen Darstellungen merkwürdige Relationen zwischen den reciproken Werthen der y:

$$(3)\quad \begin{aligned} &\frac{1}{y} + \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \frac{1}{y_3} = 0\\ &\left(\frac{1}{y}\right)^2 + \left(\frac{1}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{y_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{y_3}\right)^2 = \frac{4}{3}\\ &\left(\frac{1}{y}\right)^3 + \left(\frac{1}{y_1}\right)^3 + \left(\frac{1}{y_2}\right)^3 + \left(\frac{1}{y_3}\right)^3 = \frac{8}{9}(2\lambda - 1)\\ &y\cdot y_1\cdot y_2\cdot y_3 + 27 = 0. \end{aligned}$$

In der dritten Gleichung ist dadurch die Symmetrie gewahrt, dass rechter Hand der Legendre'sche Integralmodul eingeführt wurde, welcher übereinstimmend durch die vier y_i in folgender Weise dargestellt wird:

$$\lambda = \frac{(3-y_i)^3(1+y_i)}{16\,.\,y_i^3}.$$

Für die Function $x(\omega)$ sind die Verhältnisse durchaus analog. Die Substitution $\begin{pmatrix}1, & 3\\ 0, & 1\end{pmatrix}$ ist eine von drei gleichberechtigten, sodass neben x noch zwei gleichberechtigte Moduln treten, die nicht linear von x abhängen. Solche Functionen sind $x\left(\frac{-1}{\omega}\right)$ und $x\left(\frac{-1}{\omega+3}\right)$. Aber auch hier wählen wir wieder zwei lineare Functionen derselben, die mit ihnen gleichberechtigt sind. Man setze:

$$(4)\quad x_1 = \frac{2 - x\left(\frac{-1}{\omega}\right)}{1 + x\left(\frac{-1}{\omega}\right)},\qquad x_2 = \frac{2 - x\left(\frac{-1}{\omega+3}\right)}{1 + x\left(\frac{-1}{\omega+3}\right)}.$$

Die Darstellung von x_1 und x_2 im vollen Modulsystem (x, y) ist geleistet durch:

$$(5)\quad x_1 = -\frac{2x}{1+y},\qquad x_2 = -\frac{2x}{1-y},$$

so dass sich den Relationen (3) die folgenden an die Seite stellen:

$$(6)\quad \begin{aligned} &\frac{1}{x} + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 0\\ &\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{3}{2}\cdot a\\ &\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} = -\frac{3}{4}\\ &x\cdot x_1\cdot x_2 + 4 = 0. \end{aligned}$$

Auch hier musste zu Gunsten der Symmetrie in der einen Gleichung die Tetraederirrationalität eingeführt werden, wobei dann:

$$a = \frac{x_i^3 + 4}{3x_i^2}$$

die übereinstimmende Darstellung von a durch die drei x ist.

Hier werden auch diejenigen Relationen einfach, welche je *zwei* Functionen x mit einander eingehen. Ein Beispiel ist:

$$(7) \qquad x_1^2 \cdot x_2^2 = 4(x_1 + x_2).$$

§ 6.

Das überall endliche Integral.

Das Fundamentalpolygon der Γ_{72} gab durch Zusammenfügen der Kanten eine Riemann'sche Fläche des Geschlechts Eins, welche sodann auf die Curve dritter Ordnung:

$$y^2 = x^3 + 1$$

wechselseitig eindeutig bezogen wurde. Wenn ich nunmehr:

$$(1) \qquad u(\omega) = \int_{i\infty}^{\omega} \frac{dx}{y}$$

setze und als untere Integrationsgrenze den Punkt $\omega = i\infty$ fixire, so erhalte ich eine Function von ω, die folgende Eigenschaften besitzt. Sie ist auf der *zerschnittenen* Riemann'schen Fläche, und als solche können wir das Polygon der Γ_{72} in der ω-Halbebene ansehen, überall *endlich* und *eindeutig*, wächst aber bei beliebigen Ueberschreitungen der Querschnitte, d. h. für die ω-Halbebene bei *Ausführung beliebiger Substitutionen* $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$, die der Identität mod. 6 congruent sind, allgemein um *Multipla zweier Perioden* Ω_1, Ω_2.

Stellen wir zunächst vor allen Dingen fest, wie sich $u(\omega)$ bei den erzeugenden Substitutionen $\begin{pmatrix}1, & 1\\ 0, & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix}$ verhält. Dabei gilt für die erste Substitution:

$$(2) \qquad x(\omega+1) = \varepsilon^4 \cdot x(\omega), \quad y(\omega+1) = -y(\omega),$$

während die Wirkung der zweiten auf x und y sich aus den Formeln des letzten Paragraphen ohne Mühe berechnen lässt. Man findet:

$$(3) \qquad x\left(\frac{-1}{\omega}\right) = 2 \cdot \frac{1+x+y}{1-2x+y}, \quad y\left(\frac{-1}{\omega}\right) = \frac{3(1+x)^2+3y}{(1+x)^2-3y}.$$

Die rechter Hand stehenden x, y sind jedesmal von dem Argumente ω selbst abhängig zu denken.

Nun folgt nach leichter Zwischenrechnung:

$$\frac{dx(\omega+1)}{y(\omega+1)} = \varepsilon \cdot \frac{dx(\omega)}{y(\omega)}$$

$$\frac{dx\left(\frac{-1}{\omega}\right)}{y\left(\frac{-1}{\omega}\right)} = -\frac{dx(\omega)}{y(\omega)},$$

woraus durch Integration folgt:

$$u(\omega+1) = \varepsilon\, u(\omega) + c_1, \quad u\left(\frac{-1}{\omega}\right) = -u(\omega) + c_2.$$

Die Werthe der Constanten c_1 c_2 erfahren wir durch Substitution des Werthes $\omega = i\infty$. Es zeigt sich, dass c_1 verschwindet, während

$$c_2 = \int_{i\infty}^{0} \frac{dx}{y}$$

wird. Indem wir die Substitution $\begin{pmatrix}1, & 1\\ 0, & 1\end{pmatrix}$ dreifach wiederholen und die hieraus entspringende Gleichung:

$$u(\omega+3) = -u(\omega)$$

für die zweite Gleichung verwenden, ist:

$$u\left(\frac{-1}{\omega+3}\right) = u(\omega) + c_2..$$

Aber die links stehende Substitution ist auf Grund des § 1 die Erzeugende einer G_6'; mithin ergiebt erst die sechsmalige Anwendung derselben eine mit der Identität mod. 6 congruente Substitution, d. h. erst $6 \,.\, c_2$ ist ein Multiplum von den Perioden Ω_1, Ω_2. Die nähere Untersuchung giebt:

$$6c_2 = \Omega_1 + \Omega_2,$$

wobei noch zu beachten, dass der Quotient der Perioden in Folge des äquianharmonischen Falles gleich ε ist:

$$\Omega_2 = \varepsilon \,.\, \Omega_1 .$$

Betrachten wir die Transformationen des u nur bezüglich der Perioden, so führen die beiden erzeugenden Operationen:

(4) $$u(\omega+1) = \varepsilon \,.\, u(\omega), \quad u\left(\frac{-1}{\omega}\right) = -u(\omega) + \frac{\Omega_1+\Omega_2}{6}$$

durch Wiederholung und Combination auf eine *Gruppe* von 72 Operationen, welche der G_{72} des § 1 holoedrisch isomorph ist.

Man hat in den beiden letzten Gleichungen auch das Mittel, die Abbildung des Polygons der Γ_{72} auf die Ebene des Integrals $u(\omega)$ zu studiren. Dabei erweist sich die in Fig. 4 entworfene schematische

Zeichnung als das conforme Abbild des fraglichen Polygons, vermittelt durch die Function*) $u(\omega)$.

Nebensächlich ist an dieser Stelle die analytische Darstellung von u, die ich indessen doch der Vollständigkeit halber noch anführen will. Späterer Entwicklung vorgreifend führe ich hier zunächst die Darstellungen von x, y als Quotienten von ϑ-Functionen an:

$$y = \left(\frac{\vartheta_2}{\Theta_2}\right)^2, \quad 1 + x = \frac{\Theta_2'}{\Theta_2}.$$

Hier ist in bekannter Weise ϑ_2 der Nullwerth:

$$\vartheta_2 = \vartheta_2(0, q),$$

während:

$$\Theta_2 = \vartheta_2(0, q^3), \qquad \Theta_2' = \vartheta_2(0, q^{\frac{1}{3}})$$

zu setzen sind.

Hierdurch findet sich:

$$u(\omega) = \int \frac{\Theta_2\, d\Theta_2' - \Theta_2'\, d\Theta_2}{\vartheta_2^2}, \tag{5}$$

woraus man sodann durch Einsetzen der bekannten Reihen und Integration die nachfolgende Darstellung für u erhält:

$$u(\omega) = 2 \sum_{m=1} \frac{\Psi(m)}{m} \cdot e^{\frac{m\pi i \omega}{3}} \tag{6}$$

Hier durchläuft m alle positiven ganzen Zahlen, die $\equiv 1 \pmod{6}$ sind, während $\Psi(m)$ folgende zahlentheoretische Function von m ist:

$$\Psi(m) = \sum \left(\frac{\nu}{3}\right) \nu.$$

Die Summe bezieht sich auf alle positiven ganzen Zahlen ν, welche im Verein mit positiven oder negativen ganzen Zahlen μ die Zahl m in der Form:

$$m = 3\mu^3 + \nu^2$$

darstellen. $\left(\frac{\nu}{3}\right)$ ist das Legendre'sche Zeichen.

§ 7.

Fortsetzung: Die Gruppen $\Gamma_{24}, \Gamma_{18}, \Gamma_6$.

Als Darstellung der Tetraederirrationalität $a(\omega)$ durch die Function x fand sich früher:

$$a = \frac{x^3 + 4}{3x^2}.$$

---

*) Die Function $u(\omega)$, deren Verwerthung für die Theorie der Modulfunctionen durch meine gegenwärtige Arbeit übrigens keineswegs erschöpft ist, bildet, sofern wir sie von der absoluten Invariante J abhängig ansehen, die nach dem Schema $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$ verzweigte s-Function des Herrn Schwarz.

Durch Differentiation dieser Gleichung ergiebt sich:

$$da = \frac{x^3 - 8}{3x^3} \cdot dx,$$

d. h. mit Rücksicht auf die Relation zwischen y und x:

$$da = \sqrt{3} \cdot \frac{y(9-y^2)}{3^{\frac{3}{2}}(1-y^2)} \cdot \frac{dx}{y}.$$

Nun ist aber nach Formel (3) § 4:

$$\sqrt{a^3 - 1} = \frac{y(9-y^2)}{3^{\frac{3}{2}}(1-y^2)},$$

sodass wir das Integral $u(\omega)$ auch darstellen können in der Form:

$$(1) \qquad u(\omega) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \int\limits_{i\infty}^{\omega} \frac{da}{\sqrt{a^3 - 1}}.$$

Dieses ist aber gerade das Integral der C_3:

$$(\sqrt{a^3 - 1})^2 = (a)^3 - 1,$$

welche oben eindeutig auf das Polygon der Γ_{24} bezogen wurde. Sofern wir daher die beiderseitigen Integrale als Functionen von ω auffassen, sind sie identisch. Nennen wir ein Paar primitiver Perioden für die Γ_{24}:

$$\Omega_1', \ \Omega_2' = \varepsilon \,.\, \Omega_1',$$

so giebt die Ueberlagerung des Polygons der Γ_{72} als Riemann'sche Fläche über dem der Γ_{24} folgenden Zusammenhang:

$$(2) \qquad \Omega_1 + \Omega_2 = 3\Omega_1', \quad -\Omega_1 + 2\Omega_2 = 3\Omega_2'.$$

Ein Gleiches gilt für die Gruppen Γ_{18}, Γ_6. Man transformirt $u(\omega)$ ohne Mühe in die Formen*):

$$(3) \qquad \begin{aligned} u(\omega) &= -\frac{1}{3\sqrt[3]{2}} \cdot \int\limits_{i\infty}^{\omega} \frac{d\lambda}{\lambda^{\frac{2}{3}}(1-\lambda)^{\frac{2}{3}}}, \\ u(\omega) &= \frac{1}{6\sqrt{3}} \int\limits_{i\infty}^{\omega} \frac{dJ}{J^{\frac{2}{3}}\sqrt{J-1}}, \end{aligned}$$

welche bez. den Curven der Γ_{18} und Γ_6 angehören.

Alle weiteren Einzelheiten fasse ich in Form einer Tabelle zusammen, in welcher die Moduln sechster Stufe als doppelt-periodische Functionen von u dargestellt sind. Dabei ist gesetzt:

---

*) Die zweite Form folgt auch leicht aus der Differentialgleichung, welche Herr Hurwitz in Bd. XXVI der Annalen pag. 125 für das Integral u angiebt.

$$\omega_1 = \int_{i\cdot\infty}^{0} \frac{dx(\omega)}{y(\omega)}, \qquad \omega_2 = \varepsilon \cdot \omega_1.$$

Man findet dann:

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
\sqrt[3]{J} &= \frac{1}{3}\wp(u, \omega_1, \omega_2),\\
\sqrt{J-1} &= \frac{1}{6\sqrt{3}}\wp'(u, \omega_1, \omega_2),\\
\sqrt[3]{\lambda(\lambda-1)} &= \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\wp(u, 2\omega_1 - \omega_2, \omega_1 + \omega_2),\\
\lambda - \frac{1}{2} &= \frac{1}{4}\ \wp'(u, 2\omega_1 - \omega_2, \omega_1 + \omega_2),\\
a &= \frac{4}{3}\wp(u, 2\omega_1, 2\omega_2),\\
\sqrt{a^3 - 1} &= \frac{4}{3\sqrt{3}}\wp'(u, 2\omega_1, 2\omega_2),\\
x &= \quad 4\wp(u, 4\omega_1 - 2\omega_2, 2\omega_1 + 2\omega_2),\\
y &= -4\wp'(u, 4\omega_1 - 2\omega_2, 2\omega_1 + 2\omega_2).
\end{aligned}
$$

§ 8.

Die 72 Transformationen der Curve dritter Ordnung in sich.

Den 72 incongruenten ω-Substitutionen ordneten wir in § 1 ebensoviele Verschiebungen des Polygons der Γ_{72} in sich zu. Ihnen entsprechend haben wir auch eine Gruppe von 72 eindeutigen Transformationen der Normalcurve:

$$y^2 = x^3 + 1$$

in sich zu constatiren, welche sich algebraisch aus den beiden erzeugenden Transformationen:

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
x' &= \varepsilon^4 x, & y' &= -y,\\
x' &= 2\cdot\frac{1+x+y}{1-2x+y}, & y' &= \frac{3(1+x)^2+3y}{(1+x)^2-3y}
\end{aligned}
$$

zusammensetzen.

Die erste Transformation bedeutet geometrisch eine Collineation während wir die Natur der andern sofort aus ihrer transcendenten Form erkennen. Die Substitution $\begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix}$ war eine von neun gleichberechtigten, deren Wirkung auf u allgemein in der Form:

$$(2)\qquad u' \equiv -u + c \quad (\text{mod. } \Omega_1, \Omega_2)$$

erscheint. Auf Grund bekannter Sätze aus der Theorie der Curven dritter Ordnung heisst dies, dass die Punkte der Curve mit den Argumenten $-c$, u, u', von denen die beiden letzten durch die gedachte

Transformation in einander übergeführt werden, auf einer geraden Linie liegen. Um den festen Punkt $-c$ der Curve haben wir ein Linienbüschel zu beschreiben; dann sind jedesmal die beiden beweglichen Schnittpunkte der einzelnen Geraden mit der Curve durch die Transformation einander zugeordnet.

Was die Lage der bez. neun Projectionscentren angeht, so bemerke man, dass bei den 72 eindeutigen Transformationen ein einzelner Punkt der Curve im Allgemeinen, d. h. falls in demselben die Invariante J keinen der Specialwerthe 0, 1, ∞ hat, auch 72 verschiedene Lagen annimmt. Nur für den Werth $J=\infty$ rücken die 72 Punkte zu je sechs in 12 Punkte zusammen, ebenso für $J=0$ zu je drei in 24 verschiedene und für $J=1$ zu je zwei in 36 Punkte. Da dem Argumente $u=0$ ein Wendepunkt der Curve zugehört, so gilt gleiches für die Punkte mit den Argumenten:

$$\frac{\Omega_1+\Omega_2}{3}, \quad \frac{2\Omega_1+2\Omega_2}{3}.$$

In diesen drei Wendepunkten, die übrigens auf der Curve durch die y-Axe ausgeschnitten werden, wird $J=\infty$. Von jedem derselben sind noch drei Tangenten möglich, deren neun Berührungspunkte wir auf der Curve fixiren wollen. Es sind diese die neun oben gemeinten Projectionscentren und zugleich die neun noch fehlenden Punkte, in denen $J=\infty$ wird. Die 4.9 bei den Transformationen G_2'' festbleibenden Punkte d. h. die 36 Berührungspunkte der von den fraglichen neun Centren noch möglichen Tangenten, sind dann die 36 Punkte, in denen $J=1$ wird.

Die sechs noch fehlenden Wendepunkte, die bez. auf den Geraden

$$y \pm i\sqrt{3} = 0$$

liegen, sind Punkte, in denen J verschwindet. Durch Tangentenziehen von diesen sechs Punkten aus erhält man 18 neue Punkte, in denen dann gleichfalls $J=0$ ist.

§ 9.

Die rückständigen Hauptmoduln sechster Stufe.

Die in den vorhergehenden Paragraphen gewonnenen Anschauungen können wir nun insbesondere noch dazu benutzen, die Betrachtung der Hauptmoduln zu ergänzen.

Vom Geschlecht Null waren auch die neun gleichberechtigten G_2'', so wie die acht ebenfalls gleichberechtigten G_3''. Ihnen entsprechend giebt es noch zwei Arten von Hauptmoduln sechster Stufe. Was die erste Art anlangt, so betrachte ich als Beispiel den zur Gruppe:

$$\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix}, \equiv \begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix} \text{ mod. } 6$$

gehörenden Modul.

Legen wir durch den Punkt $x(3) = 2$ und $y(3) = -3$, welcher zufolge der transcendenten Form G_2'':

$$u' \equiv -u + \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{6}$$

das im vorigen Paragraphen besprochene Projectionscentrum für diese Transformation abgiebt, ein Büschel von Geraden:

$$x - 2 - \tau(y+3) = 0,$$

so entsprechen einem willkürlichen Werthe von τ stets *zwei* bewegliche Punkte der Curve, welche durch die fragliche Transformation aus einander hervorgehen, jedem Punkte der Curve (x, y) hingegen ein Werth von τ. Betrachten wir somit umgekehrt τ als rationale Function auf der Curve

$$\tau = \frac{x-2}{y+3},$$

oder durch Vermittlung dieser Darstellung als elliptische Modulfunction sechster Stufe, so nimmt $\tau(\omega)$ auf dem Polygon der Γ_{72} jeden Werth in zwei Punkten an, die durch die Operation $\begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}$ aus einander hervorgehen. τ ist somit gerade der Hauptmodul, den wir suchen.

Es ist gestattet, statt eines Hauptmoduls auch eine lineare Function desselben zu gebrauchen. Ich benutze dieses und setze:

$$(1) \qquad \tau(\omega) = \frac{1 - 2x(\omega) - y(\omega)}{y(\omega) + 3}.$$

Fassen wir τ als Function des Integrals u auf, so leistet dieselbe eine Abbildung ihrer Ebene auf die Ebene von u, wie ich solche in Fig. 9 zur Darstellung gebracht habe, d. h. τ vermittelt die conforme Abbildung einer ganzen Ebene auf ein Rechteck mit den Seiten 1 und $\sqrt{3}$. Die Zusammengehörigkeit der freien Kanten, sowie eine Reihe von Werthen zur Orientirung über die Lage der reellen und imaginären τ-Axe habe ich in der Figur angebracht.

Man kann τ durch Wurzelziehungen aus der Tetraederirrationalität definiren, wie man aus folgender Beziehung entnehmen möge:

$$(2) \qquad \frac{a-1}{\sqrt{a^3-1}} = \sqrt{3} \cdot \frac{\tau(\tau^2-1)}{3\tau^2+1}.$$

Die mit τ gleichberechtigten Moduln sind ebenfalls lineare Functionen von x und y.

Die acht Substitutionen G_3'', die noch übrig sind, haben die transcendente Form:

$$u' \equiv \varepsilon^2 u + c_1, \equiv \varepsilon^4 u + c_2, \equiv u \quad (\text{mod. } \Omega_1\, \Omega_2),$$

so zwar, dass drei beliebige Punkte, die bei der einzelnen G_3'' sich cyklisch permutiren, als Summe ihrer Argumente u:

$$\frac{\alpha\Omega_1+\beta\Omega_2}{2}$$

ergeben. Die acht Substitutionen vertheilen sich auf die vier für α, β möglichen Combinationen (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1) so, dass der einzelnen Combination zwei G_3'' zugehören.

Für die Darstellung der acht entsprechenden Hauptmoduln als rationale Functionen auf der Curve dritter Ordnung folgt hieraus, dass dieselbe im Allgemeinen Functionen *zweiten* Grades in x, y sind; nur für die beiden speciellen Fälle, welche der Combination $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ zukommen, werden wir auf lineare Functionen von x und y geführt. Ich kann mich hier um so mehr auf die Behandlung eines dieser Fälle beschränken, als die 7 gleichberechtigten Moduln aus jenem durch lineare Transformation von ω hervorgehen und zur Ausführung der hierdurch angezeigten Rechnungen in den voraufgehenden Paragraphen alle Mittel gegeben sind.

Als Beispiel wähle ich:

$$u' \equiv \varepsilon^2 u + \frac{2\Omega_1+2\Omega_2}{3}, \quad \equiv \varepsilon^4 u + \frac{\Omega_1+\Omega_2}{3}, \quad \equiv u \quad (\text{mod. } \Omega_1, \Omega_2).$$

Nennen wir den fraglichen Hauptmodul $\sigma(\omega)$, so dürfen wir σ als Parameter eines Linienbüschels ansehen, dessen einzelne Gerade drei Punkte auf der Curve ausschneidet, welche sich bei der G_3'' cyklisch vertauschen.

Nun folgt: Die drei Punkte mit den Argumenten

$$u=0, \quad u=\frac{\Omega_1+\Omega_2}{3}, \quad u=\frac{2\Omega_1+2\Omega_2}{3}$$

sind Punkte der fraglichen Art. Zugleich sind sie die drei auf der y-Axe gelegenen Wendepunkte. Also ist diese Axe eine Linie des Büschels. In durchaus gleicher Weise sind die drei Wendepunkte mit den Argumenten $\frac{\Omega_1}{3}$, $\frac{2\Omega_1}{3}$, $\frac{\Omega_1+2\Omega_2}{3}$, die auf der Wendepunktsgeraden:

$$y-i\sqrt{3}=0$$

liegen, durch die G_3'' einander zugeordnet. Somit dürfen wir setzen:

$$(3) \qquad \sigma(\omega)=\frac{\varepsilon^2}{2\varepsilon-1}\cdot\frac{y-i\sqrt{3}}{x}.$$

$\sigma(\omega)$ als Function von u angesehen bildet seine Ebene auf das Sechseck in Fig. 3 ab, wobei nun aber die unter II genannte Deckung der Kanten stattfindet. Einige Zahlenwerthe geben wieder die Lage der reellen σ-Axe an.

Zum Schluss gebe ich noch die einfache Beziehung von $\sigma(\omega)$ zur Tetraederirrationalität an. Nach Formel (3) § 4 war:

$$\sqrt{1-a^3}=-\frac{(9-y^2)y}{3\sqrt{-3}\,(1-y^2)},$$

so dass:

$$1+\sqrt{1-a^3}=\frac{y^3-3y^2\sqrt{-3}-9y+3\sqrt{-3}}{3\sqrt{-3}\,(1-y^2)}$$

$$1+\sqrt{1-a^3}=\frac{(y-i\sqrt{3})^3}{-3i\sqrt{3}\cdot x^3}$$

und endlich:

$$(4)\qquad \sigma(\omega)=\sqrt[3]{1+\sqrt{1-a^3}}$$

wird.

§ 10.

Die Darstellung der x_i, y_i durch Thetafunctionen.

Anhangsweise gebe ich hier noch den Zusammenhang meiner Entwicklungen mit der gewöhnlichen Theorie der elliptischen Functionen an. Man würde sich dabei die Aufgabe stellen können, alle aus der genannten Theorie entspringenden Moduln der sechsten Stufe, deren Zahl nicht gering ist, als rationale Functionen auf der Curve dritter Ordnung darzustellen. Wenn ich hier nur einige wenige aus den Thetafunctionen hervorgehende Moduln betrachte, so schien diese Auswahl einerseits wegen ihrer sehr nahen Beziehung zu den Moduln des § 5, andrerseits in Rücksicht auf die sogleich zu machenden Anwendungen geboten.

Ich verstehe unter $\sigma_{\lambda,\mu}(\omega_1, \omega_2)$ oder kurz $\sigma_{\lambda,\mu}$ diejenigen *Theilwerthe* der Sigmafunction, welche Herr Klein im ersten Abschnitt § 1 der Abhandlung über „Elliptische Curven und Moduln n^{ter} Stufe" definirt und setze als den Theilungsgrad den zweiten fest. Den speciellen Theilwerth $\sigma_{1,0}$ bilde ich für die beiden Perioden:

$$\bar{\omega}_1=\frac{\omega_1}{3},\qquad \bar{\omega}_2=\omega_2$$

und nenne die hierdurch transformirte Function $\bar{\sigma}_{1,0}$; dann ist die vierte Potenz des Quotienten der transformirten durch die ursprüngliche Function eine Function des Periodenquotienten ω, für welche man auf Grund bekannter Formeln der σ-Function constatirt, dass sie bei der Untergruppe sechster Stufe:

$$\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1, & 1\\ 0, & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1, & 2\\ 0, & 1\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}1, & 5\\ 0, & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}\quad (\text{mod. } 6)$$

unverändert bleibt. Wir schliessen somit auf die Existenz der Gleichung

$$\left(\frac{\bar{\sigma}_{1,0}}{\sigma_{1,0}}\right)^4=\text{rat. funct. }(\tau),$$

wobei τ die in § 3 so benannte Grösse bedeutet. Die Reihenent-

wicklungen der σ-Function gestatten, die Form dieser rationalen Function zu erkennen und führen auf die Gleichung:

$$(1) \qquad \left(\frac{\bar{\sigma}_{1,0}}{\sigma_{1,0}}\right)^2 = \frac{\tau}{9\tau - 8},$$

so dass das Quadrat dieses Quotienten als lineare Function von τ im Wesentlichen mit dieser Grösse gleichwerthig ist.

Für die Function y finden wir ein Resultat von ähnlicher Einfachheit auf folgende Weise. Die Discriminante Δ bilde ich ebenfalls für die beiden Perioden $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$ und nenne die so transformirte Function $\bar{\Delta}$. Der Quotient dieser durch die ursprüngliche Function Δ bleibt dann bei allen Substitutionen erhalten, die mod. 3 der Identität congruent sind; d. h. jener Quotient ist eine rationale Function von a und die Reihenentwicklungen von Δ geben dieselbe in der Form:

$$\frac{\bar{\Delta}}{\Delta} = \left(\frac{27}{a^3 - 1}\right)^2.$$

In Folge des Zusammenhanges zwischen a und τ ergiebt sich hieraus:

$$\sqrt{\frac{\bar{\Delta}}{\Delta}} = \left(\frac{9\tau - 8}{\tau}\right)^2 \frac{1}{1 - \tau},$$

so dass im Verein mit (1) sich findet:

$$\left(\frac{\sqrt[8]{\Delta} \cdot \sigma_{1,0}}{\sqrt[8]{\bar{\Delta}} \cdot \bar{\sigma}_{1,0}}\right)^4 = 1 - \tau.$$

Aus der Verbindung der Functionen ϑ_1 und σ leitet man ab:

$$\sqrt[8]{\Delta} \cdot \sigma_{1,0} = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_1}} \cdot \vartheta_2, \qquad \sqrt[8]{\bar{\Delta}} \cdot \bar{\sigma}_{1,0} = \sqrt{3}\sqrt{\frac{2\pi}{\omega_1}} \cdot \Theta_2,$$

wo ϑ_2 in bekannter Weise den Nullwerth der Function $\vartheta_2(x, q)$ bezeichnet und Θ_2 durch die mehrfach definirte Transformation dritten Grades aus ϑ_2 entsteht. Durch Einführung der Thetafunctionen findet sich:

$$(2) \qquad \left(\frac{\vartheta_2}{\Theta_2}\right)^2 = 3\sqrt{1 - \tau} = y.$$

Für die übrigen drei Repräsentanten der Transformation dritten Grades führe ich die abkürzenden Bezeichnungen ein:

$$\vartheta_\alpha\left(0, q^{\frac{1}{3}}\right) = \sqrt{-3}\,\Theta_\alpha', \quad \vartheta_\alpha\left(0, \varepsilon^2 q^{\frac{1}{3}}\right) = \sqrt{-3}\,\Theta_\alpha'',$$
$$\vartheta_\alpha\left(0, \varepsilon^4 q^{\frac{1}{3}}\right) = \sqrt{-3}\,\Theta_\alpha''',$$

wobei übrigens die im Folgenden auftretenden Wurzeln aus Θ_α^i so zu wählen sind, dass im unendlich fernen Punkte der imaginären ω-Axe die ersten Annäherungen gelten:

$$\sqrt{\Theta_2}=\sqrt{2}\,q^{\frac{3}{8}},\quad \sqrt{\Theta_0}=1,\quad \sqrt{\Theta_3}=1,$$

$$\sqrt{-3}\sqrt{\Theta_2'}=\sqrt{2}\,q^{\frac{1}{24}},\quad \sqrt{-3}\sqrt{\Theta_0'}=1,\quad -\sqrt{-3}\sqrt{\Theta_3'}=1,$$

während die Formeln für Θ_α'' und Θ_α''' aus den entsprechenden für Θ_α' durch die Operationen resp. $\begin{pmatrix}1, 2\\0, 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1, 4\\0, 1\end{pmatrix}$ hervorgehen.

Nehmen wir nunmehr die Bezeichnungen des § 5 wieder auf, so reiht sich neben die Darstellung von y das folgende System von Formeln:

$$(3)\qquad \begin{aligned} &\left(\frac{\vartheta_2}{\Theta_2}\right)^2=y,\quad \left(\frac{\vartheta_3}{\Theta_3}\right)^2=\frac{y+3}{y-1},\quad \left(\frac{\vartheta_0}{\Theta_0}\right)^2=\frac{y-3}{y+1},\\ &\left(\frac{\vartheta_2}{\Theta_2^{(i)}}\right)^2=y_i,\quad \left(\frac{\vartheta_3}{\Theta_3^{(i)}}\right)^2=\frac{y_i+3}{y_i-1},\quad \left(\frac{\vartheta_0}{\Theta_0^{(i)}}\right)^2=\frac{y_i-3}{y_i+1}.\end{aligned}$$

Die Darstellung der Function y_1 im vollen Modulsystem war:

$$y_1=-\frac{3y}{(1+x)^2}.$$

Hieraus fliesst ohne Weiteres die Darstellung von x durch Thetafunctionen. Ich stelle sogleich die drei zusammengehörigen Formeln neben einander:

$$(4)\quad 1+x=\sqrt{-3}\,\frac{\Theta_2'}{\Theta_2},\quad 1+x_1=\sqrt{-3}\cdot\frac{\Theta_0'}{\Theta_0},\quad 1+x_2=\sqrt{-3}\,\frac{\Theta_3'}{\Theta_3}.$$

Eine etwas andere Darstellung von x entspringt aus der Muliplication der zweiten und dritten Gleichung:

$$(1+x_1)(1+x_2)=-3\,\frac{\Theta_0'\Theta_3'}{\Theta_0\Theta_3}.$$

Die am Schluss von § 5 angegebenen Relationen gestatten hieraus die erste der drei folgenden Formeln zu berechnen:

$$(5)\qquad 1-\frac{2}{x}=\sqrt{-3}\sqrt{\frac{\Theta_0'\Theta_3'}{\Theta_0\Theta_3}},\quad 1-\frac{2}{x_1}=\sqrt{-3}\sqrt{\frac{\Theta_2'\Theta_3'}{\Theta_2\Theta_3}},$$

$$1-\frac{2}{x_2}=\sqrt{-3}\sqrt{\frac{\Theta_0'\Theta_2'}{\Theta_0\Theta_2}}.$$

§ 11.

Die Thetarelationen für Transformation dritten Grades.

Der nun gewonnene Zusammenhang der Grössen x_i, y_i mit den Thetafunctionen lässt sich für die Theorie der letztern verwerthen. Bereits in der Einleitung erwähnte ich eine Reihe von Untersuchungen, welche zu ihrem gemeinsamen Thema die Aufstellung von *Thetarelationen* haben, die zwischen den Thetamoduln *getheilter* und *transformirter* Perioden bestehen.

In den Formeln (3), (4), (5) des vorigen Paragraphen im Verein mit Formel (1) § 4 haben wir alle Mittel beisammen, um die gedachten Relationen für den Fall der Transformation dritten Grades aufzustellen. Zum Belege dessen führe ich einige Beispiele an.

Es war:

$$(1)\quad \left(\frac{\vartheta_2}{\Theta_2}\right)^2 = y,\qquad (2)\quad \left(\frac{\vartheta_3}{\Theta_3}\right)^2 = \frac{y+3}{y-1},\qquad (3)\quad \left(\frac{\vartheta_0}{\Theta_0}\right)^2 = \frac{y-3}{y+1}.$$

Nehmen wir hinzu, dass die Darstellungen des Moduls λ durch Theta die folgenden sind:

$$\lambda = -\left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta_2}\right)^4,\qquad 1-\lambda = \left(\frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\right)^4,$$

und dass sich somit diese Thetaquotienten als Functionen von y in dieser Weise darstellen:

$$(4)\qquad \left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta_2}\right)^4 = \frac{(y-3)^3(y+1)}{16y^3},\qquad \left(\frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\right)^4 = \frac{(y+3)^3(y-1)}{16y^3},$$

so berechnet man aus den Formeln (1) bis (4) sofort die vier neuen Gleichungen:

$$(5)\quad \sqrt{\frac{\Theta_2^3\vartheta_3}{\vartheta_2\Theta_3^3}} = \frac{2}{y-1},\qquad\qquad (6)\quad \sqrt{\frac{\Theta_2^3\vartheta_0}{\vartheta_2\Theta_0^3}} = \frac{2}{y+1},$$

$$(7)\quad \sqrt{\frac{\vartheta_2^3\Theta_3}{\Theta_2\vartheta_3^3}} = \frac{2y}{y+3},\qquad\qquad (8)\quad \sqrt{\frac{\vartheta_2^3\Theta_0}{\Theta_2\vartheta_0^3}} = \frac{2y}{y-3}.$$

Indem wir nun den Werth von y aus (1) in (5), (6), (7), (8) nach einander einsetzen, erhalten wir die folgenden Relationen:

$$\frac{\vartheta_2^2-\Theta_2^2}{2\sqrt{\vartheta_2\Theta_2}} = \sqrt{\frac{\Theta_3^3}{\vartheta_3}},\qquad \frac{\vartheta_2^2+\Theta_2^2}{2\sqrt{\vartheta_2\Theta_2}} = \sqrt{\frac{\Theta_0^3}{\vartheta_0}},$$

$$\vartheta_2^2+3\,\Theta_2^2 = 2\sqrt{\vartheta_2\Theta_2}\sqrt{\frac{\vartheta_3^3}{\Theta_3}},\quad \vartheta_2^2-3\,\Theta_2^2 = 2\sqrt{\vartheta_2\Theta_2}\sqrt{\frac{\vartheta_0^3}{\Theta_0}}.$$

Einige weitere Beispiele entstehen durch Elimination von y aus den Formeln (1) und (2):

$$(\vartheta_2^2-\Theta_2^2)\vartheta_3^2 = (\vartheta_2^2+3\Theta_2^2)\Theta_3^2,$$

ebenso aus (5) und (7)

$$\vartheta_2^2\Theta_3^2-\vartheta_3^2\Theta_2^2 = 2\vartheta_0\Theta_0\sqrt{\vartheta_2\vartheta_3}\sqrt{\Theta_2\Theta_3},$$

sowie aus (7) und (8):

$$\sqrt{\frac{\vartheta_2^3}{\Theta_2}}-\sqrt{\frac{\vartheta_0^3}{\Theta_0}}-\sqrt{\frac{\vartheta_3^3}{\Theta_3}} = 0,$$

und aus (5), (6), (7):

$$\sqrt{\frac{\Theta_3^3}{\vartheta_3}}+\sqrt{\frac{\Theta_0^3}{\vartheta_0}}-\sqrt{\frac{\vartheta_2^3}{\Theta_2}} = 0.$$

Ich brauche kaum zu bemerken, dass gleiche Relationen auch für die $\Theta_\alpha^{(i)}$ gelten. Wollen wir Formeln, in welche zwei verschiedene

Repräsentanten der Transformation 3ten Grades eingehen, z. B. solche zwischen Θ_α und Θ_α', so haben wir zu dem Ende die x_i heranzuziehen. Indem ich hier die vom vorigen Paragraphen in etwas abweichende Bezeichnungweise:

$$\vartheta_\alpha\left(0, \varepsilon^{2i} \cdot q^{\frac{1}{3}}\right) = \Theta_\alpha^{(i+1)}$$

wähle, erscheinen die Beziehungen der x_i zu den Theta in folgender Form:

$$1 + x = \frac{\Theta_2'}{\Theta_2}, \quad 1 + x_1 = \frac{\Theta_0'}{\Theta_0}, \quad 1 + x_2 = \frac{\Theta_3'}{\Theta_3},$$

$$\frac{2}{x} = 1 + \sqrt{\frac{\Theta_0'\Theta_3'}{\Theta_0\Theta_3}}, \quad \frac{2}{x_1} = 1 + \sqrt{\frac{\Theta_2'\Theta_3'}{\Theta_2\Theta_3}}, \quad \frac{2}{x_2} = 1 + \sqrt{\frac{\Theta_0'\Theta_2'}{\Theta_0\Theta_2}}.$$

Die erste zwischen den x_i bestehende Gleichung:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 0$$

schreibt sich dann als Thetarelation:

$$\frac{\Theta_0}{\Theta_0' - \Theta_0} + \frac{\Theta_2}{\Theta_2' - \Theta_2} + \frac{\Theta_3}{\Theta_3' - \Theta_3} = 0,$$

$$\sqrt{\frac{\Theta_0'\Theta_3'}{\Theta_0\Theta_3}} + \sqrt{\frac{\Theta_2'\Theta_3'}{\Theta_2\Theta_3}} + \sqrt{\frac{\Theta_0'\Theta_2'}{\Theta_0\Theta_2}} = -3.$$

Die vierte Gleichung:

$$x \cdot x_1 \cdot x_2 + 4 = 0$$

heisst jetzt:

$$(\Theta_0' - \Theta_0)(\Theta_2' - \Theta_2)(\Theta_3' - \Theta_3) + 4\Theta_0\Theta_2\Theta_3 = 0,$$

$$\left(\sqrt{\Theta_0\Theta_2} + \sqrt{\Theta_0'\Theta_2'}\right)\left(\sqrt{\Theta_2\Theta_3} + \sqrt{\Theta_2'\Theta_3'}\right)\left(\sqrt{\Theta_0\Theta_3} + \sqrt{\Theta_0'\Theta_3'}\right) = -2\Theta_0\Theta_2\Theta_3.$$

Leicht beweist man auch noch:

$$\left(\sqrt{\Theta_0} - \sqrt{\Theta_0'}\right)\left(\sqrt{\Theta_2} - \sqrt{\Theta_2'}\right)\left(\sqrt{\Theta_3} - \sqrt{\Theta_3'}\right) = -2\sqrt{\Theta_0\Theta_2\Theta_3}$$

sowie:

$$\sqrt{\frac{\Theta_3}{\Theta_3'}} + \sqrt{\frac{\Theta_0}{\Theta_0'}} = \frac{2\sqrt{\Theta_2\Theta_2'}}{\Theta_2' - 3\Theta_2}$$

und andere mehr.

Braunschweig, October 1886.

Ueber Differentiirbarkeit und Anschaulichkeit der stetigen Functionen.

(Mit einer Figurentafel).

Von

Alfred Köpcke in Ottensen.

Das Vorurtheil, eine stetige Function müsse immer einen Differentialquotienten haben, ist schon durch eine Reihe von Beispielen widerlegt; der Fehler in dem Beweise Ampère's*) für dieselbe Behauptung ist längst aufgedeckt, und man weiss auch, was an die Stelle des dort benutzten Hülfssatzes: „$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$ kann nicht in einem ganzen Intervalle einer stetigen Function überall 0 oder überall ∞ sein" zu treten hat.**)

Bei der Mehrzahl der erwähnten Beispiele fällt neben dem Mangel des Differentialquotienten auf, dass sie in jedem noch so kleinen Intervall unendlich viele Maxima und Minima haben, oder, anders ausgedrückt, dass sie in keinem Intervalle durchgehends zu- oder abnehmen. Das hervorragendste dieser Beispiele, weil zugleich das einzige, welches wirklich in keinem Punkte Differentiation zulässt, ist durch Herrn Prof. Weierstrass gegeben und von Wiener im Crelle'schen Journal ausführlich behandelt.***) Unsere menschliche Vorstellungskraft erlahmt nun vor beiden Aufgaben, sowohl vor derjenigen, eine stetige Punktfolge zu denken, an die sich nirgends eine Tangente legen lässt, wie vor der anderen, solche Punktfolge zu denken, ohne dass sie in irgend einem Intervalle durchgehends steigt oder fällt.

*) Ampère: Recherches sur quelques points de la théorie des fonctions dérivées; Journal de l'école polytechnique Cah. 13, p. 148. Raabe, Differential- und Integralrechnung I, p. 7. Hankel, Artikel Grenze in Ersch und Gruber p. 201. Du Bois-Reymond, Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen. Borchardt's Journal Bd. 79, p. 27.

**) Dini, Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali. Pisa 1878. § 145 und folgende.

***) Du Bois-Reymond, Crelle Bd. 79, p. 29. Wiener, Crelle Bd. 90.

Trotzdem muss man Wiener beistimmen, dass durch das Weierstrass'sche Beispiel keineswegs die „Unbegreiflichkeit" ins lichte Gebiet der Mathematik eingezogen sei. Solcher Ausspruch wäre nicht einmal einem weiteren von Weierstrass gegebenen Beispiele einer stets wachsenden und dennoch nicht differentiirbaren Function gegenüber gerechtfertigt. Durch dieses Beispiel wird nur das leicht sich einstellende Vorurtheil widerlegt, als seien jene zwei Schwierigkeiten für die Vorstellung untrennbar verbunden, und diese Annahme ist nicht besser, als die alte, es könnten beide Schwierigkeiten überhaupt nicht eintreten. Immer wieder verfällt man dem Irrthum, eine Zuordnung von Functionswerthen zum Argument müsse, weil sie durch Punkte einer Ebene *darstellbar* ist, auch in der Ebene *anschaubar* sein; von diesem Irrthume müssen wir uns frei machen — das ist die einzige Lehre, die sich aus allen vorhandenen Beispielen ziehen lässt; jedes einzelne *beweist*, dass stetige Punktfolgen nicht immer *anschaulich* zu sein brauchen, und ausser dieser Erkenntniss bieten sie keine Unbegreiflichkeiten; in dieser einen Lehre selbst aber, dass Stetigkeiten allein noch keine Anschaulichkeit erzeugt, lässt sich kein Widerspruch aufweisen, denn die „Bestimmung *Anschaulichkeit* ist nicht deutlich formulirbar."*)

Durch alle Beispiele von anschaulichen Functionen ist bisher die Frage unerledigt geblieben, ob eine stetige Function in jedem Intervalle Maxima und Minima besitzen und dabei in jedem Punkte differentiirbar sein könne. Hankel's Beispiel dieser Art leidet an einem Fehler im Beweise.**) Du Bois-Reymond ist geneigt, die fragliche Functionsart für unmöglich zu halten, fügt aber hinzu, dass sein Raisonnement nicht als Beweis gelten solle.***) Dini ist der gerade entgegengesetzten Ansicht und hält es für „wenigstens sehr wahrscheinlich, dass auch differentiirbare stetige Functionen mit Maximis und Minimis in jedem Intervalle möglich sind."†) Das folgende Beispiel wird Dini's Vermuthung bestätigen.

In einer Ebene mit rechtwinkeligem Coordinatensystem sei eine gebrochene Linie mit den Eckpunkten

$$x = 0,\ y = 0;\ x = \frac{1}{2},\ y = \frac{1}{2};\ x = 1,\ y = 0$$

gezeichnet; die durch dieses gleichschenkelige Dreieck mit der Basis 1 und der Höhe $\frac{1}{2}$ definirte Function werde mit $\mathfrak{S}_0(x)$ bezeichnet.

---

*) Du Bois-Reymond, Ueber Doppelintegrale. Crelle, Bd. 94.

**) Hankel, Tübinger Universitätsschriften 1870, (oder auch Mathematische Annalen Bd. 20).

***) Du Bois-Reymond, Crelle, Bd. 79.

†) Dini, Fondamenti pag. 283 (§ 200).

Eine zweite gebrochene Linie entstehe in folgender Weise (vergleiche dazu Fig. 1):

Lege durch den Nullpunkt eine Gerade G_0, so dass für sie $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{10}$, durch den Punkt $x = \frac{1}{4}$ der Abscissenaxe aber 6 Gerade

$$\begin{array}{lcccccc} & G_1 & G_3 & G_5 & G_7 & G_9 & G_{11} \\ \text{für welche} & & & & & & \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = & -\frac{1}{10} & -\frac{3}{10} & -\frac{5}{10} & -\frac{7}{10} & -\frac{9}{10} & -\frac{11}{10}. \end{array}$$

Durch den Schnittpunkt $(G_0 G_3)$ von G_0 mit G_3 (a in Fig. 1) sei eine Parallele G_1' zu G_1 gelegt; dann durch $(G_1' G_5)$ oder b eine Gerade $G_3' \parallel G_3$, durch $(G_3' G_7)$ oder c ein $G_5' \parallel G_5$, endlich durch $(G_5' G_9)$ ein $G_7' \parallel G_7$ — dann bilden Theile der Geraden $G_0\, G_1' G_3' G_5' G_7' G_{11}$ ($\cdots$ man beachte, dass der Zeiger 9 fehlt) eine gebrochene Linie; zwischen $x = \frac{1}{4}$ und $x = \frac{1}{2}$ erstrecke sich ein zu ihr symmetrischer, dann noch negativ genommener Ast;*) zwischen $x = \frac{1}{2}$ und $x = 1$ sei die Function symmetrisch zu ihrem Bau zwischen $x = 0$ und $x = \frac{1}{2}$. Diese vollständige gebrochene Linie werde als Function mit $g_1(x)$ bezeichnet, und es sei

$$\mathfrak{G}_0(x) + g_1(x) = \mathfrak{G}_1(x).$$

$g_1(x)$ sowohl, wie $\mathfrak{G}_1(x)$ bestehen zwischen $x = 0$ und $x = 1$ aus 22 verschiedenen geradlinigen Stücken. $\frac{\Delta \mathfrak{G}_1(x)}{\Delta x}$ ist zwischen $x = 0$ und $x = \frac{1}{2}$ nur einmal negativ, nämlich $= -\frac{1}{10}$ von dem Maximum E bei $x = \frac{63}{256}$ bis zum Minimum E' bei $x = \frac{65}{256}$; ebenso ist $\frac{\Delta \mathfrak{G}_1(x)}{\Delta x}$ zwischen $x = \frac{1}{2}$ und $x = 1$ nur einmal positiv, nämlich $= + \frac{1}{10}$ von dem Minimum F bei $x = \frac{191}{256}$ bis zum Maximum F' bei $x = \frac{193}{256}$. In $x = \frac{1}{4}$ ist $g_1(x) = 0$ und $\mathfrak{G}_1(x)$ schneidet das daselbst zunehmende $\mathfrak{G}_0(x)$ in einem Punkte M; in $x = \frac{3}{4}$ ist wieder $g_1(x) = 0$ und $\mathfrak{G}_1(x)$ schneidet das dort absteigende $\mathfrak{G}_0(x)$ in N.

Zu jedem ansteigenden geradlinigen Theile von $\mathfrak{G}_1(x)$ werde dann in ähnlicher Weise, wie $g_1(x)$ für den Theil von $\mathfrak{G}_0(x)$ zwischen $x=0$ und $x=\frac{1}{2}$ gebaut ist, eine gebrochene Linie construirt; wenn nämlich für den betreffenden Theil, welcher von $x = \eta$ bis $x = \xi$ reichen

---

*) Wobei der erste geradlinige Theil hinter $x = \frac{1}{4}$ mit dem letzten vor $x = \frac{1}{4}$ in *eine* Gerade zusammenfällt — Fig. 1 von c bis c'.

möge $(\eta < \xi)$, $\frac{\Delta \mathfrak{G}_1(x)}{\Delta x} = p_1$ ist, so werde durch η eine Gerade G_0 mit $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{p_1}{10^2}$, durch $\frac{\xi+\eta}{2}$ aber eine Reihe von 51 Geraden $G_1\, G_3\, G_5 \ldots G_{101}$ gelegt, für welche

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{p_1}{10^2},\quad -\frac{3p_1}{10^2},\quad -\frac{5p_1}{10^2},\ldots,-\frac{101\,p_1}{10^2}$$

sei; die weitere Construction mit Hülfe von Parallelen G_1' durch $(G_0\,G_3)$ zu G_1, durch $(G_1'G_5)$ zu G_3 u. s. w. liefert dann eine gebrochene Linie von $x = \eta$ bis $x = \frac{\eta+\xi}{2}$, an welche sich ein symmetrischer, aber negativ genommener Ast von $x = \frac{\eta+\xi}{2}$ bis $x = \xi$ anschliessen möge. Die gleiche Construction eignet sich für den Fall eines absteigenden geradlinigen Theils von $\mathfrak{G}_1(x)$, für den nur p_1 negativ ist, und für den die gebrochene Linie einen Bau zeigt, analog demjenigen von $g_1(x)$ zwischen $x = \frac{1}{2}$ und $x = 1$.*)

Die Gesammtheit der so für jeden einzelnen Theil von $\mathfrak{G}_1(x)$ construirten gebrochenen Linien werde als Function mit $g_2(x)$ bezeichnet, und es sei

$$\mathfrak{G}_1(x) + g_2(x) = \mathfrak{G}_2(x);$$

$g_2(x)$ und $\mathfrak{G}_2(x)$ bestehen jedes bereits aus $22 \,.\, 101 = 2222$ verschiedenen geradlinigen Theilen. Zu jedem Theile von $\mathfrak{G}_1(x)$ finden sich in $\mathfrak{G}_2(x)$ Punkte, wie E, M, E' oder wie F, N, F', d. h. Maximum, Schnittpunkt, Minimum oder die umgekehrte Folge, je nachdem $\frac{\Delta \mathfrak{G}_1(x)}{\Delta x}$ positiv oder negativ war.

Bildet man ferner $g_3(x)$ unter Benutzung von $\frac{p_2}{10^3}$, $g_4(x)$ mit $\frac{p_3}{10^4}$ u. s. w. und bezeichnet man die Summe

$$G_0(x) + g_1(x) + g_2(x) + \cdots + g_n(x)$$

mit $\mathfrak{G}_n(x)$**), so behaupte ich:

„Die Functionen $\mathfrak{G}_n(x)$ nähern sich mit wachsendem n einer Grenzfunction $\mathfrak{G}(x)$, welche

1) überall eindeutig endlich definirt ist;
2) überall stetig ist;

---

*) Fig. 2ª zeigt die Construction für einen aufsteigenden, Fig. 2ᵇ für einen absteigenden Theil von $\mathfrak{G}_1(x)$.

NB. Ein Blick auf die hinzugeschriebenen Zahlen zeigt, dass diese Figuren nicht mehr in richtigen Verhältnissen gezeichnet werden konnten; in 2ª sind die Ordinaten von $g_2(x)$ viel zu gross, doch ist auf der Abscissenaxe noch dieselbe Einheit gewählt, wie in Fig. 1, während 2ᵇ in weit grösserem Massstabe gedacht ist.

**) Die Gestalt von $\mathfrak{G}_2(x)$ ist in Fig. 2ᵇ durch eine punktirte Linie angedeutet.

3) überall einen endlichen Differentialquotienten besitzt (vorwärts und rückwärts);
4) in jedem beliebigen Intervalle Maxima und Minima bildet."

I. $\mathfrak{G}(x)$ ist überall eindeutig endlich definirt.

Hat $\mathfrak{G}_n(x)$ in $x = \xi_n^1, \xi_n^2, \ldots$ Ecken, so ist für dieselben x-Werthe $g_{n+1}(x) = 0$ — ausserdem auch in den Mitten zwischen jenen x-Werthen. So liegen die Ecken von $\mathfrak{G}_1(x)$ bei $\xi_1{}^1 = \frac{3}{16}$, $\xi_1{}^2 = \frac{7}{32}$, $\xi_1{}^3 = \frac{15}{64}$ u. s. w. und es ist

$$g_2\left(\frac{3}{16}\right) = 0, \qquad g_2\left(\frac{7}{32}\right) = 0, \qquad g_2\left(\frac{15}{64}\right) = 0,$$

$$g_2\left(\frac{13}{64}\right) = 0, \qquad g_2\left(\frac{29}{128}\right) = 0$$

u. s. w.

In allen Werthen ξ_n^s und $\frac{\xi_n^s + \xi_n^{s+1}}{2}$, wo $g_{n+1}(x) = 0$, ist auch

$$g_{n+m}(x) = 0,$$

sodass sowohl $\mathfrak{G}_n(\xi_n^s)$, wie auch $\mathfrak{G}_n\left(\frac{\xi_n^s + \xi_n^{s+1}}{2}\right)$ durch die ferneren Constructionen keine Veränderung mehr erleidet. $\mathfrak{G}(\xi_n^s)$ und $\mathfrak{G}\left(\frac{\xi_n^s + \xi_n^{s+1}}{2}\right)$ sind daher durch eine endliche Zahl von Rechnungsoperationen zu finden als *rationale* Werthe.

Aber auch für die übrigen x-Werthe, die nie unter den Grössen ξ_n^s und $\frac{\xi_n^s + \xi_n^{s+1}}{2}$ vorkommen, ist $\mathfrak{G}(x)$ eindeutig endlich definirt.

Die geradlinigen Theile von $\mathfrak{G}_n(x)$ erstrecken sich über ein Intervall $\xi_n^{s+1} - \xi_n^s \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ (wobei die Gleichheit nur für den Fall $n = 0$ vorkommt).

Das für einen solchen Theil constante $\frac{\Delta \mathfrak{G}_n(x)}{\Delta x} = p_n$ hat die Form eines Productes aus Factoren

$$1 + \frac{1}{10^n} \quad \text{oder} \quad 1 - \frac{m}{10^n} \, (m \leq 10^n - 3)$$

und

$$\pm \frac{1}{10^n};$$

ein solcher Werth p_n liegt daher zwischen den Grenzen $\pm P$, wenn

$$\left(1+\frac{1}{10}\right)\left(1+\frac{1}{10^2}\right)\left(1+\frac{1}{10^3}\right)\cdots=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{10^n}\right)=P^{*}).$$

In demselben Intervall von ξ_n^s bis ξ_n^{s+1} ist $\frac{\Delta g_{n+1}(x)}{\Delta x}$ nicht constant, sondern schwankt von

$$+\frac{p_n}{10^{n+1}} \text{ bis } -p_n\left(1+\frac{1}{10^{n+1}}\right),$$

hält sich also in den Grenzen $+\frac{P}{10^{n+1}}$ und $-P\left(1+\frac{1}{10^{n+1}}\right)$. Der numerisch grösste Werth, den $g_{n+1}(x)$ in diesem Intervalle erreicht, fällt noch vor $x=\frac{\xi_n^s+\xi_n^{s+1}}{2}$, ist daher $<\frac{P}{10^{n+1}}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\frac{1}{2}$. So erreicht $g_1(x)$ sein Maximum in $x=\frac{3}{16}$, d. h. vor $x=\frac{1}{4}$; der grösste numerische Werth von $g_1(x)$ ist daher $=\frac{1}{10}\cdot\frac{3}{16}$. $g_2(x)$ in Fig. 2ᵃ hat sein Maximum bei $x=\frac{9}{128}$, d. h. vor $x=\frac{3}{32}$, im Werthe von

$$\left(1+\frac{1}{10}\right)\cdot\frac{1}{100}\cdot\frac{9}{128}<\frac{P}{100}\cdot\frac{1}{2^3}.$$

Aus dieser oberen Grenzbestimmung ist der Werth p_n fortgefallen, d. h. $g_{n+1}(x)$ erreicht auch in anderen Intervallen den Werth $\frac{1}{2}\cdot\frac{P}{20^{n+1}}$ nicht. Daher ist

$$|g_{n+1}(x)+g_{n+2}(x)+\cdots|<\frac{P}{2}\left(\frac{1}{20^{n+1}}+\frac{1}{20^{n+2}}+\cdots\right)<\frac{P}{2}\cdot\frac{1}{20^n}$$

also für jedes n und m:

$$\mathfrak{G}_{n+m}(x)=\mathfrak{G}_n(x)\pm\frac{\delta}{2}\cdot\frac{P}{20^n}\cdots\delta<1.$$

---

*) So ist z. B.

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{\Delta\mathfrak{G}_1(x)}{\Delta x}\right)_{x=0\cdots\frac{3}{16}} &= 1+\frac{1}{10}\\
\left(\frac{\Delta\mathfrak{G}_1(x)}{\Delta x}\right)_{x=\frac{3}{16}\cdots\frac{7}{32}} &= 1-\frac{1}{10}\\
&\text{u. s. w.}\\
\left(\frac{\Delta\mathfrak{G}_1(x)}{\Delta x}\right)_{x=\frac{63}{256}\cdots\frac{65}{256}} &= -\frac{1}{10}
\end{aligned}\right\}\text{Fig. 1}$$

$$\left(\frac{\Delta\mathfrak{G}_2(x)}{\Delta x}\right)_{x=0\cdots\frac{9}{128}\text{ (Fig. 2a.)}}=\left(1+\frac{1}{10}\right)\left(1+\frac{1}{100}\right)$$

$$\left(\frac{\Delta\mathfrak{G}_2(x)}{\Delta x}\right)_{x=\frac{3}{16}\cdots\frac{51}{256}}=\left(1-\frac{1}{10}\right)\left(1+\frac{1}{100}\right)$$

$$\left(\frac{\Delta\mathfrak{G}_2(x)}{\Delta x}\right)_{x=\frac{1}{4}-\frac{1}{2^{10}}\cdots\frac{1}{4}+\frac{1}{2^{10}}\text{ (Fig. 2b)}}=\left(-\frac{1}{10}\right)\cdot\left(-\frac{1}{100}\right).$$

Da für grosse n aber $\frac{P}{20^n}$ beliebig klein wird, folgt nach bekannter Schlussweise zunächst die *Existenz* nur eines einzigen Werthes $\mathfrak{G}(x)$, in dessen beliebiger Nähe unendlich viele der $\mathfrak{G}_{n+m}(x)$ liegen. Ueber die *Grösse* von $\mathfrak{G}(x)$ folgt, dass für jedes n gilt:

$$\mathfrak{G}_n(x) - \frac{1}{2}\cdot\frac{P}{20^n} \leqq \mathfrak{G}(x) \leqq \mathfrak{G}_n(x) + \frac{1}{2}\cdot\frac{P}{20^n}$$

also:

$$\mathfrak{G}(x) = \mathfrak{G}_n(x) + \frac{\delta}{2}\cdot\frac{P}{20^n}\cdots|\delta|\leqq 1.$$

Demnach ist für jedes x die Function $\mathfrak{G}(x)$ eindeutig definirt und endlich.

II. $\mathfrak{G}(x)$ ist überall stetig.

$\mathfrak{G}_n(x)$ ist stetig, d. h. es giebt ein $\Delta\xi_n$, sodass für alle $\Delta x \leqq \Delta\xi_n$ die Differenz $\Delta\mathfrak{G}_n(x) = \mathfrak{G}_n(x+\Delta x) - \mathfrak{G}_n(x)$ numerisch kleiner als eine beliebig kleine Grösse ε ist. Ausserdem gilt nach dem Vorigen für alle Werthe der Grössen x, Δx und n:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{G}(x+\Delta x) &= \mathfrak{G}_n(x+\Delta x) + \frac{\delta_1}{2}\cdot\frac{P}{20^n}\cdots|\delta_1|\leqq 1\\
\mathfrak{G}(x) &= \mathfrak{G}_n(x) + \frac{\delta_2}{2}\cdot\frac{P}{20^n}\cdots|\delta_2|\leqq 1\\
\hline
\Delta\mathfrak{G}(x) &= \Delta\mathfrak{G}_n(x) + \frac{\delta_1-\delta_2}{2}\cdot\frac{P}{20^n}
\end{aligned}$$

und folglich für $\Delta x \leqq \Delta\xi_n$

$$\Delta\mathfrak{G}(x) < \varepsilon + \frac{P}{20^n}\cdot$$

Wählt man nun $n = N$ so gross, dass $\frac{P}{20^N} < \varepsilon$, so ist für alle $\Delta x \leqq \Delta\xi_N$

$$\Delta\mathfrak{G}(x) < 2\varepsilon$$

d. h. $\mathfrak{G}(x)$ ist überall stetig.

III. $\mathfrak{G}(x)$ besitzt überall einen endlichen Differentialquotienten.

Unter I. wurde schon erwähnt, dass $\frac{\Delta\mathfrak{G}_n(x)}{\Delta x}$, solange $x+\Delta x$ vor der nächsten Ecke in $\mathfrak{G}_n(x)$ liegt, deren x mit ξ_n^x bezeichnet werde, constant ist, u. z. ein Product aus Factoren der drei Formen:

A) $\pm\left(1+\frac{1}{10^n}\right) = \pm(1+a_n)$,

B) $\pm\left(1-\frac{m}{10^n}\right) = \pm(1-b_n)\cdots m \leqq 10^n - 3$,

C) $-\frac{1}{10^n}\cdot$

Ein solches Product werde mit $P^x(n)$ bezeichnet, so definiren die sämmtlichen $P^x(n)$ für dasselbe x ein unendliches Product $P(x)$ mit vorgeschriebener Factorenanordnung. Für manche x-Werthe, z. B. alle $x = \xi_n^s$, ist das betreffende unendliche Product *unbedingt* convergent, d. h. es giebt bei der vorgeschriebenen und bei jeder beliebigen andern Factorenfolge einen bestimmten *von Null verschiedenen* endlichen Werth*). Für andere x-Werthe ist das Product nicht convergent; es lässt sich beweisen, dass es dann für jede Factorenanordnung den Werth *Null* liefert.

Kommen nämlich Factoren von der Form C bis in's Unendliche vor, so muss bei jeder Anordnung $P(x) = 0$ werden; es ist dies der einzige Fall, in welchem die $P^x(n)$ im Unendlichen das Zeichen fortwährend wechseln.

Kommen aber im Unendlichen nur Factoren von den Formen A und B vor, so ist zu beachten, dass die Reihe der a_n unbedingt convergirt; ist daher die Reihe der b_n auch convergent, so ist in

$$P(x) = \prod_0^\infty (1 + \alpha_n)$$

die Reihe der α_n unbedingt convergent, d. h. $P(x)$ ist endlich und von Null verschieden; ist aber die Reihe der b_n *divergent*, so sind doch alle $b_n < 1$ und daher:

$$\lg (1 - b_n) = -\frac{b_n}{1} - \frac{b_n^2}{2} - \cdots - \frac{b_n^\varkappa}{\varkappa} \cdot R_n,$$

$$\lg \prod_a^n (1 - b_n) = -\frac{1}{1}\sum_a^n b_n - \frac{1}{2}\sum_a^n b_n^2 - \cdots - \frac{1}{\varkappa}\sum_a^n b_n^\varkappa \cdot R_n.$$

Weil aber $\sum b_n$ divergirt, ist $\lg \prod_a^n (1 - b_n) = -\infty$, d. h. $P(x) = 0$, gleichgültig, welche Anordnung der b_n gewählt wird.**)

$P(x)$ ist also für alle x, bei denen Factoren C bis in's Unendliche vorkommen, oder bei denen die Reihe der b_n divergirt, Null, in allen andern Fällen dagegen endlich und numerisch $< P$.

Es soll jetzt bewiesen werden:

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta \mathfrak{S}(x)}{\Delta x} = P(x),$$

---

*) Denn wo $\mathfrak{S}_n(x)$ eine Ecke bildet, da treten in $\dfrac{\Delta \mathfrak{S}_{n+m}(x)}{\Delta x}$ nur noch Factoren der Form A zu $P^x(n)$ hinzu.

**) Siehe hierfür: Pringsheim, Ueber die Werthveränderungen bedingt convergenter Reihen und Producte. Math. Annalen XXII.

d. h. es lässt sich ein $\Delta\xi$ bestimmen, so dass für alle $\Delta x \leqq \Delta\xi$ gilt:

$$P(x) - \delta = \frac{\Delta\mathfrak{G}(x)}{\Delta x} \leqq P(x) + \delta,$$

wenn δ eine beliebig kleine Grösse bedeutet.

Zum Beweise ist es nöthig, $\frac{\Delta\mathfrak{G}(x)}{\Delta x}$ für den Fall zu untersuchen, dass $x + \Delta x \leqq \xi_n^x$, mit welcher Grösse, wie schon früher, der Argumentwerth für die auf $\mathfrak{G}_n(x)$ zunächst folgende Ecke der Function $\mathfrak{G}_n(x)$ bezeichnet werden soll, während η_n^x zur zunächst vorhergehenden Ecke gehören möge.

Zur Befestigung der Vorstellung möge $\mathfrak{G}_n(x)$ von η_n^x bis ξ_n^x wachsen; dann folgen sich in $\mathfrak{G}_{n+1}(x)$ auf dieser selben Strecke ein Maximum in E, ein Schnitt mit $\mathfrak{G}_n(x)$ in M und ein Minimum in E'; $g_{n+1}(x)$ als besondere Linie gezeichnet möge die entsprechenden Punkte e, m, e' haben, so liegt m auf der Abscissenaxe, nämlich in $x = \frac{\eta_n^x + \xi_n^x}{2}$, woselbst $g_{n+1}(x) = 0$; die Abscisse der Punkte E und e sei x_1, diejenige der Punkte E' und e' sei x_2.

$\frac{\Delta g_{n+1}(x)}{\Delta x}$ ist nun zunächst, wenn nur $x + \Delta x \leqq \xi_n^x$, jedenfalls $\leqq \frac{P^x(n)}{10^{n+1}}$ *).

Um auch eine untere Grenze für $\frac{\Delta g_{n+1}(x)}{\Delta x}$ zu finden für denselben Fall $x + \Delta x \leqq \xi_n^x$, beachte man, dass ja $\frac{\Delta g_{n+1}(x)}{\Delta x}$ den constanten Werth $P^x(n+1) - P^x(n)$ besitzt, falls $x + \Delta x \leqq \xi_{n+1}^x$. Liegt aber $x + \Delta x$ zwischen ξ_{n+1}^x und ξ_n^x, so sind zwei Fälle für die Lage von x möglich, deren zweiter eine eingehende Betrachtung verlangt.

1) Wenn $x > x_1$, also zwischen x_1 und ξ_n^x liegt, ist

$$\frac{\Delta g_{n+1}(x)}{\Delta x} \geqq P^x(n+1) - P^x(n);$$

*) Denn unter einem Winkel mit dieser trigonometrischen Tangente ansteigend beginnt und endigt $g_{n+1}(x)$ zwischen η_n^x und ξ_n^x. Die übrigen Theile von $g_{n+1}(x)$ sind absteigend mit den Tangenten

$$P^x(n)\cdot\left(-\frac{1}{10^{n+1}}\right),\ P^x(n)\cdot\left(-\frac{3}{10^{n+1}}\right)\cdots P^x(n)\cdot\left(-\frac{10^{n+1}+1}{10^{n+1}}\right).$$

Die Tangente für den Theil von $g_{n+1}(x)$, in welchem x liegt, werde im folgenden durch $P^x(n+1) - P^x(n)$ bezeichnet, denn es ist ja überall

$$\frac{\Delta g_{n+1}(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta\mathfrak{G}_{n+1}(x)}{\Delta x} - \frac{\Delta\mathfrak{G}_n(x)}{\Delta x} = P^x(n+1) - P^x(n).$$

denn von e aus erstreckt sich bis e' gewissermassen eine Wendestrecke der gebrochenen Linie $g_{n+1}(x)$. (s. Fig. 3ᵃ.)

2) Wenn $x < x_1$, also zwischen η_n^x und x_1 liegt, bildet der in ξ_{n+1}^x beginnende Theil G von $g_{n+1}(x)$ einen Winkel mit der Abscissenaxe, dessen trigonometrische Tangente ist:

$$P^x(n+1) - P^x(n) - \frac{2 \,.\, P^x(n)}{10^{n+1}} \left(= \frac{er}{pr} \text{ in Fig. } 3^b \text{ u. } 3^c\right)$$

$$\left(\text{für } \xi_{n+1}^x = x_1 \text{ lautet das letzte Glied: } - \frac{4 \,.\, P^x(n)}{10^{n+1}}\right).$$

Ganz dieselbe Richtung besitzt ein Theil G' zwischen m und ξ_n^x, und von G bis G' liegt die Curve $g_{n+1}(x)$ fortwährend in dem Raum zwischen diesen beiden Parallelen (die für den Fall $\xi_{n+1}^x = x_1$ in eine Gerade, die Wendestrecke, zusammenfallen). Ist $x + \Delta x$ gross genug, so kann auch jetzt noch, wie im ersten Falle,

$$\frac{\Delta g_{n+1}(x)}{\Delta x} \geqq P^x(n+1) - P^x(n)$$

sein (Fig. 3ᵇ).

Ist dies aber nicht der Fall, sondern ist

$$\frac{\Delta g_{n+1}(x)}{\Delta x} < P^x(n+1) - P^x(n)$$

(wie in Fig. 3ᶜ), so führt die Linie vom Punkte X mit den Coordinaten x, $g_{n+1}(x)$ bis Y oder $x + \Delta x$, $g_{n+1}(x + \Delta x)$ *unter* dem Punkte p oder ξ_{n+1}^x, $g_{n+1}(\xi_{n+1}^x)$ vorbei; daher ist die trigonometrische Tangente ihres Winkels mit der Abscissenaxe grösser, als diejenige der Geraden pY (*numerisch* ist die Tangente in den Figuren allerdings kleiner, weil $\frac{YZ}{XZ}$ nur positiv sein kann, wenn x in dem ersten in η_n^x beginnenden geradlinigen Theile von $g_{n+1}(x)$ liegt). Man errichte nun in m eine Senkrechte auf der Abscissenaxe, welche die Rückwärtsverlängerung von G' in a schneiden möge; dann ist pa noch steiler geneigt, als pY. Es bildet aber pm der Construction nach einen Winkel mit der Abscissenaxe, dessen trigonometrische Tangente ist:

$$P^x(n+1) - P^x(n) - \frac{4 \,.\, P^x(n)}{10^{n+1}}$$

und da m in der Mitte zwischen G und G' liegt, hat pa die trigonometrische Tangente:

$$P^x(n+1) - P^x(n) - \frac{6 \,.\, P^x(n)}{10^{n+1}}.$$

Dies ist daher jedenfalls eine untere Grenze für $\frac{\Delta g_{n+1}(x)}{\Delta x}$, wenn nur $x + \Delta x \leqq \xi_n^x$.

Für $\mathfrak{G}_{n+1}(x)$ haben wir hiernach die wichtige Ungleichheit:

$$\text{(A)}\quad P^x(n+1) - \frac{6 \cdot P^x(n)}{10^{n+1}} < \left(\frac{\Delta \mathfrak{G}_{n+1}(x)}{\Delta x}\right)_{x+\Delta x \leqq \xi^x_n} \leqq P^x(n) + \frac{P^x(n)}{10^{n+1}}.$$

Die obere Grenze ist constant, wo auch x in dem Intervalle zwischen η^x_n und ξ^x_n liegen mag; in dem Ausdruck für die untere Grenze kommt dagegen $P^x(n+1)$ vor, dessen Werth von der Lage des x abhängig zwischen

$$P^x(n)\left(1 + \frac{1}{10^{n+1}}\right) \quad \text{und} \quad -P^x(n) \cdot \frac{1}{10^{n+1}}$$

schwankt. Entscheidend wird die obige Ungleichheit dadurch, dass bei grossen n-Werthen die untere Grenze nur wenig unter dem Werthe $\frac{d\mathfrak{G}_{n+1}(x)}{dx}$, die obere nur wenig über $\frac{d\mathfrak{G}_n(x)}{dx}$ liegt, diese beiden Differentialquotienten aber dem Werthe $P(x)$ sich beliebig nähern. Es soll nun bewiesen werden, dass hierdurch wirklich $\frac{d\mathfrak{G}(x)}{dx} = P(x)$ wird.

Ist ε eine beliebig klein angenommene Grösse, so lässt sich nach dem früheren n_1 so gross wählen, dass für alle $m \geqq 1$ gilt:

$$P(x) - \varepsilon \leqq P^x(n_1 + m) \leqq P(x) + \varepsilon \cdots m \geqq 1$$

und zugleich:

$$\frac{P}{10^{n_1}} < \varepsilon.$$

Durch die zweite Bedingung ist dann auch:

$$\frac{P(x)}{10^{n_1}} < \varepsilon \quad \text{und} \quad \frac{P^x(n)}{10^{n_1}} < \varepsilon.$$

Sei dann Δx so klein, dass $x + \Delta x \leqq \xi^x_{n_1}$, so gilt:

$$P(x) - 3\varepsilon \leqq \frac{\Delta \mathfrak{G}(x)}{\Delta x} \leqq P(x) + 3\varepsilon.$$

Zum Beweise wähle $n_2 \geqq n_1$ so gross, dass

$$x < \xi^x_{n_2+1} \leqq x + \Delta x \leqq \xi^x_{n_2} \leqq \xi^x_{n_1}.$$

Nun ist zu beachten, dass

$$g_{n_2+1+m}(\xi^x_{n_2+1}) = 0 \cdots m \geqq 1,$$

$$| g_{n_2+1+m}(\xi^x_{n_2+1} \pm \Delta) | < \frac{P}{10^{n_2+1+m}} \cdot \Delta \cdots m \geqq 1 \text{ *)}.$$

*) Denn $g_{n_2+1+m}(x)$ steigt oder fällt nach vor- und rückwärts von der Ecke bei $\xi^x_{n_2+1}$ mit der Tangente $\frac{P^{\xi^x_{n_2+1}}(n_2+m)}{10^{n_2+1+m}} < \frac{P}{10^{n_2+1+m}}$ und hat auch an keiner andern Stelle eine steilere Steigung oder Senkung, als mit der Tangente $\frac{P}{10^{n_2+1+m}}$.

Wenn man also $\Delta x = \Delta_1 + \Delta_2$ setzt, nämlich $x = \xi^x_{n_2+1} - \Delta_2$ und $x + \Delta x = \xi^x_{n_2+1} + \Delta_1$, so folgt:

$$\begin{aligned}\Delta\mathfrak{G}_{n_2+1+m}(x) &= \Delta\mathfrak{G}_{n_2+1}(x) + \Delta g_{n_2+1+1}(x) + \cdots + \Delta g_{n_2+1+m}(x)\\ &= \Delta\mathfrak{G}_{n_2+1}(x) + \alpha_1\cdot\frac{P}{10^{n_2+1+1}}\cdot\Delta x + \cdots + \alpha_m\cdot\frac{P}{10^{n_2+1+m}}\cdot\Delta x\\ &= \Delta\mathfrak{G}_{n_2+1}(x) + \alpha\left(\frac{P}{10^{n_2+1+1}} + \cdots + \frac{P}{10^{n_2+1+m}}\right)\cdot\Delta x,\end{aligned}$$

worin $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ und α numerisch < 1.
Folglich liegt $\Delta\mathfrak{G}_{n_2+1+m}(x)$ zwischen den Grenzen

$$\Delta\mathfrak{G}_{n_2+1}(x) \pm \frac{P}{10^{n_2+1}}\cdot\Delta x,$$

d. h. es ist:

$$\Delta\mathfrak{G}_{n_2+1}(x) - \varepsilon\cdot\Delta x < \Delta\mathfrak{G}_{n_2+1+m}(x) < \Delta\mathfrak{G}_{n_2+1}(x) + \varepsilon\cdot\Delta x,$$

woraus mit $m = \infty$ folgt:

$$\Delta\mathfrak{G}_{n_2+1}(x) - \varepsilon\cdot\Delta x \leqq \Delta\mathfrak{G}(x) \leqq \Delta\mathfrak{G}_{n_2+1}(x) + \varepsilon\cdot\Delta x.$$

Weil aber nach unseren Bestimmungen $x + \Delta x \leqq \xi^x_{n_2}$, so gilt nach der Ungleichheit A:

$$P^x(n_2+1) - \frac{6\,.\,P^x(n_2)}{10^{n_2+1}} < \frac{\Delta\mathfrak{G}_{n_2+1}(x)}{\Delta x} < P^x(n_2) + \frac{P^x(n_2)}{10^{n_2+1}},$$

d. h.

$$P(x) - 2\varepsilon < \frac{\Delta\mathfrak{G}_{n_2+1}(x)}{\Delta x} < P(x) + 2\varepsilon$$

und endlich:

$$P(x) - 3\varepsilon < \frac{\Delta\mathfrak{G}(x)}{\Delta x} < P(x) + 3\varepsilon.$$

Damit ist bewiesen:

$$\frac{d\mathfrak{G}(x)}{dx} = \lim\frac{\Delta\mathfrak{G}(x)}{\Delta x} = P(x).$$

$\mathfrak{G}(x)$ besitzt also überall einen endlichen Differentialquotienten nach vorwärts, und ebenfalls nach rückwärts, da die Function von 1 gegen 0 hin ganz so gebaut ist, wie von 0 gegen 1 hin. Aus dem gleichen Grunde ist es keine Beschränkung, dass wir in unserer Betrachtung annahmen, $\mathfrak{G}_n(x)$ *wachse* von η^x_n bis ξ^x_n; für einen *abnehmenden* Theil von $\mathfrak{G}_n(x)$ gilt Alles in der Richtung 1 bis 0.

IV. $\mathfrak{G}(x)$ bildet in jedem beliebigen Intervall Maxima und Minima.

Sei das Intervall von x_1 bis x_2 vorgelegt. Es ist bereits bemerkt, dass die geradlinigen Theile von $\mathfrak{G}_n(x)$ sich über Intervalle

$$\xi^{s+1}_n - \xi^s_n \leqq \frac{1}{2^{n+1}}$$

erstrecken. Man wähle darum n so gross, dass $\frac{1}{2^{n+1}} < \frac{x_2 - x_1}{2}$; dann liegt mindestens ein geradliniger Theil von $\mathfrak{G}_n(x)$ vollständig im vorgelegten Intervall; zur Befestigung der Vorstellung denke man sich diesen Theil aufsteigend, d. h. $P^x(n)$ positiv. $\mathfrak{G}_{n+1}(x)$ besitzt dann im Intervall ein Maximum bei E und ein Minimum bei E'.

Nun ist *vorwärts* gebildet:

$$\left(\frac{d\mathfrak{G}_{n+1}(x)}{dx}\right)_{E+} = P^E(n+1) = -\frac{P^E(n)}{10^{n+1}},$$

$$\left(\frac{d\mathfrak{G}(x)}{dx}\right)_{E+} = -\frac{P^E(n)}{10^{n+1}}\left(1+\frac{1}{10^{n+2}}\right)\left(1+\frac{1}{10^{n+3}}\right)\cdots$$

und *rückwärts* gebildet:

$$\left(\frac{d\mathfrak{G}_{n+1}(x)}{dx}\right)_{E-} = -P^E(n)\cdot\frac{3}{10^{n+1}} \text{ (siehe Fig. 1, wo } P^E(n) = 1),$$

$$\left(\frac{d\mathfrak{G}(x)}{dx}\right)_{E-} = -P^E(n)\cdot\frac{3}{10^{n+1}}\left(1+\frac{1}{10^{n+2}}\right)\left(1+\frac{1}{10^{n+3}}\right)\cdots\cdot$$

d. h. $\mathfrak{G}(x)$ besitzt in E ein Maximum. Ebenso ergiebt sich in E' ein Minimum, denn dort gilt:

$$\left(\frac{d\mathfrak{G}_{n+1}(x)}{dx}\right)_{E'+} = P^{E'}(n)\cdot\frac{3}{10^{n+1}},$$

$$\left(\frac{d\mathfrak{G}(x)}{dx}\right)_{E'+} = P^{E'}(n)\cdot\frac{3}{10^{n+1}}\left(1+\frac{1}{10^{n+2}}\right)\left(1+\frac{1}{10^{n+3}}\right)\cdots,$$

$$\left(\frac{d\mathfrak{G}_{n+1}(x)}{dx}\right)_{E'-} = \frac{P^{E'}(n)}{10^{n+1}},$$

$$\left(\frac{d\mathfrak{G}(x)}{dx}\right)_{E'-} = \frac{P^{E'}(n)}{10^{n+1}}\left(1+\frac{1}{10^{n+2}}\right)\left(1+\frac{1}{10^{n+3}}\right)\cdots,$$

wobei übrigens $P^{E'}(n) = P^E(n) = \frac{d\mathfrak{G}_n(x)}{dx}$ für alle x zwischen ξ_n^x und ξ_n^{x+1}. Wäre dieser geradlinige Theil von $\mathfrak{G}_n(x)$ absteigend, d. h. $P^x(n)$ *negativ*, so gelten die vorstehenden Gleichungen unverändert, d. h. in E existirt ein Minimum, in E' ein Maximum sowohl für $\mathfrak{G}_{n+1}(x)$, wie für $\mathfrak{G}(x)$.

Dieses Functionsbeispiel hat überall einen Differentialquotienten, ist aber nicht das Integral desselben, ja der Differentialquotient ist gar nicht integrirbar; denn wählt man zur Bildung des Integrals die Intervalle stets zwischen Ecken der Functionen $\mathfrak{G}_n(x)$ und als Werthe von $\frac{d\mathfrak{G}(x)}{dx}$ diejenigen am Anfange dieser Intervalle, so erhält man zwar $\mathfrak{G}(x)$ als Integralwerth, man hätte aber auch in jedem Intervall

$\frac{d\mathfrak{G}(x)}{dx} = 0$ wählen, also 0 als Integralwerth, und ebenso gut durch andere Wahlen jeden Werth zwischen 0 und $\mathfrak{G}(x)$ als Integralwerth erhalten können. Dieses Verhalten ist für jede differentiirbare Function mit Maximis und Minimis in jedem Intervall vorauszusehen, weil sich der Satz beweisen lässt, dass der Differentialquotient solcher Functionen in jedem Intervalle wirklich Nullwerthe haben muss.*)

Hiermit ist die Reihe der nicht anschaulichen stetigen Functionen um ein neues Beispiel vermehrt, dessen Eigenschaft, differentiirbar zu sein, wohl einiges Interesse beanspruchen darf. Es füllt nämlich durch dieses Verhalten eine Lücke, die bisher jede Untersuchung der Beziehungen zwischen Anschaulichkeit und Stetigkeit störte, aus. Ueber diese Beziehungen möchte ich die folgenden Betrachtungen wagen.

Es ist zunächst zu erörtern, woher eigentlich unser Vorurtheil stammt, eine stetige Punktreihe müsse auch anschaulich sein. Die Antwort darauf ist: wir haben uns an zwei verschiedene Definitionen der Linie gewöhnt, einmal als Grenze zwischen zwei Flächenstücken, ein andermal als durch Bewegung eines Punktes entstandene Punktreihe. Nun sind *alle* stetigen Functionen Grenzen zwischen zwei Flächenstücken, auch die nicht anschaulichen. Daraus folgt, dass sich jene zwei Definitionen nicht decken, und mit dieser Erkenntniss verliert die Existenz unanschaulicher Functionen bedeutend an „Unbegreiflichkeit". Zugleich erhebt sich die Frage, ob alle durch Bewegung eines Punktes entstehenden Linien anschaulich sind? Indessen lässt sich unter einer „unanschaulichen Bewegung" wohl Nichts denken; und ich fürchte nicht, mit der Behauptung auf Widerspruch zu stossen, zur Anschaulichkeit einer Curve sei entschieden nöthig, dass man sich die Curve von einem Punkte durchlaufen denken kann — *und umgekehrt.* Aber freilich ist damit Nichts gesagt, denn für Möglichkeit der Bewegung giebt es so wenig ein Merkmal, wie für Möglichkeit der Anschauung.

Für Anschauungscurven giebt es kein Merkmal, denn die Frage: was veranlasst die Unmöglichkeit des Anschauens? ist ungelöst. Man könnte denken, die Maxima in jedem Intervall trügen die Schuld — aber Weierstrass's Function wächst fortwährend und hat doch nirgends einen Differentialquotienten, ist daher nicht anschaulich; man könnte dem Fehlen des Differentialquotienten die Schuld geben — aber das von mir soeben mitgetheilte Beispiel hat überall Maxima, ist daher nicht anschaulich; man könnte in der fortwährenden Un-

*) Siehe hierfür: Dini, Fondamenti S. 276—283 (§ 197—200).

stetigkeit dieses Differentialquotienten die Ursache suchen — aber das Integral einer beliebigen stetigen Function mit Maximis in jedem Intervall hat diese *stetige* Function zum Differentialquotienten, und muss dann in jedem Intervall unendlich oft dieselbe Tangente haben, ist daher nicht anschaulich.

Auch für die Möglichkeit der Bewegung fehlt es an einer charakteristischen Eigenschaft. Ist auf einer Linie überhaupt Bewegung möglich, so kann sie im Allgemeinen noch willkürlich in den verschiedensten Geschwindigkeiten und Beschleunigungen ausgeführt werden; macht die Linie in der Nähe eines Punktes unendlich viele stets abnehmende Oscillationen, wie z. B. $y = x \cdot \sin \frac{\pi}{x}$ in der Nähe von $x = 0$, so ist eine Bewegung vom Nullpunkt aus überhaupt undenkbar und in entgegengesetzter Richtung an die Bedingung gebunden, zu verlangsamen, sodass der Nullpunkt nicht erreicht werden kann; hierdurch liegt der Gedanke nahe, dass es vielleicht Curven geben kann, auf denen Bewegung nur in einem ganz bestimmten Tempo möglich wäre. Diese Frage kann ich nicht entscheiden und ebenso wenig weiss ich die Bedingungen zu nennen, denen eine Bewegung in gerader Linie als Function der Zeit genügen muss. Dagegen ist klar, dass wir zur Vorstellung einer Bewegung in jedem Momente die Vorstellung einer *Richtung* dieser Bewegung nöthig haben, also müssen sicherlich alle Bewegungscurven überall Tangenten haben, d. h. differentiirbare Functionen sein; hinzu kommt, dass alle uns geläufigen Bewegungsbahnen eines Punktes sogar die Vorstellung erlauben, dass ihre Tangente auf ihnen entlang rollt, wobei dann der Berührungspunkt die betreffende Bewegung ausführt. Sollte es nun Curven geben, auf denen Bewegung eines Punktes möglich ist, obgleich die Tangente auf ihnen *nicht* rollen kann? Die Möglichkeit solcher Punktbewegung darf wohl als „unanschaulich" geleugnet werden.

Angenommen, eine Bewegung in der Abscissenaxe sei als Function der Zeit durch x_t bezeichnet, eine zweite in der Ordinatenaxe durch y_t, und beide Bewegungen seien anschaulich; dann ist es auch ein anschaulicher Vorgang, dass eine Gerade, auf der sich ein Punkt im Tempo y_t bewegt, parallel der y-Axe im Tempo x_t verschoben wird; muss nun, weil der Vorgang anschaulich ist, auch die durch den Punkt beschriebene Curve anschaulich sein? Das lässt sich wohl bejahen — und dann muss auch auf der Curve eine Tangente rollen können.

Ich nehme daher an, dass

1) jede mögliche Bewegung eines Punktes in einer anschaulichen Curve geschieht;
2) in allen anschaulichen Curven eine Punktbewegung denkbar ist;
3) auf allen anschaulichen Curven eine Tangente rollen kann.

Ich sehe nicht, dass diese Fragen bisher irgendwo behandelt oder nur aufgeworfen wären, glaube aber sofort zeigen zu können, dass man die Vorsicht auf diesen Gebieten wirklich nicht weit genug treiben kann.

Es sei irgend eine stetige Function $f(x)$ mit Oscillationen in jedem Intervalle vorgelegt; es lässt sich beweisen, dass jede derartige Function in jedem Intervalle unendlich oft denselben Werth annehmen muss. Das Integral der Function hat in jedem Punkte eine Tangente, weil $f(x)$ sein Differentialquotient ist; überall ist eine Richtung vorgeschrieben — trotzdem ist in der Integralcurve eine Bewegung nicht denkbar, weil dieselbe in jedem Intervall unendlich oft dieselbe Richtung haben müsste, ohne dass die Richtung constant wäre. Nun hat aber Herr Prof. Weierstrass eine nicht differentiirbare Function gebildet, die *fortwährend wächst* — ist in deren Integralcurve eine Bewegung möglich? Die Tangente wird fortwährend steiler, man sollte also meinen, es könnte eine Gerade auf dieser stets gegen die Abscissenaxe convexen Integralcurve mit Bequemlichkeit abrollen. Ich will beweisen, dass dennoch dieses Rollen *nicht* möglich ist.

Es mögen die Ordinaten der Integralcurve mit y bezeichnet werden. Könnte dann die Tangente rollen, so durchläuft dieser Annahme nach auch ein Punkt die Curve, nämlich der Berührungspunkt; es mag zweifelhaft bleiben, ob diese Bewegungen nur in einem oder in beliebigem Tempo geschehen können; jedenfalls ist es ein anschaulicher Vorgang, dass der bewegliche Punkt eine Gerade stets parallel der y-Axe verschiebt, wobei der Schnittpunkt dieser Geraden mit der x-Axe eine Bewegung ausführt, die mit x_t bezeichnet werde. Man denke nun den 1. Quadranten mit der Curve um den Anfangspunkt in die Lage des 3. Quadranten gedreht, so entsteht dort eine zweite Curve, und es muss anschaulich sein, sich die ganze Ebene auf dieser Curve rückwärts bewegt zu denken, sodass dabei das Axensystem seiner ursprünglichen Lage parallel bleibt; bei dieser Bewegung geht dann die auf der ersten Curve rollende Tangente durch einen festen Punkt im Raum. Legt man durch diesen festen Punkt eine Parallele zur x-Axe und errichtet auf ihr in der Entfernung 1 eine Senkrechte, so erzeugt der Schnittpunkt der Tangente mit dieser Senkrechten eine Bewegung $\left(\frac{dy}{dx}\right)_t$ — dieses Tempo muss also anschaulich sein; mit dem ebenfalls anschaulichen Tempo x_t zusammengesetzt, würde eine anschauliche Bewegung in der Differentialcurve von y entstehen — eine solche Bewegung ist aber unmöglich, weil die Differentialcurve keinen Differentialquotienten besitzt. Folglich ist die Annahme falsch, dass die Tangente auf der Integralcurve rollen kann.

Es muss bemerkt werden, dass in dieser scheinbar einfachen

Ueberlegung mehrere unbelegbare Voraussetzungen enthalten sind. Zunächst wird die Zusammensetzung zweier Bewegungen als unter allen Umständen möglich angenommen, wogegen Nichts eingewandt werden kann, weil die absolute Ruhe nichts Anschauliches ist; ausserdem aber wird angenommen:

4) wenn eine in Bewegung begriffene Gerade eine feste Gerade schneidet, so führt auch der Schnittpunkt beider Geraden eine mögliche Bewegung aus;

und diese Annahme lässt sich nicht wieder aus der „Zusammensetzbarkeit der Bewegungen" begründen, ist also den früheren Annahmen als vierte hinzuzufügen.

Wäre die Curve mit den Ordinaten y nicht gerade die Integralcurve der Weierstrass'schen Function, sondern wäre von ihr vorausgesetzt, dass sie anschaulich sei, dann könnte nach der 3. unserer Annahmen über das Verhältniss zwischen Anschaulichkeit und Punktbewegung die Tangente auf ihr rollen, und unser Beweis würde zu dem Schlusse führen, dass eine Bewegung in der Differentialcurve möglich ist, d. h. nach der 1. jener Annahmen, dass die Differentialcurve anschaulich ist. Wenn daher jene vier Annahmen wirklich den Werth von Axiomen für unsere menschliche Anschauung besitzen, folgt aus ihnen als Lehrsatz:

„Jede anschauliche Curve besitzt eine anschauliche Differentialcurve."

Dieser Satz gehört an die Stelle des als falsch befundenen, dass alle stetigen Functionen einen Differentialquotienten besitzen.

Versucht man hierauf den Nachweis zu führen, dass anschauliche Curven anschauliche Integralcurven haben, und will man auch hierbei die Bewegung in der Integralcurve durch Zusammensetzung möglicher Bewegungen erzeugen, so stösst man auf unerwartete Hindernisse, obgleich von vornherein die Existenz der Integralcurve feststeht für alle, auch die unanschaulichen stetigen Functionen. Mit blossen Verschiebungen reicht man nicht aus, und ersinnt man Mechanismen, bei denen etwa ein Rad rollt u. dgl., so bleibt ja fraglich, ob der Apparat für alle anschaulichen Curven functioniren kann. Man muss daher auf die Bedeutung des Integrals als Flächeninhalt zurückgreifen und sagen: wenn eine anschauliche Curve gegeben ist und ein Punkt sie durchläuft, so kann ich mir mit dem Punkte eine Parallele zur Ordinatenaxe fortgeführt denken, dann erzeugt diese auf anschauliche Weise den Flächeninhalt zwischen Ordinatenaxe, Curve, Ordinate und Abscisse; es giebt also eine Grösse, welche anschaulich so mit der Zeit veränderlich ist, wie die Ordinate der Integralcurve, nämlich diesen Flächeninhalt; eine geradlinige Bewegung, bei der die Wege sich mit der Zeit ändern, wie jene Ordinate, muss also auch an-

schaulich sein; damit ist die Integralcurve anschaulich. Dieser Schlussweise liegt die Annahme zu Grunde:

5) wenn irgend eine anschauliche Grösse in anschaulicher Weise mit der Zeit veränderlich ist, so ist auch eine geradlinige Bewegung, deren Wege sich mit der Zeit wie jene Grösse ändern, anschaulich.

Ich will nicht behaupten, dass diese oder eine der vier früheren Annahmen über Anschauung und Bewegung keine fernere, sei es mathematische, sei es philosophische Begründung erfahren könnten; ich wäre auch nicht überrascht, wenn sie Einwände erführen; von Interesse bleibt es immer, nachgewiesen zu haben, welche Voraussetzungen dem Satze:

„*Alle anschaulichen Curven besitzen anschauliche Differentialcurven und anschauliche Integralcurven*"

zu Grunde liegen. Der Werth dieses Satzes ist nicht zu verkennen, da er stillschweigend bei jeder mathematisch-physikalischen Arbeit benutzt wird. Man kann durch diesen Satz auch die oft citirten „vernünftigen" Functionen Jacobi's mit den „anschaulichen" für identisch erklären, was allerdings nicht thunlich ist, solange sich fürchten lässt, dass aus einer unanschaulichen Function durch Integration oder Differentiation eine anschauliche Function entstehen könnte.

Ottensen, im September 1886.

Ueber einen Algorithmus zur Auflösung numerischer algebraischer Gleichungen.

Von

Eugen Netto in Berlin.

Mehrfach ist die trinomische Gleichung

$$x^n - x - a = 0$$

derart behandelt worden, dass man von einem beliebigen Anfangswerthe x_0 ausgehend eine Kette weiterer Werthe $x_1, x_2, x_3, \ldots$ durch den Algorithmus

$$x_{\varkappa+1} = \sqrt[n]{x_\varkappa + a}$$

bestimmte. Man begnügte sich dabei mit der Behauptung, dass sich $x_\varkappa$ mit wachsendem $\varkappa$ einer der reellen Wurzeln der Gleichung nähere, ohne dass doch meines Wissens über die Convergenz des angegebenen Verfahrens irgend welche Untersuchungen angestellt wären. Die hier bestehende Lücke soll im Folgenden ausgefüllt werden; und zwar wird dies der besseren Einsicht halber so geschehen, dass wir den angedeuteten Algorithmus zunächst auf allgemeine Gleichungen anwenden; dann werden sich die gesuchten Sätze über die trinomischen Gleichungen leicht ergeben.

Die reellen Wurzeln der Gleichung

(1) $$x = \sqrt[n]{\varphi(x)}, \quad \varphi(x) = ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots + c,$$

in welcher $a, b, \ldots, c$ Zahlencoefficienten sind, mögen nach absteigender Grösse geordnet, mit $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\alpha, \xi_{\alpha+1}, \ldots$ bezeichnet werden, so dass also

(2) $$\xi_\alpha = \sqrt[n]{\varphi(\xi_\alpha)} \quad \text{oder} \quad \xi_\alpha^n - \varphi(\xi_\alpha) = 0$$

ist. Wir wollen zunächst voraussetzen, dass (1) keine mehrfachen Wurzeln besitze. Für ungerade ganzzahlige Werthe von n ist die reelle n^{te} Wurzel eindeutig bestimmt; damit dasselbe für gerade Werthe von n der Fall sei, wollen wir bei geradem n stets nur den nicht negativen

Werth der Wurzel betrachten, und dabei also alle negativen Wurzeln von (1) von der Betrachtung ausschliessen.

Wir bezeichnen, wenn x_0 ein beliebiger Werth ist

$$(3)\qquad x_1 = \sqrt[n]{\varphi(x_0)},\ x_2 = \sqrt[n]{\varphi(x_1)},\ \cdots,\ x_{\varkappa+1} = \sqrt[n]{\varphi(x_\varkappa)},\ \ldots$$

und setzen, wenn ξ_α eine beliebige Wurzel von (1) bedeutet

$$(4)\qquad \xi_\alpha + \delta_0 = x_0,\ \xi_\alpha + \delta_1 = x_1,\ \cdots,\ \xi_\alpha + \delta_\varkappa = x_\varkappa,\ \ldots$$

$$(5)\qquad y_\varkappa = \delta_\varkappa - \delta_{\varkappa+1} = x_\varkappa - x_{\varkappa+1} = x_\varkappa - \sqrt[n]{\varphi(x_\varkappa)}$$

$$= \delta_\varkappa + \sqrt[n]{\varphi(\xi_\alpha)} - \sqrt[n]{\varphi(\xi_\alpha + \delta_\varkappa)}\,.$$

Wird jetzt $\delta_\varkappa$ hinlänglich klein, und also $x_\varkappa$ der Wurzel ξ_α hinlänglich nahe angenommen, dann ist mit beliebiger Genauigkeit

$$(6)\qquad \delta_{\varkappa+1} = \frac{\varphi'(\xi_\alpha)}{n\xi_\alpha^{n-1}}\,\delta_\varkappa = q(\xi_\alpha)\delta_\varkappa\,.$$

Damit $q(\xi_\alpha)$ endlich bleibe, schliessen wir den Fall aus, dessen Eintreten sofort ersichtlich ist und beseitigt werden kann, dass nämlich eine Wurzel ξ_α gleich Null wird. In Folge der von uns gemachten Annahmen ist der Nenner dann stets positiv.

Wir betrachten nun die folgenden 6 möglichen Fälle:

(A) $|q(\xi_\alpha)| < 1$; $q(\xi_\alpha)$ ist positiv;

(B) $|q(\xi_\alpha)| = 1$; $q(\xi_\alpha)$ ist positiv;

(C) $|q(\xi_\alpha)| > 1$; $q(\xi_\alpha)$ ist positiv;

(D) $|q(\xi_\alpha)| < 1$; $q(\xi_\alpha)$ ist negativ;

(E) $|q(\xi_\alpha)| = 1$; $q(\xi_\alpha)$ ist negativ;

(F) $|q(\xi_\alpha)| > 1$; $q(\xi_\alpha)$ ist negativ.

Da die Existenz gleicher Wurzeln ausgeschlossen war, so kann für's Erste der Fall (B) nicht vorkommen; (B) sowohl wie (E) wollen wir später behandeln. Man ersieht, dass bei (C) und (F) eine asymptotische Annäherung an ξ_α niemals, bei (A) und (D) dagegen innerhalb gewisser endlicher Grenzen jedenfalls vorkommen wird; bei (A) geschieht dieselbe so, dass alle $x_\varkappa,\ x_{\varkappa+1},\ \cdots$ auf einer Seite von ξ_α, bei (D) so, dass sie abwechselnd rechts und links von ξ_α liegen.

Bekanntlich besitzt die Gleichung

$$(7)\qquad nx^{n-1} - \varphi'(x) = 0$$

zwischen je zwei auf einander folgenden Wurzeln von (1) eine ungerade Anzahl von Wurzeln, und weiter ist die linke Seite von (7) für sehr grosse positive Werthe von x positiv. Daraus folgt, dass

$$n\xi_{2\alpha+1}^{n-1} - \varphi'(\xi_{2\alpha+1}) > 0,\qquad 1 - q(\xi_{2\alpha+1}) > 0,$$

$$n\xi_{2\alpha}^{n-1} - \varphi'(\xi_{2\alpha}) < 0,\qquad 1 - q(\xi_{2\alpha}) < 0$$

ist. $q(\xi_{2\alpha})$ muss also positiv und grösser als 1 sein, so dass eine

jede Wurzel $\xi_{2\alpha}$ auf Fall (C) führt: *die Wurzeln* $\xi_2, \xi_4, \cdots, \xi_{2\alpha}, \cdots$ *sind in asymptotischer Näherung nicht zu erreichen; der aufgestellte Algorithmus führt zwar von* $x_\varkappa = \xi_{2\alpha}$ *wieder auf* $x_{\varkappa+1} = \xi_{2\alpha}$, *aber von jedem* $x_\varkappa = \xi_{2\alpha} + \delta_\varkappa$ *bei beliebig kleinem absoluten Werthe von* $\delta_\varkappa$ *auf einen von* $\xi_{2\alpha}$ *entfernteren Werth* $\xi_{2\alpha} + \delta_{\varkappa+1}$.

Bei $\xi_{2\alpha+1}$ kann dagegen einer der Fälle (A), (D), (E), (F) eintreten; der erste wird stets dann vorkommen, wenn $q(\xi_{2\alpha+1})$ positiv, die drei letzten erscheinen dann, wenn $q(\xi_{2\alpha+1})$ negativ ist. Wir betrachten zunächst die Fälle (A) und (D), also diejenigen, bei denen $|q(\xi_{2\alpha+1})| < 1$ und $|\delta_{\varkappa+1}| < |\delta_\varkappa|$ ist, sobald $\delta_\varkappa$ hinlänglich klein angenommen wird. Ist η' der kleinste positive, $-\eta''$ der kleinste negative Werth von $\delta_\varkappa$, für welche $|\delta_\varkappa| < |\delta_{\varkappa+1}|$ wird, und ist η positiv und kleiner als η', η'', so wird in dem Bereiche $\xi_{2\alpha+1} - \eta$ bis $\xi_{2\alpha+1} + \eta$ die Kette der x von jedem Punkte x_0 aus durch unsern Algorithmus auf $\xi_{2\alpha+1}$ führen. Möglicherweise erstreckt sich der Bereich, für welchen diese Eigenschaft besteht, noch weiter, aber keinesfalls über die Strecke von $\xi_{2\alpha}$ bis $\xi_{2\alpha+2}$ hinaus. Diese gesammte Strecke wird im Falle (A) erreicht, sobald zwischen $\xi_{2\alpha}$ und $\xi_{2\alpha+2}$ keine Wurzel von $\varphi'(x) = 0$ liegt. Denn $|\delta_\varkappa|$ kann gleich $|\delta_{\varkappa+1}|$ nur für $\delta_\varkappa = +\delta_{\varkappa+1}$ oder $\delta_\varkappa = -\delta_{\varkappa+1}$ werden; das Letztere kann, da für hinreichend kleine $\delta_\varkappa$ der Werth von $\delta_{\varkappa+1}$ dasselbe Vorzeichen hat wie jener erstere, nur nach Passirung eines Maximums oder Minimums für $\delta_{\varkappa+1}$ eintreten, also nachdem $\varphi'(x)$ einmal gleich Null war. Da dies hier ausgeschlossen ist, so wird der erstere Fall $\delta_\varkappa = \delta_{\varkappa+1}$ zu erwägen sein, und dieser führt sofort auf $\xi_{2\alpha}$ und $\xi_{2\alpha+2}$. — Im Falle (D) giebt es, wie man leicht erkennt, zwischen $\xi_{2\alpha+1}$ und jeder benachbarten Wurzel $\xi_{2\alpha}$ und $\xi_{2\alpha+2}$ je eine Wurzel von $\varphi'(x) = 0$; ausgenommen, wenn $\xi_{2\alpha+1}$ die algebraisch kleinste Wurzel von (1) ist, und also ein $\xi_{2\alpha+2}$ gar nicht existirt. Wir haben somit gezeigt: *In den Fällen* (A) *und* (D) *giebt es stets eine Strecke, welche* $\xi_{2\alpha+1}$ *enthält, von der Beschaffenheit, dass jeder ihrer Punkte asymptotisch gegen* $\xi_{2\alpha+1}$ *führt. Im Falle* (A) *dehnt sich diese Strecke von* $\xi_{2\alpha+2}$ *bis* $\xi_{2\alpha}$, *wenn zwischen beiden Punkten keine Wurzel der Gleichung* $\varphi'(x) = 0$ *liegt; im Falle* (D) *ist diese letztere Möglichkeit ausgeschlossen.* Es kann in beiden Fällen vorkommen, dass $x_{\varkappa+1}$ ausserhalb des Gebietes $\xi_{2\alpha} \cdots \xi_{2\alpha+2}$ liegt, während $x_\varkappa$ sich innerhalb desselben befindet, aber stets nur so, dass $x_\varkappa$, $x_{\varkappa+1}$ auf verschiedenen Seiten von $\xi_{2\alpha+1}$ liegen. Dadurch ist die Möglichkeit gegeben, dass der Algorithmus von x_0 aus nicht zur nächsten, sondern zu einer beliebig fernen Wurzel convergirt. Ja, bei ungeradem n und geradem Grade von $\varphi(x)$ kann man Werthe von x_0 angeben, die kleiner sind, als die kleinste algebraische Wurzel, und welche asymptotisch zu jedem $\xi_{2\alpha+1}$ führen, welches überhaupt asymptotische Näherung gestattet.

Für (F) tritt ein bemerkenswerther Umstand ein, der freilich auch in der Umgebung der Wurzeln vorkommen kann, die zu (A) oder (D) gehören. Bei hinlänglich kleinem $\delta_\varkappa$ hat man nämlich

$$|\delta_\varkappa| < |\delta_{\varkappa+1}| < |\delta_{\varkappa+2}|;$$

dabei werden die Vorzeichen von $\delta_\varkappa$ und $\delta_{\varkappa+2}$ einander gleich, d. h. $x_\varkappa$ und $x_{\varkappa+2}$ liegen auf derselben Seite von $\xi_{2\alpha+1}$ z. B. nach $\xi_{2\alpha}$ hin, und zwar in der Folge $\xi_{2\alpha+1}, x_\varkappa, x_{\varkappa+2}, \xi_{2\alpha}$. Nimmt man dagegen $x_\varkappa'$ in der Nähe von $\xi_{2\alpha}$ nach der Seite von $\xi_{2\alpha+1}$ zu, so folgt wegen (C), dass die vier Grössen $x_\varkappa, x_{\varkappa+2}, x'_{\varkappa+2}, x_\varkappa'$ in der angegebenen Reihenfolge zwischen $\xi_{2\alpha+1}$ und $\xi_{2\alpha}$ liegen. Somit giebt es zwischen $x_\varkappa$ und $x_\varkappa'$ einen Werth x_0'' für den $x_0'' = x_2'' = x_4'' = \cdots$ sein wird; d. h.: *Ist für* $\xi_{2\alpha+1}$ *der Werth von* $\varphi'(\xi_{2\alpha+1})$ *negativ und seinem Betrage nach grösser, als* $n\,\xi^n_{2\alpha+1}$, *dann giebt es zwischen* $\xi_{2\alpha}$ *und* $\xi_{2\alpha+1}$ *und ebenso zwischen* $\xi_{2\alpha+2}$ *und* $\xi_{2\alpha+1}$ *je eine ungerade Anzahl von Werthen* x_0 *derart, dass sich zwei Werthe* x_0, x_1 *periodisch wiederholen, so dass der Algorithmus nicht convergirt.* In gleicher Weise kann es vorkommen, dass auch $x_\lambda = x_0$ wird, ohne dass schon für ein $\mu < \lambda$ die Gleichheit $x_\mu = x_0$ gilt. Ja, es kann unendlich viele Werthe x_0 dieser Beschaffenheit geben. Liegt z. B. zwischen $\xi_{2\alpha}$ und $\xi_{2\alpha+2}$ ein Werth x_0 derart, dass ihm ein x_1 entspricht, welches ausserhalb der Strecke und innerhalb des Convergenzgebietes einer andern Wurzel $\xi_\beta > \xi_{2\alpha}$ liegt, dann werden auch $x_2, x_3, \cdots, x_\lambda, \cdots$ in demselben Gebiete liegen. Erhält man hier wiederum, wie oben, die Anordnung $x_0, x_\lambda', x_0', x^\lambda$, so ergiebt sich die Existenz eines zwischen $\xi_{2\alpha+2}$ und $\xi_{2\alpha}$ liegenden x_0'', für welches $x_\lambda'' = x_0''$ ist. *Lässt man* λ *die Reihe der Primzahlen durchlaufen, so folgt die Existenz von unendlich vielen derartigen* x_0. Auch dieser Umstand tritt bei ungeradem n und geradem Grade von $\varphi(x)$ in der Umgebung der algebraisch kleinsten Wurzel von (1) auf, da, wie oben erwähnt wurde, stets ein x_0 gewählt werden kann, welches beliebig nahe an ein ξ_β durch x_1 heranführt.

Wir wollen jetzt auf den bisher ausgeschlossenen Fall (B) eingehen und zeigen, dass man bei Einführung von vielfachen Wurzeln in die Reihe $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots$ sowohl für die übrigen Fälle wie für (B) selbst die bisher gefundenen Sätze gelten lassen muss.

Wir setzen also fest, dass (1) auch gleiche Wurzeln haben kann, und dass in $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots$ jede Wurzel so oft aufzunehmen sei, als der Grad ihrer Multiplicität angiebt. Ist nun ξ_α eine $(m+1)$-fache Wurzel der Gleichung (1), und

$$\xi_\alpha = \xi_{\alpha+1} = \xi_{\alpha+2} = \cdots = \xi_{\alpha+m},$$

dann wird für $\xi = \xi_\alpha$

$$\xi^n - \varphi(\xi) = 0,\ 1 - \frac{\varphi'(\xi)}{n\xi^{n-1}} = 0,\ \frac{d}{d\xi}\,\frac{\varphi'(\xi)}{n\xi^{n-1}} = 0, \cdots, \frac{d^{m-1}}{d\xi^{m-1}}\,\frac{\varphi'(\xi)}{n\xi^{n-1}} = 0,$$

$$\frac{d^m}{d\xi^m}\,\frac{\varphi'(\xi)}{n\xi^{n-1}} = \beta_m \gtrless 0,$$

und durch Entwicklung von $\xi_\alpha + \delta_{\varkappa+1} = \sqrt[n]{\varphi(\xi_\alpha + \delta_\varkappa)}$ wird

$$(8)\qquad \delta_{\varkappa+1} = \delta_\varkappa + \frac{1}{(m+1)!}\beta_m \delta_\varkappa^{m+1} + \cdots = \delta_\varkappa\left(1 + \frac{\beta_m \delta_\varkappa^m}{(m+1)!}\right) + \cdots$$

werden, weil ja für ξ_α die Gleichung gilt:

$$\frac{d^{k+1}}{d\xi^{k+1}}\,\varphi^{\frac{1}{n}}(\xi) = \frac{d^k}{d\xi^k}\,\frac{\varphi'(\xi)}{n\xi^{n-1}}.$$

Es fragt sich nun, welches Vorzeichen β_m besitzt. Um darüber zu entscheiden, denken wir uns in der Ebene der xy die beiden Curven

$$y^m - \varphi(x) = 0, \quad y - x = 0;$$

dann ist ersichtlich, dass $\xi_1, \xi_2, \cdots$ die Durchschnitte der beiden sind, dass ferner für jedes $x > \xi_1$ gefunden wird $y < x$; für jedes x zwischen ξ_1 und ξ_2 dagegen $y > x$ u. s. f., wobei die Vielfachheit der Wurzeln in bekannter Weise ihre Rolle spielt. Für wachsende x von $\xi_1, \xi_3, \xi_5, \cdots$ an, ist also $y - x$ im Abnehmen begriffen, von $\xi_2, \xi_4, \xi_6, \cdots$ an im Zunehmen, wobei wieder auf die Multiplicität zu achten ist.

Für positive $\delta_\varkappa$ ist also $y - x = x_{\varkappa+1} - x_\varkappa = \delta_{\varkappa+1} - \delta_\varkappa$ bei einem ξ_α mit ungeradem Index α negativ, bei einem ξ_α mit geradem Index α dagegen positiv, also $\delta_{\varkappa+1} < \delta_\varkappa$ im ersten, $\delta_{\varkappa+1} > \delta_\varkappa$ im zweiten Falle:

Aus (8) folgt daher, dass $\beta_m = \frac{d^m}{d\xi^m}\,\frac{\varphi'(\xi)}{n\xi^{n-1}}$ für ξ_α negativ oder positiv wird, je nachdem α ungerade oder gerade ist. Hierdurch erledigen sich die vier möglichen Fälle:

I) α gerade, m gerade; nach beiden Seiten hin tritt der Fall (C) ein;

II) α ungerade, m gerade; nach beiden Seiten hin tritt der Fall (A) ein;

III) α gerade, m ungerade; nach $\xi_{\alpha-1}$ hin tritt der Fall (C), nach $\xi_{\alpha+m+1}$ hin der Fall (A) ein;

IV) α ungerade, m ungerade; nach $\xi_{\alpha-1}$ hin tritt der Fall (A) nach $\xi_{\alpha+m-1}$ hin der Fall (C) ein.

Alles dieses lässt sich folgendermassen zusammenfassen: *Eine vielfache Wurzel $\xi_\alpha = \xi_{\alpha+1} = \cdots = \xi_{\alpha+m}$ verhält sich nach $\xi_{\alpha-1}$ hin, als ob nur ξ_α; nach $\xi_{\alpha+m+1}$ hin, als ob nur $\xi_{\alpha+m}$ dort vorhanden wäre. Dabei können aber nur die Fälle* (A) *und* (C) *auftreten.*

Den schliesslich noch zurückbleibenden Fall (E) behandeln wir am einfachsten derart, dass wir von $\delta_\varkappa$ sogleich zu $\delta_{\varkappa+2}$ übergehen, wo dann δ und $\delta_{\alpha+2}$ dasselbe Vorzeichen besitzen. Da nun bei hin-

reichend kleinem $\delta_\varkappa$ auch $\delta_{\varkappa+1}$ beliebig klein wird, so folgt: *Im Falle* (E) *nähern sich entweder* $\delta_0, \delta_2, \delta_4, \cdots$ *und* $\delta_1, \delta_3, \delta_5, \cdots$ *gleichzeitig der Wurzel* ξ_α, *oder sie entfernen sich gleichzeitig von ihr, so dass also*

$$\delta_{\varkappa+2} = \delta_\varkappa + \gamma_m \delta_\varkappa^{m+1} \qquad (\gamma_m \gtrless 0)$$

stets einen geraden Index m *besitzt, falls* $\varphi'(\xi_\alpha) + n\xi_\alpha^{n-1} = 0$ *ist.*

Eine weitere, auf diesen letzten Fall bezügliche Eigenschaft werde ich in der folgenden Note über iterirte Functionen angeben.

Endlich möge noch ausdrücklich hervorgehoben werden, dass alle hier besprochenen Möglichkeiten auch wirklich auftreten, wie man leicht durch die Bildung von Beispielen erkennen wird.

Wir machen von den abgeleiteten Sätzen Gebrauch, um den besonderen Fall

(9) $$x^n = x + a \quad \text{oder} \quad x = \sqrt[n]{x+a}$$

zu untersuchen. Hier ist

$$\varphi(x) = x + a, \quad \varphi'(x) = 1, \quad q(x) = \frac{1}{n x^{n-1}},$$

so dass, wenn wir bei geradem n die Benutzung der reellen, nicht positiven Werthe der n^{ten} Wurzel ablehnen, die Möglichkeiten (D), (E), (F) fortfallen. Somit tritt bei jeder Wurzel ξ_α mit ungeradem Index α der Fall (A) ein, und da $\varphi'(x)$ überhaupt nicht verschwindet, so erstreckt sich das Gebiet, innerhalb dessen von jedem Punkte x_0 eine asymptotische Annäherung auf dieses ξ_α geschieht, von $\xi_{\alpha-1}$ bis $\xi_{\alpha+1}$; dabei sind diese Werthe selbst natürlich ausgeschlossen, und wenn ξ_α die höchste oder die niedrigste Wurzel ist, muss $\xi_{\alpha-1}$ resp. $\xi_{\alpha+1}$ durch $+\infty$ resp. $-\infty$ ersetzt werden. Das Letztere würde nur dann einer Ausnahme unterliegen können, wenn bei geradem n die niedrigste Wurzel einen ungeraden Index besässe, weil man für hinlänglich hohe negative $x_\varkappa$ den Radicanden negativ machen würde. Es ist aber ersichtlich, dass dieser Fall nicht eintreten kann.

Aus der Betrachtung der, die Wurzeln ξ_α trennenden reellen Nullwerthe der Ableitung von $x^n - x - a$ erkennt man, dass für ein ungerades n nur drei oder eine, für ein gerades nur zwei oder keine reelle Wurzel von (9) besteht.

Hat die Gleichung

$$x = \sqrt[2n+1]{x+a}$$

nur eine reelle Wurzel, so führt unser Algorithmus von jedem beliebigen Anfangswerthe x_0 *asymptotisch zu derselben; hat die Gleichung dagegen drei reelle Wurzeln* $\xi_1 \geqq \xi_2 \geqq \xi_3$, *so führt jedes* x_0 *zwischen* ξ_2 *und* $+\infty$ *auf* ξ_1, *jedes* x_0 *zwischen* ξ_2 *und* $-\infty$ *auf* ξ_3.

Hat die Gleichung

$$x = \sqrt[2n]{x + a},$$

(*die ihrer Form wegen zwei reelle, negative Wurzeln nicht besitzen kann*), *zwei reelle positive Wurzeln* $\xi_1 \geqq \xi_2$, *so führt unser Algorithmus, falls wir unter dem Werthe der* $2n^{\text{ten}}$ *Wurzel hierbei stets ihren einzigen nicht negativen Werth verstehen, von jedem* x_0 *zwischen* ξ_2 *und* $+\infty$ *auf* ξ_1, *von jedem* x_0 *zwischen* ξ_2 *und* $-a$ *dagegen auf Werthe* $x_\varkappa$, *welche kleiner als* $-a$ *sind, daher den Integranden negativ machen, und den Algorithmus abzubrechen zwingen. Hat die Gleichung nur eine positive Wurzel, so führt jedes* x_0 *zwischen* $-a$ *und* $+\infty$ *auf diese. Hat die Gleichung keine reelle Wurzel, was nur bei negativem a möglich ist, dann führt jedes* x_0 *auf Werthe* $x_\varkappa$, *die den Integranden negativ machen.*

Es erübrigt jetzt nur noch, zu untersuchen, was bei der Benutzung des negativen Werthes der $2n^{\text{ten}}$ Wurzel eintritt. Es ist klar, dass man dabei überhaupt nur zu der einen, etwa vorhandenen, negativen Wurzel der Gleichung gelangen kann; ferner dass nur x_0 einen positiven Werth haben kann, der nicht grösser als $a^{2n} - a$ sein kann, und deshalb endlich, dass man alle x auf die negativen Werthe von 0 bis $-a$ beschränken darf. Dann sind alle x_λ negativ, und es können nur die Fälle (D), (E), (F) eintreten. Ferner kann $x_{\varkappa+1}$ als Function von $x_\varkappa$ betrachtet, niemals ein Maximum oder Minimum besitzen, da $\varphi'(x) = 1$ nicht verschwinden kann, so dass, wenn x_0 die Strecke von der negativen Wurzel ξ_a ab bis $a^{2n} - a$ ohne Aenderung der Richtung durchläuft, x_1 von ξ_a ab bis $-a$ ohne Aenderung der Richtung geht, und ähnlich umgekehrt. Wenn also in der Nähe von ξ_a der Fall (D) gilt, so findet dies überall da statt, wo man überhaupt x_1 wählen kann; und dasselbe gilt für (F). Da sich endlich noch der Fall (E) unter (D) oder (F) einordnet, wie wir oben gesehen haben, so folgt: *Benutzt man bei der Gleichung*

$$x = \sqrt[2n]{x + a}$$

zur Bildung unseres Algorithmus den negativen Werth der $2n^{\text{ten}}$ *Wurzel, so gelangt man entweder von allen Werthen der Strecke von* $-a$ *bis* $a^{2n} - a$ *auf die etwa vorhandene negative Wurzel der Gleichung, oder alle diese führen mit Ausnahme des Wurzelwerthes selber auf Werthe* $x_\varkappa$, *die den Radicanden negativ machen.*

Berlin, den 30. October 1886.

Zur Theorie der iterirten Functionen.

Von

EUGEN NETTO in Berlin.

Die im vorhergehenden Aufsatze angestellten Betrachtungen führten mich auf einige Eigenschaften der iterirten Functionen, die mir der Mittheilung nicht unwerth erscheinen.

Wir verstehen unter $\Theta(x)$ zunächst eine ganze rationale Function mit unbestimmten Coefficienten und setzen in gebräuchlicher Bezeichnung

$$(1)\qquad \Theta(\Theta(x)) = \Theta_2(x),\ \Theta(\Theta_2(x)) = \Theta_2(\Theta(x)) = \Theta_3(x), \cdots;$$

dann ist es leicht, zu beweisen, dass $\Theta_n(x) - x$ durch $\Theta(x) - x$ theilbar sein muss; (vgl. meinen Aufsatz: „Ueber die Factorenzerlegung der Discriminanten algebraischer Gleichungen," Math. Ann. XXIV, S. 581). Wir werden ferner zeigen, dass der Quotient

$$(2)\qquad \frac{\Theta_n(x) - x}{\Theta(x) - x} = T_n(x)$$

nicht weiter durch $\Theta(x) - x$ theilbar sein kann. Denn wäre dies der Fall, dann müsste es auch bei der speciellen Wahl

$$\Theta(x) = x + x^2 + cx^3 + \cdots$$

statt haben; hier erhält man aber

$$\Theta_n(x) = x + nx^2 + [n + n(n-1)c]x^3 + \cdots,$$
$$T_n(x) = n + n(n-1)x + \cdots,$$

so dass T_n nicht mehr durch $\Theta - x$ theilbar sein kann. Weil nun ausserdem bei unbestimmten Coefficienten $\Theta - x$ irreductibel ist, so kann T_n auch keinen Theiler mit $\Theta - x$ gemeinsam haben, d. h.

$$\Theta(x) - x = 0 \quad \text{und} \quad T_n(x) = 0$$

haben keine gemeinsame Wurzel, so lange man keine speciellen Functionen $\Theta(x)$ betrachtet.

Es sei jetzt x_0 eine Wurzel von $T_n(x) = 0$, und ferner werde

$$(3)\quad x_1 = \Theta(x_0),\ x_2 = \Theta_2(x_0),\ x_3 = \Theta_3(x_0), \cdots, x_{n-1} = \Theta_{n-1}(x_0)$$

gesetzt, dann ist wegen des Ausdrucks (2) für $T_n(x)$

$$\Theta_n(x_0) = x_0$$

und also

$$\Theta_{n+1}(x_0) = \Theta(x_0) = \Theta_n(x_1) = x_1, \quad \Theta_{n+2}(x_0) = \Theta_2(x_0) = \Theta_n(x_2) = x_2, \cdots,$$

so dass ausser x_0 auch alle Grössen in (3) Wurzeln von $T_n(x) = 0$ sind. Wenn wir annehmen, n sei durch eine Primzahl p ersetzt, dann folgt in bekannter Art, dass nicht zwei Wurzeln in (3) einander gleich sein können, ohne dass alle untereinander und insbesondere x_0 und x_1 gleich sind. Wäre Letzteres aber der Fall, so wäre x_0, was nicht angeht, eine Wurzel von $\Theta(x) - x = 0$. *So lange die Coefficienten von $\Theta(x)$ unbestimmt bleiben, ordnen sich die Wurzeln von $T_p(x) = 0$ zu je p einander zu, wenn p eine Primzahl ist. Dabei gilt zwischen den p Wurzeln jedes Systems die Beziehungsreihe*

$$x_1 = \Theta(x_0), \ x_2 = \Theta_2(x_0), \cdots, x_{p-1} = \Theta_{p-1}(x_0).$$

Nebenbei mag bemerkt werden, dass sich hieraus die Gruppe der Gleichung $T_p(x) = 0$ als nicht-primitiv, und also die Gleichung selbst als das Eliminationsresultat zweier anderer Gleichungen ergiebt.

Wenn wir nun die Coefficienten von $\Theta(x)$ als veränderlich ansehen und ihre Werthe so variiren, falls dies möglich ist, dass $T_p(x) = 0$ mit $\Theta(x) - x = 0$ eine Wurzel gemeinsam hat, dass z. B. $x_0 = x_1$ wird, dann werden alle p Glieder unseres Systems $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{p-1}$ einander gleich werden. *Haben für die specielle Function $\Theta(x)$ die Gleichungen*

(4) $$\Theta(x) - x = 0, \quad T_p(x) = 0$$

eine Wurzel gemeinsam, so ist dies eine p-fache Wurzel der letzteren Gleichung und also eine $(p+1)$-fache von

$$\Theta_p(x) - x = 0,$$

falls sie einfache Wurzel der ersten Gleichung in (4) *ist.*

Aus diesem Satze lässt sich eine merkwürdige algebraische Formel herleiten. Es sei

$$\Theta(x) = ax + bx^2 + cx^3 + \cdots$$

dann wird

$$\Theta_p(x) = a^p x + b_p x^2 + c_p x^3 + \cdots + d_p x^{p+1} + e_p x^{p+2} + \cdots,$$

$$T_p(x) = \frac{\Theta_p(x) - x}{\Theta(x) - x} = \frac{a^p - 1}{a - 1} + \beta_p x^2 + \gamma_p x^3 + \cdots + \delta_p x^{p+1} + \varepsilon_p x^{p+2} + \cdots$$

Nun ist $x = 0$ eine einfache Wurzel von $\Theta(x) - x = 0$, sobald, wie wir annehmen wollen, a von 1 verschieden ist. Wählt man nun aber a als primitive p^{te} Einheitswurzel, so wird das constante Glied auf der rechten Seite der letzten Gleichung verschwinden; nach dem vorigen

Satze wird somit $x=0$ eine $(p+1)$-fache Wurzel von $\Theta_p(x)-x=0$ und die Coefficienten von $x^2, x^3, \cdots, x^p$ müssen verschwinden: *Es ist*

$$(5) \qquad \Theta_p(x) \equiv a^p x + d_p x^{p+1} + e_p x^{p+2} + \cdots$$

d. h. die Coefficienten von $x^2, x^3, \cdots, x^p$ *in* $\Theta_p(x)$ *sind sämmtlich durch*

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^{p-1}$$

theilbar.

Es sei nunmehr ξ eine Wurzel von $\Theta(x)-x=0$; dann bezeichnen wir mit δ eine beliebige Grösse und setzen

$$(6) \qquad \delta_1 = \Theta(\xi+\delta) - \xi, \quad \delta_2 = \Theta(\xi+\delta_1) - \xi, \cdots;$$

hieraus folgt

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \Theta'(\xi)\cdot\delta &+ \frac{1}{2}\Theta''(\xi)\delta^2 &+ \cdots = \varphi(\delta), \\ \delta_2 &= \Theta'(\xi)\delta_1 &+ \frac{1}{2}\Theta''(\xi)\delta_1^2 &+ \cdots = \varphi_2(\delta), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \delta_p &= \Theta'(\xi)\delta_{p-1} &+ \frac{1}{2}\Theta''(\xi)\delta_{p-1}^2 &+ \cdots = \varphi_{p-1}(\delta). \end{aligned}$$

Ist $\Theta'(\xi)$ eine primitive p^{te} Einheitswurzel, dann gilt der soeben aufgestellte Satz, und es wird

$$\delta_p = \delta + d_p\delta^{p+1} + e_p\delta^{p+2} + \cdots,$$

$$\xi + \delta_p = \Theta(\xi+\delta_{p-1}) = \Theta_2(\xi+\delta_{p-2}) = \cdots = \Theta_p(\xi+\delta),$$

$$\Theta_p(\xi+\delta) - (\xi+\delta) = d_p\delta^{p+1} + e_p\delta^{p+2} + \cdots,$$

so dass $\delta=0$ eine p-fache Wurzel der Gleichung

$$\Theta_p(\xi+\delta) - (\xi+\delta) = 0$$

oder ξ eine $(p+1)$-fache Wurzel der Gleichung

$$\Theta_p(x) - x = 0$$

wird. *Falls für die Wurzel* ξ *von* $\Theta(x)-x=0$ *die Ableitung* $\Theta'(\xi)$ *eine primitive* p^{te} *Einheitswurzel ist, wird* ξ *eine* $(p+1)$*-fache Wurzel von* $\Theta_p(x)-x=0$ *werden.*

Setzt man $p=2$, dann ist $\Theta'(\xi)=-1$, und man gelangt zu dem im vorigen Aufsatze angedeuteten Theorem, wobei es nichts ausmacht, wie bald gezeigt werden soll, dass hier eine rationale Function $\Theta(x)$ zur Iterirung vorgelegt ist, während es sich dort um die algebraische Function $\sqrt[n]{\varphi(x)}$ handelt.

Zunächst erweitern wir unsere Sätze auf den Fall, dass der auftretende Index eine beliebige zusammengesetzte Zahl sei. Wir setzen

$$n = p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} p_3^{\nu_3} \cdots,$$

wo $p_1, p_2, p_3, \ldots$ die von einander verschiedenen Primzahlen sind, welche n theilen. Ferner sei zur Abkürzung

$$\Theta_\mu(x) - x = [\mu],$$

und endlich erweitern wir die Bedeutung des bisher betrachteten Quotienten T dahin, dass wir setzen

$$(7) \qquad T_n(x) = \frac{[n]\cdot\prod\left[\frac{n}{p_1p_2}\right]\cdot\prod\left[\frac{n}{p_1p_2p_3p_4}\right]\cdots}{\prod\left[\frac{n}{p_1}\right]\cdot\prod\left[\frac{n}{p_1p_2p_3}\right]\cdots}.$$

Die bekannte Art der Behandlung primitiver n^{ter} Einheitswurzeln zeigt auch hier, dass $T_n(x)$ eine rationale, ganze Function von x ist; man braucht dazu nur den Begriff der „Zugehörigkeit einer Wurzel x_0 zu einem Index λ" einzuführen, d. h. die Definition, dass x_0 zu λ „gehört", sobald λ der kleinste Index ist, für den

$$\Theta_\lambda(x_0) - x_0 = 0$$

wird. Um dann weiter unsere früheren Schlüsse anwenden zu können, bedarf es noch des Nachweises, dass $T_n(x) = 0$ mit keinem $\Theta_\lambda(x) - x = 0$ eine Wurzel gemeinsam hat, sobald λ ein Theiler von n ist. Dass dies so ist, erkennt man aber schon aus der Betrachtung des besonderen Falles, in dem wir

$$\Theta(x) = x^k \quad \text{also} \quad \Theta_\mu(x) = x^{k^\mu}$$

setzen. k muss dabei der Grad der zu Grunde gelegten, zu iterirenden Function sein, damit nicht etwa Wurzeln unendlich werden. Setzen wir diese Function in (7) ein, so können wir aus jedem Factor x weglassen, da die Anzahl der Factoren im Zähler dieselbe ist wie im Nenner. Dann bleiben Factoren von der Form

$$(8) \qquad x^{k^{\frac{n}{\lambda}}-1} - 1, \quad x^{k^{\frac{n}{\mu}}-1} - 1, \cdots$$

zurück, so dass im Zähler wie im Nenner als Wurzeln nur die Einheitswurzeln auftreten.

Es fragt sich also, wenn wir gleich zur speciellen Form der Θ übergehen, ob eine primitive Einheitswurzel ω, welche zu

$$x^{k^{\frac{n}{\nu}}-1} - 1 = 0 \qquad (\nu > 1)$$

gehört, noch die Gleichung $T_n(x) = 0$ befriedigen kann? ω wird alle, aber auch nur diejenigen Factoren (8) zum Verschwinden bringen, bei denen der Exponent von x ein Vielfaches von $k^{\frac{n}{\nu}} - 1$ ist. Der geforderte Beweis ist also geliefert, sobald wir zeigen, dass die Reihen

$$(9) \qquad k^n - 1; \; k^{\frac{n}{p_1p_2}} - 1, \; k^{\frac{n}{p_1p_3}} - 1, \cdots; \; k^{\frac{n}{p_1p_2p_3p_4}} - 1, \cdots$$

und

$$(10) \qquad k^{\frac{n}{p_1}} - 1, \; k^{\frac{n}{p_2}} - 1, \cdots; \; k^{\frac{n}{p_1p_2p_3}} - 1, \cdots$$

den Factor $k^{\frac{n}{\nu}}-1$ gleich oft enthalten. Wäre k eine unbestimmte Grösse, so würde es ausreichen, zu zeigen, dass der Quotient aus den Producten der Grössen (9) und (10) nicht durch $k^{\frac{n}{\nu}}-1$ algebraisch theilbar sei. Dies ist aber klar, da dieser Quotient das Polynom für die Gleichung der primitiven n^{ten} Einheitswurzeln liefert. Aber auch für jedes besondere k ist der Satz richtig, weil

$$k^{\varkappa\alpha+\beta}-1=k^{\beta}\frac{k^{\varkappa\alpha}-1}{k^{\alpha}-1}(k^{\alpha}-1)+k^{\beta}-1$$

ist, und also, wenn zwar für unbestimmte k nicht $k^{\varkappa\alpha+\beta}-1$ durch $k^{\alpha}-1$ theilbar wäre, wohl aber für ein specielles, dieses nur gleich 1 sein könnte. Somit ist der Beweis erbracht: *Es haben*

$$T_n(x)=0 \quad \textit{und} \quad \Theta_{\frac{n}{\lambda}}(x)-x=0$$

keine Wurzel gemeinsam, so lange die Coefficienten unbestimmt bleiben.

$T_n(x)=0$ besitzt nur Wurzeln, welche auch $\Theta_n(x)-x=0$ befriedigen; folglich ist $T_n(x)$ ein Theiler von $\Theta_n(x)-x$. Und nun folgen die Schlüsse genau so wie in dem ersten besondern Falle, in welchem n eine Primzahl bedeutete. Es ergiebt sich dabei:

Solange die Coefficienten von $\Theta(x)$ unbestimmt bleiben, ordnen sich die Wurzeln von $T_n(x)=0$ zu je n einander zu, derart, dass zwischen denjenigen eines Systems die Beziehungsreihe

(3) $x_1=\Theta(x_0),\ x_2=\Theta(x_1)=\Theta_2(x_0),\cdots\ x_{n-1}=\Theta(x_{n-2})=\cdots=\Theta_{n-1}(x_0)$

herrscht. Haben dagegen für eine specielle Function $\Theta(x)$ die beiden Gleichungen

(4a) $$\Theta(x)-x=0,\quad T_n(x)=0$$

eine Wurzel gemeinsam, so ist dies eine n-fache Wurzel der letzteren Gleichung und, wie sich aus der Betrachtung des Quotienten

$$[\Theta_n(x)-x]:T_n(x)$$

sofort ergiebt, eine $(n+1)$-fache der Gleichung

$$\Theta_n(x)-x=0$$

falls sie eine einfache der ersten Gleichung in (4a) *ist.*

Bezeichnet man mit

$$\psi_n(z)=0$$

die Gleichung, deren Wurzeln die primitiven n^{ten} Einheitswurzeln sind, so folgt durch n-malige Iterirung aus

(11) $$\Theta(x)=ax+bx^2+cx^3+dx^4+\cdots$$

die Function $\Theta_n(x)$, für deren Coefficienten die Congruenz gilt:

(11a) $$\Theta_n(x)\equiv a^n x+d_n x^{n+1}+e_n x^{n+2}+\cdots \pmod{\psi_n(a)}.$$

Ist ξ *eine Wurzel von* $\Theta(x) - x = 0$, *für welche* $\Theta'(\xi)$ *eine primitive* n^{te} *Einheitswurzel ist, dann wird* ξ *eine* $(n+1)$*-fache Wurzel von* $\Theta_n(x) - x = 0$ *werden.*

Bei dem in (11a) ausgesprochenen Satze sind über die Coëfficienten $a, b, c, \cdots$ keinerlei Voraussetzungen gemacht, und ebensowenig ist die Thatsache benutzt, dass $\Theta(x)$ gerade vom Grade k sei. Auf die ersten n Glieder von (11a) haben nur die ersten n Glieder in (11) Einfluss, die Reihe (11) könnte sich also, so lange sie nur convergirt, auch ins Unendliche erstrecken, ohne dass die Richtigkeit der Congruenz (11a) aufhörte, da x so klein angenommen werden kann, dass auch $\Theta_2, \Theta_3, \cdots, \Theta_n$ convergente Reihen ergeben. Der obige Satz gilt also auch noch dann, wenn man unter $\Theta(x)$ eine beliebige für $x = 0$ verschwindende, und in eine convergente Reihe entwickelbare Function versteht; und dieselbe Bemerkung bezieht sich auch auf den Schlusssatz der obigen Theoreme.

Berlin, den 7. November 1886.

Sur la géométrie non-Euclidienne.

Par

VENTURA REYES Y PRÓSPER à Madrid.

Christian von Staudt a prouvé le premier que la géometrie de position est indépendante de toute idée de mesure et Mr. Félix Klein est le premier geomètre qui ait porté son attention sur ce fait, qu'elle est aussi indépendante de toute hypothèse sur la théorie des parallèles.*) En effet ce professeur démontre dans ses intéressantes recherches que la construction du quatrième point harmonique ne dépend pas que des trois points fixes donnés, même lorsque nous n'avons pas fait quelque supposition sur les points à l'infini, le point dont le conjugué est cherché étant pris en dehors de l'intervalle des deux autres.

Je rappelle en peu de mots son procédé. Supposons trois points en ligne droite dans l'ordre a, b, c et formons un quadrilatère, dont deux côtés opposés se coupent en a, les deux autres en b, et une diagonale df passe par c, nous avons à prouver, que le point d'intersection de ab avec l'autre diagonale eg est le même pour tous les quadrilatères construits avec les mêmes suppositions, bien que ces quadrilatères soient dans un même plan ou bien dans des plans différents.

Soient $dfge$ et $d'f'g'e'$ deux des quadrilatères considérés, lesquels ne sont pas situés dans un même plan. Alors si deux quelconques des droites dd', ee', ff', gg' se coupent, toutes se devront couper dans un même point O, d'où découle que les droites ab, eg et $e'g'$ doivent se couper dans un même point.

Mais si les droites dd', ee', ff', gg' ne se coupent pas en dedans de notre espace d'observation, prenons un autre quadrilatère avec les mêmes suppositions, que les deux premiers, mais ne tombant pas dans

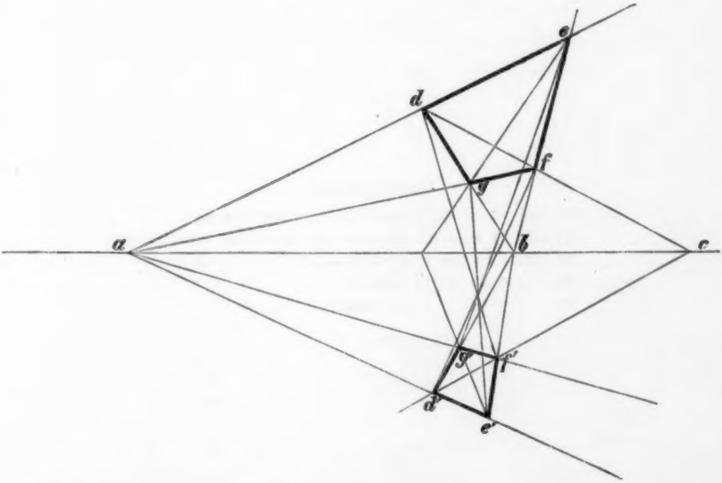
*) t. 4 et 6 des Mathematische Annalen.

aucun des plans des quadrilatères originaires. S'il est d'une telle nature que les droites joignant les vertices du premier avec ses homologues du troisième se coupent dans un point O' et les droites joignant les vertices du second avec ses homologues du troisième se coupent dans un autre point O'', alors notre proposition est évidente, car le théorème proposé étant vrai pour le premier et le troisième quadrilatère de même que pour le second et le troisième, il sera vrai pour le premier et le second. Mais si les dites conditions ne sont pas satisfaites, nous prenons un quatrième quadrilatère, et si nous n'arrivons pas au but désiré avec ce quatrième quadrilatère nous suivrons ce procédé jusq'à y parvenir.

Dans le cas où les deux quadrilatères originaires sont dans un même plan, nous formons un troisième quadrilatère avec les suppositions antérieures, et situé dans un plan différent. Puisque la proposition est vraie pour les deux premiers quadrilatères et le troisième, elle sera vraie aussi pour le premier et le second.

Je crois qu'on peut simplifier beaucoup le procédé indiqué, comme il suit.

Soient $defg$ et $d'e'f'g'$ les deux quadrilatères considérés et situés dans des plans différents; alors si les droites dd', ee', ff', gg' ne se



coupent pas en dedans de notre espace, ce sera parceque les deux quadrilatères considérés ont toutes leurs droites homologues directement homologiques et que le centre d'homologie ne tombe pas sous nos yeux. Mais au lieu de recourir aux triangles homologiques def et

$d' e' f'$, nous aurions pu nous servir des triangles $d e f$ et $f' g' d'$ aussi homologiques et avec un centre d'homologie visible. Car si les droites $d d'$ et $f f'$ ne se coupent pas dans notre espace, alors par cette raison même les droites $d f'$ et $f d'$ devront se couper et par son point d'intersection doivent passer les $e g'$ et $g e'$.

Nous voyons que les deux quadrilatères peuvent être considérés homologiques de deux manières diverses. *Donc nous n'avons pas besoin de recourir à un autre quadrilatère auxiliaire.*

Dans le cas où les deux quadrilatères originaires sont dans un même plan, d'après la même méthode nous pouvons nous servir d'un quadrilatère unique quelconque, situé dans un autre plan.

Madrid, au mois de décembre 1886.

Berichtigungen:

Seite 62 und 63 ist $\mathfrak{C}_4(4)$ und $\mathfrak{C}_5(4)$ zu vertauschen.
" 70 und 71 sind die Figuren 45 und 46 zu vertauschen.
" 77, Zeile 12 lies a, c' statt a', c.
" 78, " 6 " 10 statt 9.
" 78, " 8 " k_1', k_1 statt k_1.

Fig. 1.

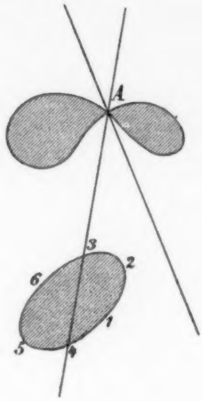


Fig. 2.

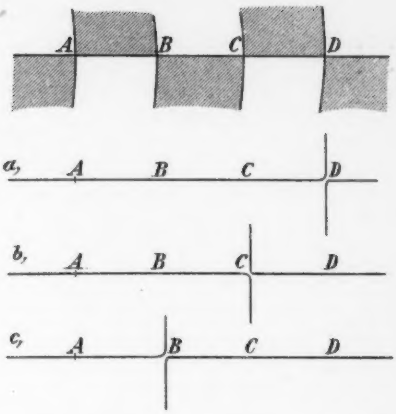


Fig. 3.

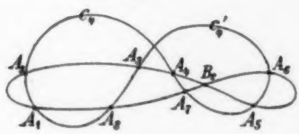


Fig. 4.

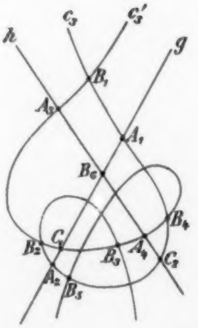
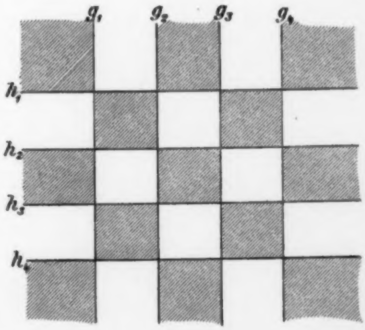


Fig. 5.



Lith. v. Eschebach & Schaefer, Leipzig.

Fig. 1.

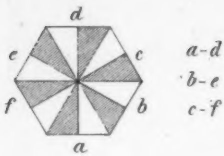


Fig. 4.

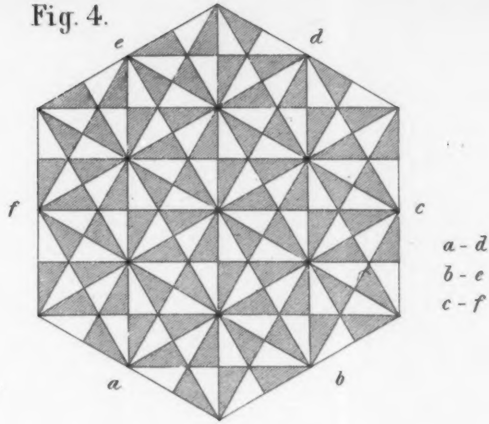


Fig. 2.

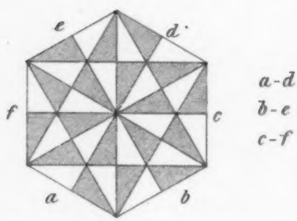


Fig. 5.

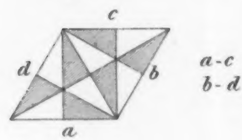


Fig. 3.

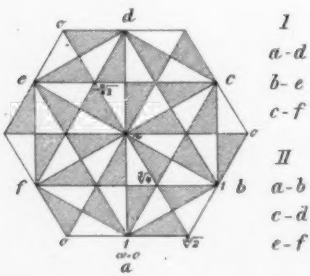
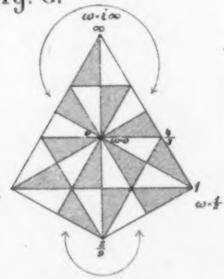
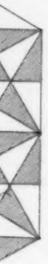


Fig. 6.





a - d
b - e
c - f

Fig. 7.

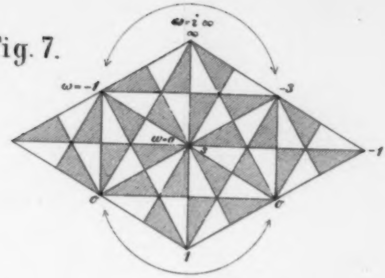
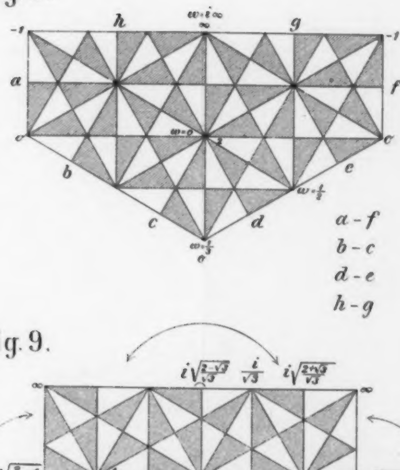
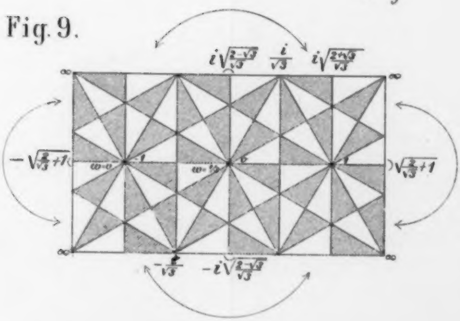


Fig. 8.



a - f
b - c
d - e
h - g

Fig. 9.



Lith.v.Eschebach & Schaefer, Leipzig.

Fig. 1. Konstruktion von $g_1(x)$ und $G_1(x)$

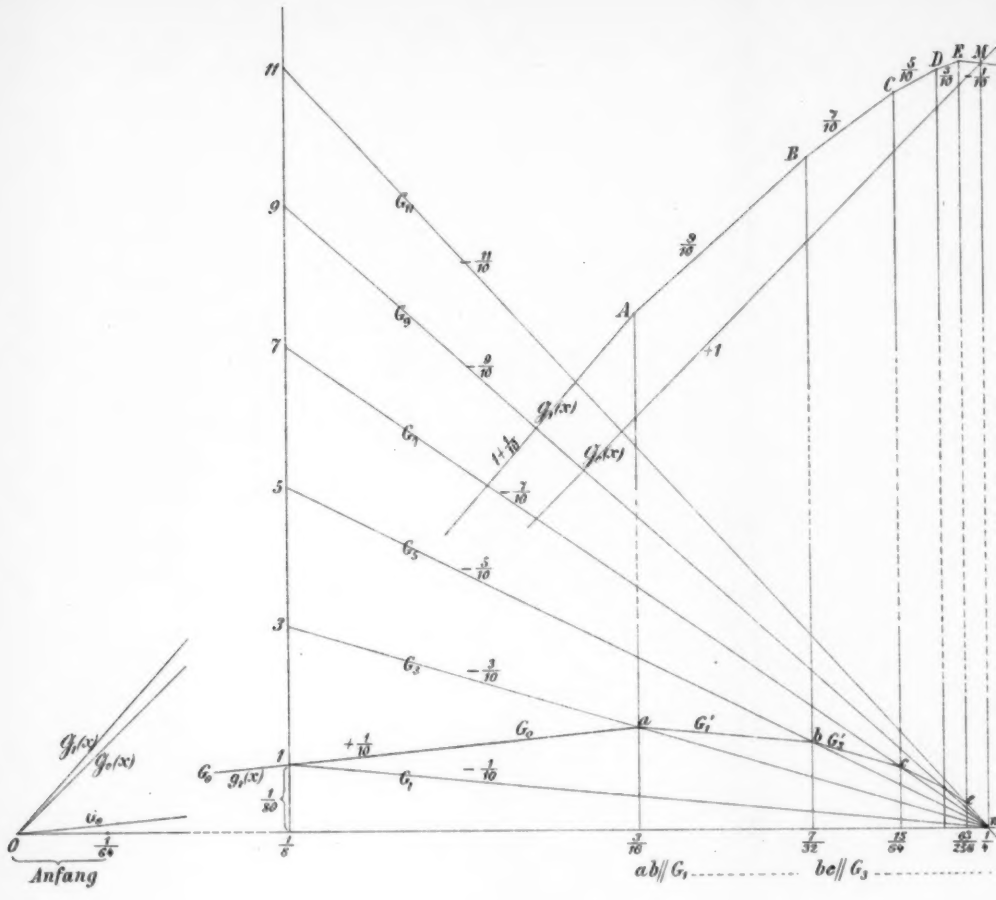
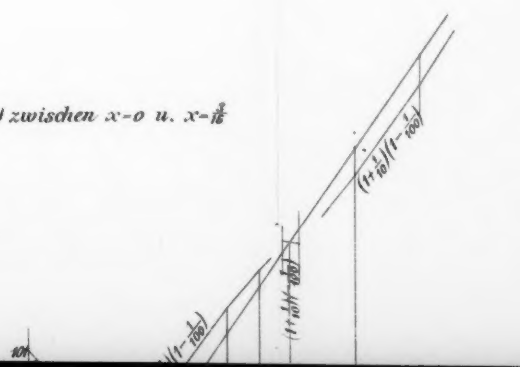
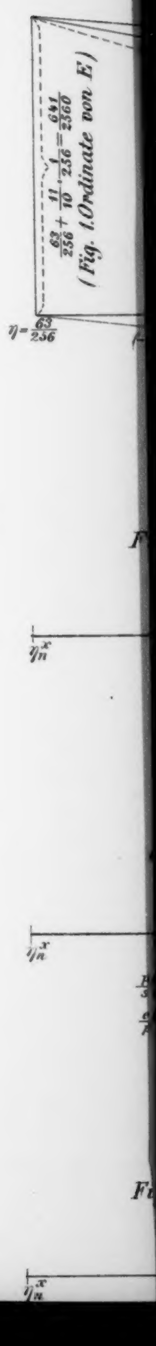


Fig. 2ª Konstruktion von $g_2(x)$ u. $G_2(x)$ zwischen $x=0$ u. $x=\frac{3}{16}$
$\left(p_1=\frac{11}{10}=1+\frac{1}{10}\right)$



B'
C'
D'
E'
C D E M
X
c' b'



(Fig. 1. Ordinate von E)

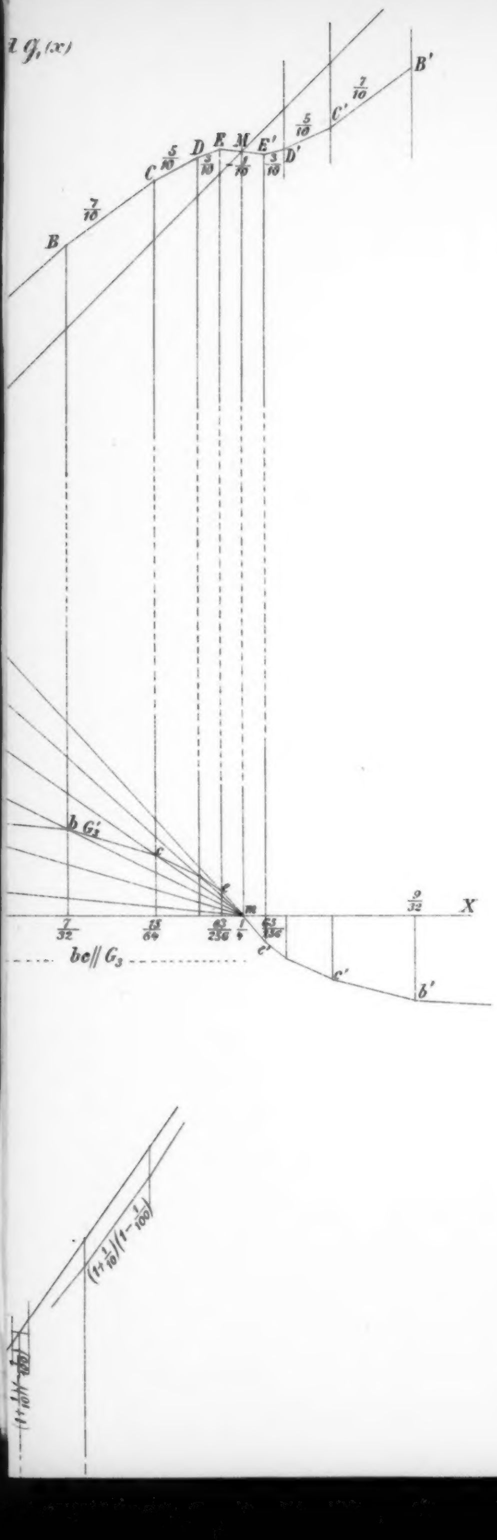


Fig. 2b Konstruktion von $g_2(x)$ u…
$(p_1 = -\frac{1}{10})$
------- $g_3(x)$

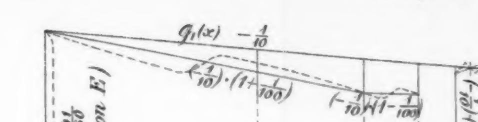
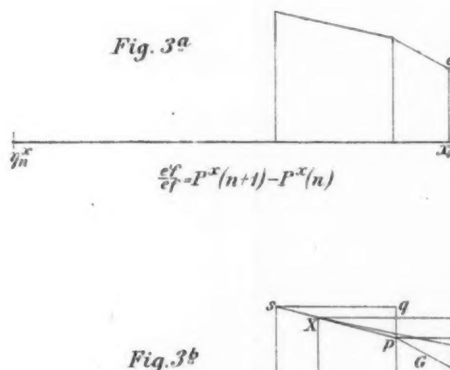
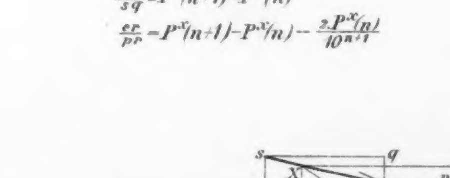


Fig. 3a



$\frac{ef}{cf} = P^x(n+1) - P^x(n)$

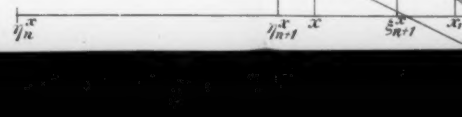
Fig. 3b



$\frac{pq}{sq} = P^x(n+1) - P^x(n)$

$\frac{er}{pr} = P^x(n+1) - P^x(n) - \frac{2P^x(n)}{10^{n+1}}$

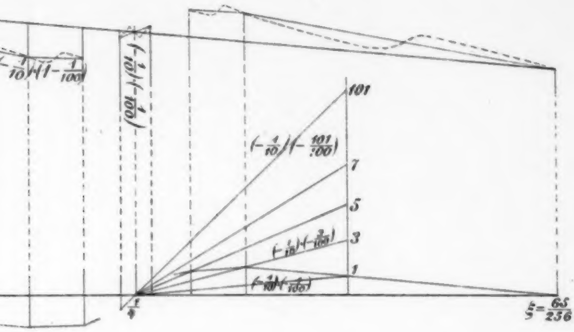
Fig. 3c

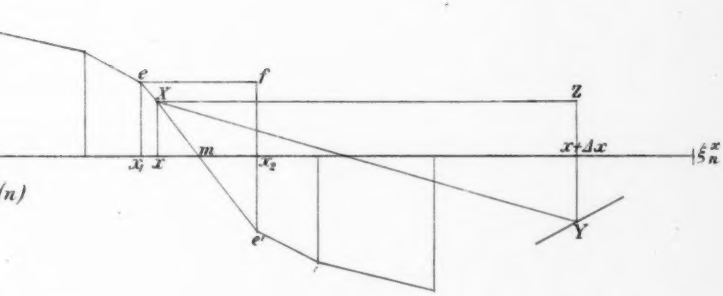


...on von $g_2(x)$ u. $\mathcal{G}_2(x)$ zwischen $x = \frac{63}{256}$ u. $x = \frac{65}{256}$

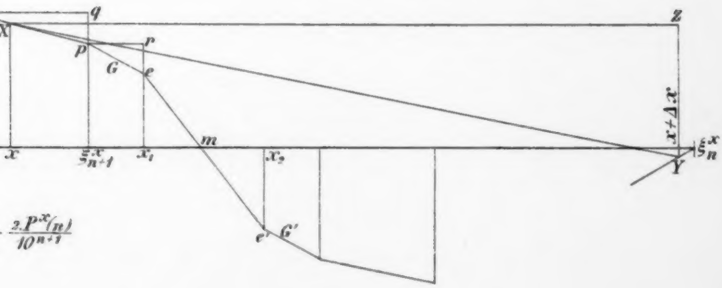
$(p_1 = -\frac{1}{10})$

------ $\mathcal{G}_2(x)$

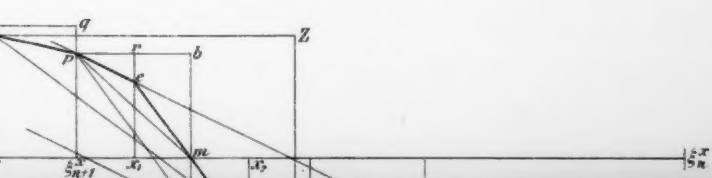




(n)



$\frac{2.P^x(n)}{10^{n+1}}$



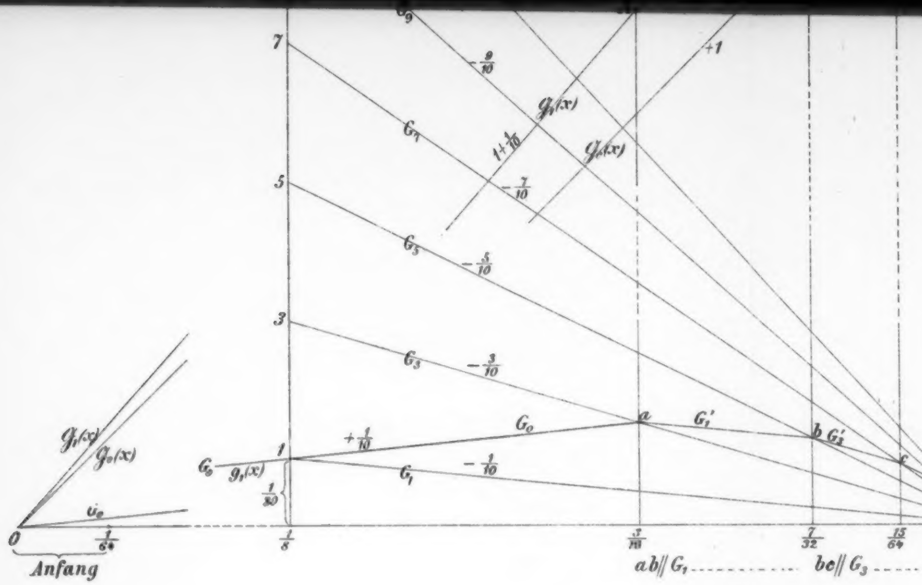
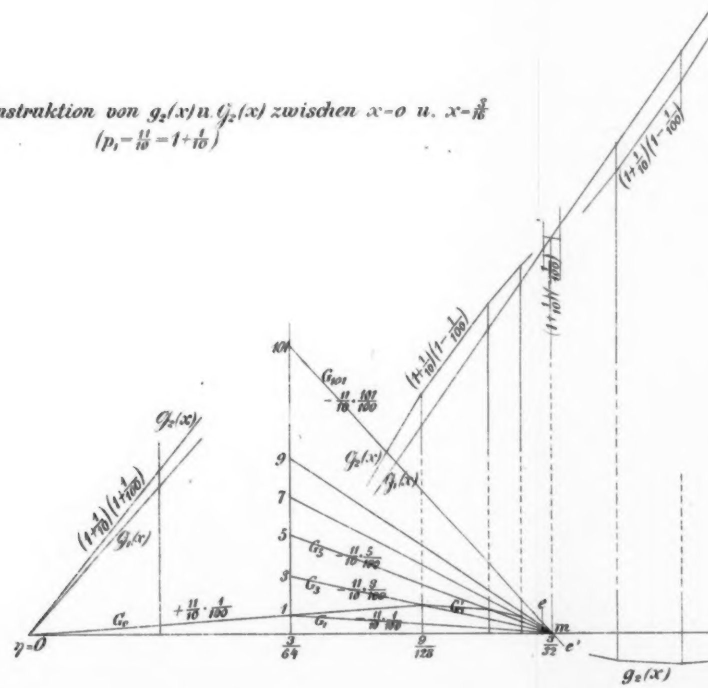
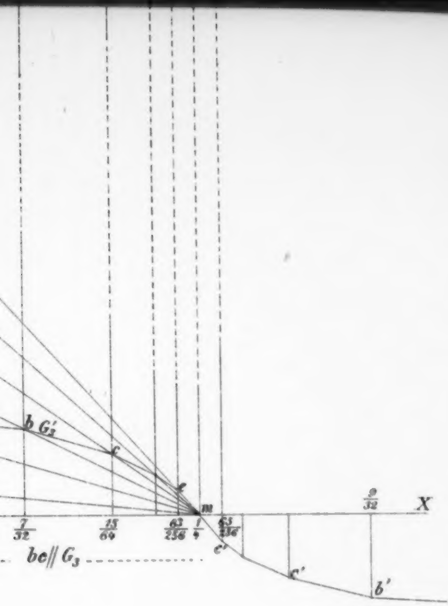


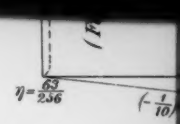
Fig. 2a. Konstruktion von $g_2(x)$ u. $G_2(x)$ zwischen $x=0$ u. $x=\frac{3}{16}$
$\left(p_1=\frac{11}{10}=1+\frac{1}{10}\right)$





b G_2'
c
m
X
$\frac{7}{32}$
$\frac{15}{64}$
$\frac{63}{256}$
$\frac{1}{4}$
$\frac{65}{256}$
$\frac{9}{32}$
$bc \parallel G_3$
c'
b'

$(1+\frac{1}{10})(1-\frac{1}{100})$
$\xi=\frac{9}{16}$
$g_2(x)$

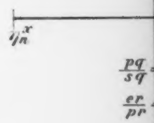


$\eta=\frac{63}{256}$
$(-\frac{1}{10})$

Fig.

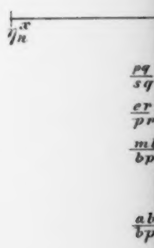
η_n^x

Fig.

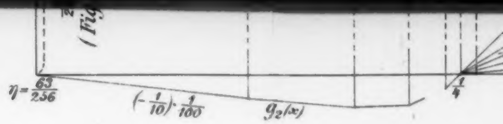


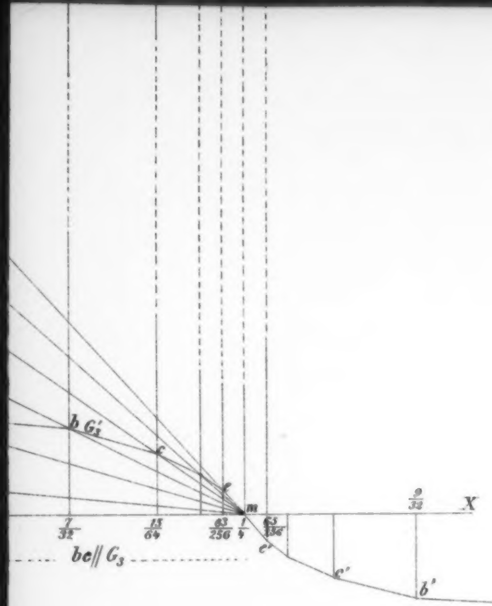
η_n^x
$\frac{pq}{sq}$
$\frac{er}{pr}$

Fig.



η_n^x
$\frac{pq}{sq}$
$\frac{er}{pr}$
$\frac{ab}{bp}$





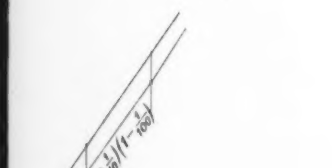
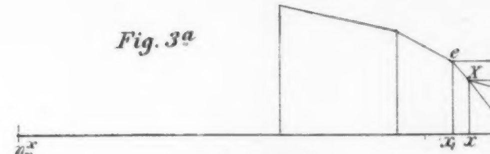
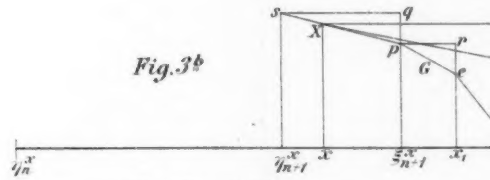


Fig. 3a



$$\frac{eY}{ef} = P^x(n+1) - P^x(n)$$

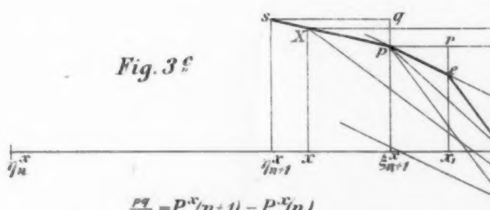
Fig. 3b



$$\frac{pq}{sq} = P^x(n+1) - P^x(n)$$

$$\frac{er}{pr} = P^x(n+1) - P^x(n) - \frac{2P^x(n)}{10^{n+1}}$$

Fig. 3c



$$\frac{pq}{sq} = P^x(n+1) - P^x(n)$$

$$\frac{er}{pr} = P^x(n+1) - P^x(n) - \frac{2P^x(n)}{10^{n+1}}$$

$$\frac{mb}{bp} = P^x(n+1) - P^x(n) - \frac{4P^x(n)}{10^{n+1}}$$

(Siehe Fig. 1 die Lagen von am, bm, cm ...)

$$\frac{ab}{bp} = P^x(n+1) - P^x(n) - \frac{6P^x(n)}{10^{n+1}}$$

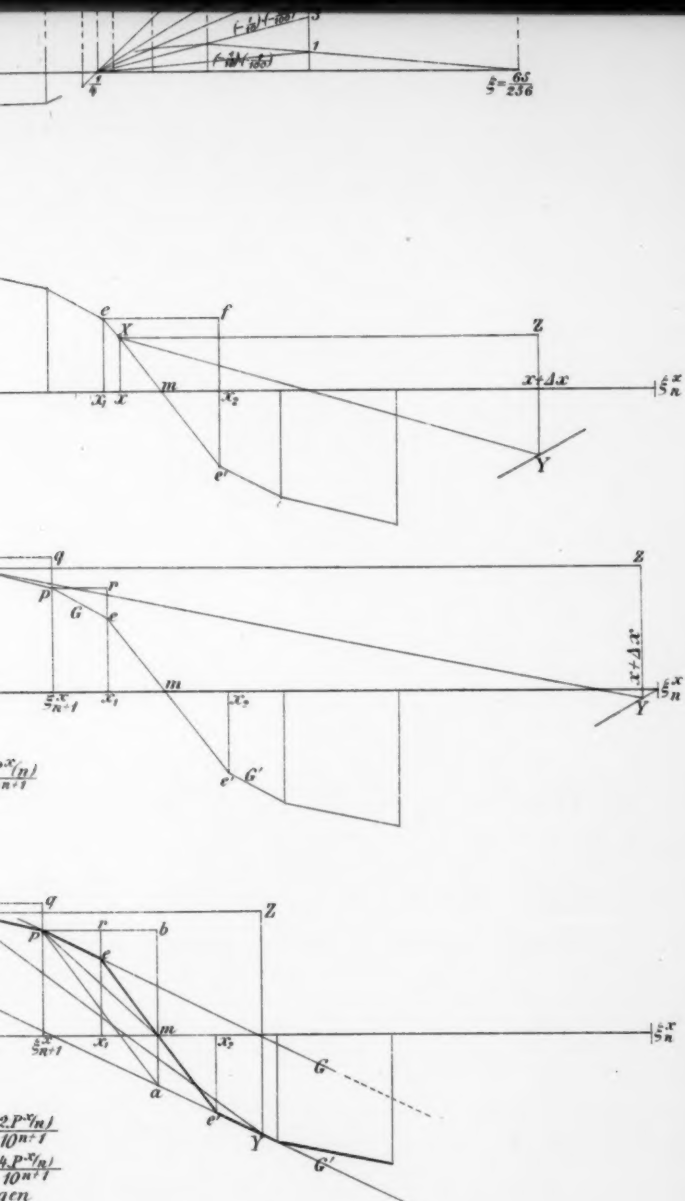


Fig. 3^{a-c}: $\frac{YZ}{XZ} > \frac{ab}{bp}$

d.h. $\frac{\Delta^{q}_{n+1}(x)}{\Delta x} > P^{x}_{(n+1)} - P^{x}_{(n)} - \frac{6.\,P^{x}_{(n)}}{10^{n+1}}$

lith. v. Eschebach & Schaefer, Leipzig.

Ue

Fu
fo
Ri
län
um
de
Fu
mö
ein
vie
Tr
sic
tau
Fu
fül
tra
cie
Kl
σ
ers
bl
un
th
Y
Pe

Ab
we

Ueber Jacobi'sche Functionen k^{ter} Ordnung zweier Variabler.

Von

Alexander Witting in Dresden.

Die vorliegende Arbeit beabsichtigt die Theorie der Jacobi'schen Functionen k^{ter} Ordnung zweier Variabler mit Rücksicht auf ihre Transformation nach dem Principe weiterzuführen, welches in gewissen Richtungen der Theorie der elliptischen Transcendenten bereits seit längerer Zeit massgebend gewesen ist. Der grundlegende Gedanke, um den es sich hier handelt, fordert eine zweckmässige Normirung der Thetafunctionen, er verlangt die Herstellung von Jacobi'schen Functionen, welche sich gegenüber linearer Periodentransformation möglichst einfach verhalten. In dieser Hinsicht nehmen im Gebiete einer Variabeln unter den Jacobi'schen Functionen erster Ordnung die vier Sigmafunctionen eine hervorragende Stelle ein. Bei linearer Transformation bleibt die ungerade Sigmafunction ungeändert, während sich die drei andern ohne hinzutretende Factoren untereinander vertauschen. Wie eine Ausdehnung dieser Eigenschaft auf Jacobi'sche Functionen k^{ter} Ordnung möglich ist, hat Herr Klein*) durch Einführung der X_α, Y_α, Z_α gezeigt, welche sich bei linearer Periodentransformation linear, homogen, mit constanten numerischen Coefficienten substituiren. Im Gebiete zweier Veränderlicher stellte Herr Klein neuerdings**) Functionen auf, welchen er die Bezeichnungen σ und Σ beilegte und von denen bei linearer Transformation die ersteren sich rein permutiren, die letzteren vollkommen invariant bleiben. Mit Hülfe dieser hyperelliptischen Sigmafunctionen wird es uns gelingen, einen weiteren Schritt auf der angezeigten Bahn zu thun und Jacobi'sche Functionen k^{ter} Ordnung zweier Variabler $X_{\alpha\beta}$, $Y_{\alpha\beta}$, $Z_{\alpha\beta}$ zu bilden, welche analog den elliptischen X_α sich bei linearer Periodentransformation linear, homogen, mit constanten numerischen

---

*) Klein „Ueber die elliptischen Normalcurven der N^{ten} Ordnung etc." Abhandl. d. math.-phys. Classe d. K. Sächsischen Ges. d. W. XIII, 1885. Vergl. wegen gerader k Hurwitz, Math. Ann. XXVII.

**) Klein „Hyperelliptische Sigmafunctionen", Math. Ann. XXVII.

Coefficienten substituiren. Wir beschränken uns jedoch dabei der Einfachheit halber zunächst ausschliesslich auf den Fall eines *ungeraden k.*

Bevor wir zur Aufstellung und Untersuchung dieser $X_{\alpha\beta}$ gehen, schicken wir zur Orientirung über unsere Bezeichnung einige Bemerkungen über die lineare Transformation der Thetafunctionen erster Ordnung voraus.

§ 1.

Die lineare Transformation der Thetafunctionen erster Ordnung und der Sigmafunctionen.

Wir bezeichnen als ϑ-Function erster Ordnung der Variabeln v_1 und v_2 mit der Charakteristik

$$c = \begin{vmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{vmatrix}$$

die Doppelsumme:

$$(1) \qquad \vartheta_c(v_1, v_2;\ \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{n_1 n_2}\, e^{i\pi\varphi\left(n_1+\frac{g_1}{2},\, n_2+\frac{g_2}{2}\right) + 2i\pi\left[\left(n_1+\frac{g_1}{2}\right)\left(v_1+\frac{h_1}{2}\right) + \left(n_2+\frac{g_2}{2}\right)\left(v_2+\frac{h_2}{2}\right)\right]},$$

wo:

$$\varphi(n_1, n_2) = \tau_{11} n_1^2 + 2\tau_{12} n_1 n_2 + \tau_{22} n_2^2.$$

Der Nullwerth der Thetafunction $\vartheta_c(0, 0;\ \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})$ sei kurz mit $\vartheta_c(\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})$ oder auch blos mit ϑ_c bezeichnet. Die Argumente v_1, v_2 sind hyperelliptische Integrale erster Ordnung ($p = 2$) mit den Periodicitätsmoduln $1, 0, \tau_{11}, \tau_{12}$ resp. $0, 1, \tau_{21}, \tau_{22}$, welche aus den beiden überall endlichen, von einander linear unabhängigen Integralen u_1, u_2 mit den Perioden $\omega_{1i}, \omega_{2i} (i = 1, 2, 3, 4)$ durch die Formeln:

$$(2) \qquad \begin{gathered} v_1 = \frac{\omega_{22} u_1 - \omega_{12} u_2}{p_{12}}, \qquad v_2 = \frac{-\omega_{21} u_1 + \omega_{11} u_2}{p_{12}}, \\ \tau_{11} = \frac{p_{32}}{p_{12}}, \qquad \tau_{12} = \tau_{21} = \frac{p_{42}}{p_{12}} = \frac{p_{13}}{p_{12}}, \qquad \tau_{22} = \frac{p_{14}}{p_{12}} \end{gathered}$$

gewonnen wurden, in denen

$$p_{ik} = \omega_{1i}\,\omega_{2k} - \omega_{2i}\,\omega_{1k}$$

bedeutet.

Eine lineare Transformation der ω:

$$(3) \qquad \begin{aligned} \omega'_{i1} &= \sum_k a_k\,\omega_{ik}, & \omega'_{i3} &= \sum_k c_k\,\omega_{ik}, \\ \omega'_{i2} &= \sum_k b_k\,\omega_{ik}, & \omega'_{i4} &= \sum_k d_k\,\omega_{ik}, \end{aligned} \qquad i = 1, 2;\ k = 1, 2, 3, 4,$$

mit den charakteristischen Relationen:

$$(4)\qquad \begin{cases} (ab) = a_1 b_3 - a_3 b_1 + a_2 b_4 - a_4 b_2 = 0, \\ (bc) = (cd) = (ad) = 0, \\ (ac) = (bd) = 1 \end{cases}$$

bedingt die folgenden fundamentalen Formeln*), durch welche die transformirten Grössen mit den ursprünglichen zusammenhängen:

$$(5)\qquad \begin{cases} v_1' = \frac{1}{N'}\left\{v_1(b_2+b_3\tau_{12}+b_4\tau_{22}) - v_2(b_1+b_3\tau_{11}+b_4\tau_{12})\right\}, \\ v_2' = \frac{1}{N'}\left\{-v_1(a_2+a_3\tau_{12}+a_4\tau_{22}) + v_2(a_1+a_3\tau_{11}+a_4\tau_{12})\right\}, \\ \tau_{11}' = \frac{1}{N'}\left\{(cb)_{12}+(cb)_{32}\tau_{11}+2(cb)_{13}\tau_{12}+(cb)_{14}\tau_{22} \right. \\ \qquad\qquad \left. + (cb)_{43}(\tau_{12}^2-\tau_{11}\tau_{22})\right\}, \\ \tau_{12}' = \frac{1}{N'}\left\{(db)_{12}+(db)_{32}\tau_{11}+[2(db)_{13}+1]\tau_{12}+(db)_{14}\tau_{22} \right. \\ \qquad\qquad \left. + (db)_{43}(\tau_{12}^2-\tau_{11}\tau_{22})\right\}, \\ \tau_{22}' = \frac{1}{N'}\left\{(ad)_{12}+(ad)_{32}\tau_{11}+2(ad)_{13}\tau_{12}+(ad)_{14}\tau_{22} \right. \\ \qquad\qquad \left. + (ad)_{43}(\tau_{12}^2-\tau_{11}\tau_{22})\right\}, \\ N' = (ab)_{12}+(ab)_{32}\tau_{11}+2(ab)_{13}\tau_{12}+(ab)_{14}\tau_{22}+(ab)_{43}(\tau_{12}^2-\tau_{11}\tau_{22}). \end{cases}$$

Hierbei bedeutet

$$(xy)_{ik} = x_i y_k - x_k y_i.$$

Setzt man ferner

$$(6)\qquad \left.\begin{cases} g_1' \equiv a_1 g_1 + a_2 g_2 + a_3 h_1 + a_4 h_2 + a_1 a_3 + a_2 a_4 \\ g_2' \equiv b_1 g_1 + b_2 g_2 + b_3 h_1 + b_4 h_2 + b_1 b_3 + b_2 b_4 \\ h_1' \equiv c_1 g_1 + c_2 g_2 + c_3 h_1 + c_4 h_2 + c_1 c_3 + c_2 c_4 \\ h_2' \equiv d_1 g_1 + d_2 g_2 + d_3 h_1 + d_4 h_2 + d_1 d_3 + d_2 d_4 \end{cases}\right| \text{ mod. } 2,$$

und

$$(7)\qquad \begin{cases} \Psi(v_1, v_2) = B_{11} v_1^2 + 2 B_{12} v_1 v_2 + B_{22} v_2^2, \\ \quad B_{11} = (ab)_{32} + (ab)_{34}\tau_{22}, \\ \quad B_{12} = (ab)_{13} + (ab)_{43}\tau_{12}, \\ \quad B_{22} = (ab)_{14} + (ab)_{34}\tau_{22}, \end{cases}$$

so besteht die Gleichung:

$$(8)\qquad \vartheta_{c'}(v_1', v_2'; \tau_{ik}') = j\sqrt{N'}\, e^{\frac{i\pi}{N'}\Psi(v_1, v_2)}\, \vartheta_c(v_1, v_2; \tau_{ik}),$$

wobei j eine in jedem einzelnen Falle näher zu bestimmende achte Einheitswurzel und c' die transformirte Charakteristik

$$c' = \begin{vmatrix} g_1' & g_2' \\ h_1' & h_2' \end{vmatrix}$$

vorstellt.

*) Hermite, Comptes rendus t. 40, 1855.

Die Gleichung (8) verwenden wir nun zur Herleitung einer Hülfsformel, welche der fundamentalen Eigenschaft der Sigmafunction entspringt.

Schreiben wir nämlich die σ-Function der Charakteristik c:

$$\sigma_c(u_1, u_2) = \frac{\vartheta_c(v_1, v_2;\ \tau_{ik})}{M_c(\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})} \cdot e^{i\pi\Phi(v_1, v_2, \tau_{ik})} \tag{9}$$

in den Grössen v_i', τ_{ik}', so kommt nach (8)

$$\sigma_c(u_1, u_2, \tau_{ik}) = \sigma_{c'}(u_1, u_2, \tau_{ik}') = \frac{\vartheta_{c'}(v_1', v_2';\ \tau_{ik}')}{M_{c'}(\tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}')} e^{i\pi\Phi(v_1', v_2'; \tau_{ik}')}$$

$$= \frac{\vartheta_c(v_1, v_2;\ \tau_{ik})}{M_c(\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})} e^{i\pi\left\{\Phi(v_1', v_2'; \tau_{ik}') + \frac{\Psi(v_1, v_2)}{N'}\right\}}.$$

Durch Vergleichung mit (9) erhalten wir aber die gesuchte Beziehung:

$$\Phi(v_1', v_2';\ \tau_{ik}') = \Phi(v_1, v_2;\ \tau_{ik}) - \frac{1}{N'}\Psi(v_1, v_2;\ \tau_{ik}). \tag{10}$$

Wir setzten dabei in Formel (9) *)

$$\Phi(v_1, v_2;\ \tau_{ik}) = A_{11}v_1^2 + 2A_{12}v_1v_2 + A_{22}v_2^2,$$

$$A_{11} = -\frac{1}{5}\sum_1^{10} \frac{\partial \log \vartheta}{\partial \tau_{11}},$$

$$A_{12} = -\frac{1}{10}\sum_1^{10} \frac{\partial \log \vartheta}{\partial \tau_{12}},$$

$$A_{22} = -\frac{1}{5}\sum_1^{10} \frac{\partial \log \vartheta}{\partial \tau_{22}},$$

während für die Modulfunction M_c im Nenner zu schreiben ist

$$\left|\begin{array}{l} \text{bei gerader Charakteristik } M_c(\tau_{ik}) = \vartheta_c(\tau_{ik}), \\ \text{bei ungerader Charakteristik } M_c(\tau_{ik}) = \left(\dfrac{\partial \vartheta_c}{\partial u_1}\right)_{v=0}. \end{array}\right. \tag{11}$$

§ 2.

Aufstellung der $X_{\alpha\beta}^{(c)}$.

Nach dem in der Einleitung bemerkten ist es unsere Aufgabe, für eine Charakteristik c k^2 linear unabhängige Jacobi'sche Functionen den erläuterten Forderungen entsprechend zu normiren. Wir wählen dazu die schon vielfach **) benutzten Functionen:

---

*) Klein, a. a. O. p. 435, 438.

**) Vergl. z. B. Krause, die Transformation der hyperelliptischen Functionen etc., Leipzig 1886, (p. 244 ff.).

$$\vartheta_c\begin{pmatrix} kv_1 + \alpha\tau_{11} + \beta\tau_{12} \\ kv_2 + \alpha\tau_{12} + \beta\tau_{22} \end{pmatrix}; \; k\tau_{11}, k\tau_{12}, k\tau_{22}\Big) \tag{12}$$

$$\alpha, \beta = 0, 1, 2, \cdots, k-1,$$

sodass unsere gesuchten $X_{\alpha\beta}^{(c)}$ die Form erhalten:

$$X_{\alpha\beta}^{(c)}(v_1, v_2; \tau_{ik}) = C \cdot e^{\chi(v_1, v_2; \tau_{ik})}\, \vartheta_c\left(\begin{matrix} kv_1 + \alpha\tau_{11} + \beta\tau_{12} \\ kv_2 + \alpha\tau_{12} + \beta\tau_{22} \end{matrix}; \; k\tau_{11}, k\tau_{12}, k\tau_{22}\right),$$

in der wir die Constante C und die Function χ zu bestimmen haben. Aus der allgemeinen Theorie folgt sofort, dass χ in v_1 und v_2 nur bis zum zweiten Grade ansteigt und dass ferner die Glieder zweiter Dimension für alle k^2 Functionen dieselben, ja sogar von der ausgewählten Charakteristik unabhängig sein müssen.

Zur näheren Definition unserer Functionen verlangen wir nun weiter, dass die Quotienten:

$$\frac{X_{\alpha\beta}^{(c)}}{\sigma_c(u_1, u_2)^k}, \tag{13}$$

welche sich den linearen Transformationen gegenüber wie die $X_{\alpha\beta}^{(c)}$ selbst verhalten, *vierfach periodische Functionen* sein sollen. Bilden wir jetzt mit den Grössen (12) die analogen vierfach periodischen Functionen:

$$e^{2i\pi\left[\alpha\left(v_1 + \frac{h_1}{2}\right) + \beta\left(v_2 + \frac{h_2}{2}\right)\right] + \frac{i\pi}{k}\varphi(\alpha, \beta)} \frac{\vartheta_c\left(\begin{matrix} kv_1 + \alpha\tau_{11} + \beta\tau_{12} \\ kv_2 + \alpha\tau_{12} + \beta\tau_{22} \end{matrix}; \; k\tau_{11}, \ldots\right)}{\vartheta_c(v_1, v_2; \tau_{11}, \ldots)^k}, \tag{14}$$

so wollen wir die Ausdrücke (13) den Grössen (14) proportional setzen:

$$\frac{X_{\alpha\beta}^{(c)}}{\sigma_c^k} = C e^{\frac{i\pi}{k}\varphi(\alpha, \beta) + 2i\pi\left[\alpha\left(v_1 + \frac{h_1}{2}\right) + \beta\left(v_2 + \frac{h_2}{2}\right)\right]} \frac{\vartheta_c\left(\begin{matrix} kv_1 + \alpha\tau_{11} + \beta\tau_{12} \\ kv_2 + \alpha\tau_{12} + \beta\tau_{22} \end{matrix}; \; k\tau_{11}, \ldots\right)}{\vartheta_c(v_1, v_2; \tau_{11} \ldots)^k};$$

$\varphi(\alpha, \beta)$ hat hier die in Formel (1) erläuterte Bedeutung.

Zur Ermittelung der von den α, β unabhängigen Grösse C, die wohl noch eine Modulfunction sein kann, dient die Ueberlegung, dass bei der Bildung der v_i, τ_{ik} die Periodendeterminante p_{12} ausgezeichnet wurde. Führen wir der Reihe nach diejenigen linearen Transformationen (3) aus, welche p_{12} durch die gleichberechtigten Grössen p_{34}, p_{14}, p_{32} ersetzen, so treten respective die Factoren:

$$\varkappa_1 C\left(\frac{p_{34}}{p_{12}}\right)^{\frac{k-1}{2}}, \quad \varkappa_2 C\left(\frac{p_{14}}{p_{12}}\right)^{\frac{k-1}{2}}, \quad \varkappa_3 C\left(\frac{p_{32}}{p_{12}}\right)^{\frac{k-1}{2}}$$

in den für den Quotienten (13) entstehenden Ausdrücken auf, in welchen $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ rein numerisch sind. Wir setzen demnach:

$$C = p_{12}^{\frac{k-1}{2}},$$

und erhalten somit auf Grund der Definition der σ-Functionen die endgültige Formel*):

$$(15)\qquad X_{\alpha\beta}^{(c)}(v_1, v_2;\ \tau_{11}\ldots)$$

$$= p_{12}^{\frac{k-1}{2}} \cdot e^{\frac{i\pi}{k}\varphi(\alpha,\beta) + 2i\pi\left[\alpha\left(v_1+\frac{h_1}{2}\right)+\beta\left(v_2+\frac{h_2}{2}\right)\right]} \cdot \vartheta_c\begin{pmatrix} kv_1+\alpha\tau_{11}+\beta\tau_{12} \\ kv_2+\alpha\tau_{12}+\beta\tau_{22} \end{pmatrix};\ k\tau_{11}\ldots\Big) \times \frac{e^{ki\pi\Phi(v_1,v_2)}}{M_c(\tau_{11},\tau_{12},\tau_{22})^k}$$

$$= p_{12}^{\frac{k-1}{2}} \cdot \frac{e^{ki\pi\Phi(v_1,v_2)}}{M_c(\tau_{11},\ldots)^k} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{n_1,n_2}\ e^{\left\{\begin{array}{l}\frac{i\pi}{k}\varphi\left(k\left[n_1+\frac{g_1}{2}\right]+\alpha,\ k\left[n_2+\frac{g_2}{2}\right]+\beta\right) \\ +2i\pi\left[\left(k\left[n_1+\frac{g_1}{2}\right]+\alpha\right)\left(v_1+\frac{h_1}{2}\right)+\left(k\left[n^2+\frac{g_2}{2}\right]+\beta\right)\left(v_2+\frac{h_2}{2}\right)\right]\end{array}\right\}},$$

wobei M_c die in Formel (11) erklärte Bedeutung hat.

§ 3.

Functionalgleichungen und lineare Transformation.

Unsere Functionen genügen den folgenden Functionalgleichungen:

$$(16)\qquad X_{\alpha\beta}^{(c)} = X_{\alpha+k,\beta}^{(c)} = X_{\alpha,\beta+k}^{(c)},$$

$$(17)\qquad X_{\alpha\beta}^{(c)}(-v_1, -v_2) = (-1)^{g_1h_1+g_2h_2}\, X_{k-\alpha,k-\beta}^{(c)}(v_1, v_2),$$

$$(18)\left\{\begin{array}{ll} X_{\alpha\beta}^{(c)}\left(v_1+\frac{\lambda}{k}, v_2\right) & = (-1)^{g_1\lambda}\,\varepsilon^{\alpha\lambda}\, X_{\alpha\beta}^{(c)}\, e^{ki\pi\Delta_\lambda\Phi}, \\ X_{\alpha\beta}^{(c)}\left(v_1, v_2+\frac{\mu}{k}\right) & = (-1)^{g_2\mu}\,\varepsilon^{\beta\mu}\, X_{\alpha\beta}^{(c)}\, e^{ki\pi\Delta_\mu\Phi}, \\ X_{\alpha\beta}^{(c)}\left(v_1+\frac{\nu\tau_{11}}{k}, v_2+\frac{\nu\tau_{12}}{k}\right) & = (-1)^{h_1\nu}\, e^{-i\pi\nu\left(2v_1+\frac{\nu\tau_{11}}{k}\right)}\, X_{\alpha+\nu,\beta}^{(c)}\, e^{ki\pi\Delta_\nu\Phi}, \\ X_{\alpha\beta}^{(c)}\left(v_1+\frac{\varrho\tau_{12}}{k}, v_2+\frac{\varrho\tau_{22}}{k}\right) & = (-1)^{h_2\varrho}\, e^{-i\pi\varrho\left(2v_2+\frac{\varrho\tau_{22}}{k}\right)}\, X_{\alpha,\beta+\varrho}^{(c)}\, e^{ki\pi\Delta_\varrho\Phi}. \end{array}\right.$$

Hierbei sind λ, μ, ν, ϱ ganze Zahlen, $\Delta_\lambda\Phi$, $\Delta_\mu\Phi$, etc. bedeuten die entsprechenden, für unsere weiteren Untersuchungen unwesentlichen Zunahmen von $\Phi(v_1, v_2)$; $X_{\alpha\beta}^{(c)}$ wurde, wie schon vorher, zur Abkürzung für $X_{\alpha\beta}^{(c)}(v_1, v_2;\ \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})$ gesetzt, ε bedeutet $e^{\frac{2i\pi}{k}}$.

---

*) Ueber die hier verwendete Summe vergl. Weber „Anwendung der Thetafunctionen etc.“, Math. Ann. XIV.

So wie wir in der Aufstellung der $X_{\alpha\beta}$ schon den von Herrn Klein bei der Bildung der X_α eingeschlagenen Weg benutzten, so werden wir auch bei der linearen Transformation unserer Functionen die a. a. O. angewendeten einfachen Methoden verwerthen.

Herr Kronecker*) hat zuerst gezeigt, dass man durch Wiederholung und Combination von einfachen erzeugenden Transformationen die ganze, unendliche Gruppe aller linearen Periodentransformationen gewinnen kann und er sowie Herr Krazer**) haben die Minimalzahl der dabei anzuwendenden Transformationen zu vier bestimmt. Wir haben daher zur vollständigen Erledigung unserer Aufgabe nur die Einwirkung solcher vier erzeugender Operationen auf die $X_{\alpha\beta}^{(c)}$ zu untersuchen. Es sei dazu das folgende System der Transformationen S, T, U, V***) ausgewählt:

	S	T	U	V	
$\omega'_{i1} =$	ω_{i1}	ω_{i3}	ω_{i1}	ω_{i2}	
$\omega'_{i2} =$	ω_{i2}	ω_{i2}	ω_{i2}	ω_{i1}	$i = 1, 2$
$\omega'_{i3} =$	$\omega_{i1} + \omega_{i3}$	$-\omega_{i1}$	$\omega_{i2} + \omega_{i3}$	ω_{i4}	
$\omega'_{i4} =$	ω_{i4}	ω_{i4}	$\omega_{i1} + \omega_{i4}$	ω_{i3}	

Für jede dieser Transformationen erhalten wir dann analog der Formel (8) nach dem Hermite'schen Satze eine Identität:

$$X_{\alpha\beta}^{(c')}(v_1', v_2'; \tau'_{11} \ldots) = X_{\alpha\beta}'^{(c')} = \sum_0^{k-1}{}_{\gamma,\delta}\, c_{\alpha\beta\gamma\delta}\, X_{\gamma\delta}^{(c)}, \tag{19}$$

in der die Coefficienten $c_{\alpha\beta\gamma\delta}$ zu bestimmen sind; *stellen sich dieselben dabei als rein numerisch heraus, so wird die Zweckmässigkeit unserer Normirung bewiesen sein.*

Wir wollen die Rechnung nur für die Operation S andeuten, also jetzt unter v_i', τ'_{ik}, c' die vermöge S aus den Formeln (5) und (6) gewonnenen Grössen verstehen:

$$v_1' = v_1, \quad v_2' = v_2, \quad \tau'_{11} = 1 + \tau_{11}, \quad \tau'_{12} = \tau_{12}, \quad \tau'_{22} = \tau_{22},$$

$$c' = \begin{vmatrix} g_1 & g_2 \\ g_1 + h_1 + 1 & h_2 \end{vmatrix}.$$

Nun ersetzen wir in $X_{\alpha\beta}'^{(c')}$ den Ausdruck $\Phi(v_1', v_2'; \tau'_{11} \ldots)$ nach (10) durch

---

*) Kronecker „Ueber bilineare Formen", Berl. Monatsber. 1866, p. 597.

**) Krazer „Ueber die Zusammensetzung ganzzahliger linearer Substitutionen etc.", Annali di Matematica, ser. 2, XII.

***) Diese 4 Transformationen gehen durch Vertauschung der Indices 1 und 3, 2 und 4 in die von Herrn Krazer a. a. O. angegebenen über.

$$\Phi(v_1, v_2; \tau_{11} \cdots) - \frac{1}{N'} \Psi(v_1, v_2; \tau_{11} \cdots)$$

wo $\Psi = 0$ sich aus (7) ergiebt.

Ferner vermehren wir in (19), v_1 und v_2 der Reihe nach um resp.

$$\frac{\lambda}{k},\ 0;\ 0,\ \frac{\mu}{k};\ \frac{\nu\tau_{11}}{k},\ \frac{\nu\tau_{12}}{k};\ \frac{\varrho\tau_{12}}{k},\ \frac{\varrho\tau_{22}}{k},$$

während wir gleichzeitig v_1', v_2' um die entsprechenden Grössen wachsen lassen:

$$\frac{\lambda}{k},\ 0;\ 0,\ \frac{\mu}{k};\ \frac{\nu}{k}(\tau_{11}'-1),\ \frac{\nu}{k}\tau_{12}';\ \frac{\varrho\tau_{12}'}{k},\ \frac{\varrho\tau_{22}'}{k}.$$

Unsere Functionalgleichungen (18) ergeben dann:

$$(-1)^{g_1\lambda}\varepsilon^{\alpha\lambda} X'^{(c')}_{\alpha\beta} = \sum c_{\alpha\beta\gamma\delta}(-1)^{g_1\lambda}\varepsilon^{\gamma\lambda} X^{(c)}_{\gamma\delta},$$

$$(-1)^{g_2\mu}\varepsilon^{\beta\mu} X'^{(c')}_{\alpha\beta} = \sum c_{\alpha\beta\gamma\delta}(-1)^{g_2\mu}\varepsilon^{\delta\mu} X^{(c)}_{\gamma\delta},$$

$$(-1)^{(g_1+h_1+1)\nu} e^{-i\pi\nu\left(2v_1'+\frac{\nu\tau_{11}'}{k}\right)} \cdot (-1)^{g_1\nu}\varepsilon^{-(\alpha+\nu)\nu}\varepsilon^{\nu^2} X'^{(c')}_{\alpha+\nu\,\beta}$$

$$= \sum c_{\alpha\beta\gamma\delta}(-1)^{h_1\nu} e^{-i\pi\nu\left(2v_1+\frac{\nu\tau_{11}}{k}\right)} X^{(c)}_{\gamma+\nu\,\delta},$$

$$(-1)^{h_2\varrho} e^{-i\pi\varrho\left(2v_2'+\frac{\varrho\tau_{22}'}{k}\right)} X'^{(c')}_{\alpha\,\beta+\varrho} = \sum c_{\alpha\beta\gamma\delta}(-1)^{h_2\varrho} e^{-i\pi\varrho\left(2v_2+\frac{\varrho\tau_{22}}{k}\right)} X^{(c)}_{\gamma\,\delta+\varrho}.$$

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt, dass alle $c_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$, bis auf $_{\alpha\beta\alpha\beta}$. Ersetzt man in der dritten Gleichung α durch $\alpha - \nu$, so kommt durch Vergleich mit (19)

$$c_{\alpha\beta\alpha\beta} = c_{\alpha-\nu\,\beta\,\alpha-\nu\,\beta}(-1)^{\nu}\varepsilon^{\alpha\nu-\frac{\nu^2}{2}},$$

also für $\nu = \alpha$

$$c_{\alpha\beta\gamma\delta} = c_{0\beta0\beta}(-1)^{\alpha}\varepsilon^{\frac{\alpha^2}{2}}.$$

Die letzte Gleichung liefert dann endlich:

$$c_{\alpha\beta\gamma\delta} = C_S(-1)^{\alpha}\varepsilon^{\frac{\alpha^2}{2}},$$

wobei wir C_S für c_{0000} setzten.

Wir haben nun für die Transformation S die Formel erhalten

$$(20)\qquad S \mid X'^{(c')}_{\alpha\beta} = C_S(-1)^{\alpha}\varepsilon^{\frac{\alpha^2}{2}} X^{(c)}_{\alpha\beta}.$$

Auf ähnliche Weise entstehen für T, U und V die Gleichungen:

$$(21)\ T \mid X'^{(c')}_{\alpha\beta} = C_T \sum_{\gamma=0}^{k-1} \varepsilon^{\alpha\gamma} X^{(c)}_{\gamma\beta},$$

$$v_1' = \frac{v_1}{\tau_{11}},\quad v_2' = -\frac{v_1'\tau_{12}}{\tau_{11}} + v_2,\qquad\qquad \Psi = v_1^2,$$

$$\tau'_{11} = -\frac{1}{\tau_{11}}, \quad \tau'_{12} = \frac{\tau_{12}}{\tau_{11}}, \quad \tau'_{22} = \frac{\tau_{11}\tau_{22} - \tau_{12}^2}{\tau_{11}}, \quad c' = \begin{vmatrix} h_1 & g_2 \\ g_1 & h_2 \end{vmatrix};$$

(22) $U \mid X'^{(c')}_{\alpha\beta} = C_U \, \varepsilon^{\alpha\beta} X^{(c)}_{\alpha\beta}$,

$$v_1' = v_1, \quad v_2' = v_2, \qquad \Psi = 0,$$

$$\tau'_{11} = \tau_{11}, \quad \tau'_{12} = 1 + \tau_{12}, \quad \tau'_{22} = \tau_{22}, \quad c' = \begin{vmatrix} g_1 & g_2 \\ g_2 + h_1 & g_1 + h_2 \end{vmatrix};$$

(23) $V \mid X'^{(c')}_{\alpha\beta} = C_V \, X^{(c)}_{\beta\alpha}$,

$$v_1' = v_2, \quad v_2' = v_1, \qquad \Psi = 0,$$

$$\tau'_{11} = \tau_{22}, \quad \tau'_{12} = \tau_{12}, \quad \tau'_{22} = \tau_{11}, \qquad c' = \begin{vmatrix} g_2 & g_1 \\ h_2 & h_1 \end{vmatrix}.$$

§ 4.

Bestimmung der vier Constanten C_S, C_T, C_U, C_V.

Wir haben soeben die $c_{\alpha\beta\gamma\delta}$ in zwei Theile gespalten, deren einer nur von den α, β, γ, δ abhängt, während der noch nicht ermittelte Bestandtheil sich als ein gemeinsamer Factor aller $c_{\alpha\beta\gamma\delta}$ einer Transformation herausstellte, von dem wir zu zeigen haben, dass er keine Function der ω_{ik}, sondern eine rein numerische Constante ist.

Wir erhalten sofort aus (20) für $v_i = v_i' = 0$, $\alpha = \beta = 0$:

$$\frac{p_{12}'^{\frac{k-1}{2}}}{M_{c'}(\tau'_{11}\cdots)^k}\,\vartheta_{c'}(k\tau'_{11}, k\tau'_{12}, k\tau'_{22}) = \frac{C_S\, p_{12}^{\frac{k-1}{2}}}{M_c(\tau_{11}\,\tau_{12}\,\tau_{22})^k}\,\vartheta_c(k\tau_{11}, k\tau_{12}, k\tau_{22}).$$

Da nun nach (8)

$$M_{c'}(\tau'_{11}\cdots) = j\,M_c(\tau_{11}\cdots), \quad \vartheta_{c'}(k\tau'_{11}\cdots) = j\,\vartheta_c(k\tau_{11}\cdots),$$

ferner nach (5)

$$\frac{p_{12}'}{p_{12}} = N' = 1,$$

so wird:

$$C_S = \frac{1}{j^{k-1}}, \qquad j = e^{\frac{5i\pi}{4}g_1}.$$

Ebenso kommt aus (21) unter Beachtung der Reihenentwickelung (15):

$$\frac{p_{12}'^{\frac{k-1}{2}}}{M_{c'}(\tau'_{11}\cdots)^k}\,\vartheta_{c'}(k\tau'_{11}, k\tau'_{12}, k\tau'_{22}) = \frac{C_T\, p_{12}^{\frac{k-1}{2}}}{M_c(\tau_{11}\cdots)^k}\,\vartheta_c\left(\frac{\tau_{11}}{k}, \tau_{12}, k\tau_{22}\right).$$

Hier ist

$$\frac{p_{12}'}{p_{12}} = N' = \tau_{11}, \quad M_{c'}(\tau'_{11}\cdots) = j\sqrt{\tau_{11}}\,M_c(\tau_{11}\cdots),$$

$$\vartheta_{c'}(k\tau'_{11}, k\tau'_{12}, k\tau'_{22}) = j\,\frac{\sqrt{\tau_{11}}}{\sqrt{k}}\,\vartheta_c\left(\frac{\tau_{11}}{k}, \tau_{12}, k\tau_{22}\right),$$

also

$$C_T = \frac{j\,\tau_{11}^{\frac{k-1}{2}} \sqrt{\tau_{11}}}{j^k\,\tau_{11}^{\frac{k}{2}} \sqrt{k}} = \frac{1}{j^{k-1}\sqrt{k}}; \quad j = e^{-\frac{i\pi}{4} - g_1 h_1 \frac{i\pi}{2}}.$$

Wir führen die gleicherweise gewonnenen Werthe von C_U und C_V einfach an; es wird:

$$C_U = \frac{1}{j^{k-1}}, \quad j = e^{\frac{g_1 g_2}{2} i\pi},$$

$$C_V = (-1)^{\frac{k-1}{2}}.$$

§ 5.

Discussion der Formeln.

Aus unsern Formeln folgen einige bemerkenswerthe Resultate, die wir in kurzen Sätzen zusammenfassen wollen:

I. Unsere $X_{\alpha\beta}^{(c)}$ bilden 16 durch ihre Charakteristik unterschiedene Systeme von je k^2 linear unabhängigen Jacobi'schen Functionen k^{ter} Ordnung. (Vergl. Formeln (15), (16), (17) für $\lambda = \mu = \nu = \varrho = k$).

II. Ein linear transformirtes $X'^{(c')}_{\alpha\beta}$ stellt sich dar als homogenes lineares Aggregat von ursprünglichen $X_{\gamma\delta}^{(c)}$ mit numerischen Coefficienten, von denen nur ein allen gemeinsamer Factor von der Charakteristik abhängig ist. Diesen Factor nennen wir kurz den *charakteristischen Factor*.

III. Da die Charakteristiken c und c' beide gleichzeitig gerade oder ungerade sind, so spalten sich die 16 Systeme in zwei Gruppen, deren erste die 10 Systeme gerader, deren zweite die 6 übrigen ungerader Charakteristik umfasst. Die Substitutionen gehen nur innerhalb der beiden Gruppen vor sich.

Die Transformationsgleichungen der $X_{\alpha\beta}^{(c)}$ wollen wir als *Klein'sche Identitäten* bezeichnen, da Herr Klein für $p = 1$ zuerst mit Consequenz die Aufmerksamkeit auf dieselben lenkte.

IV. Auf dieselbe Weise, der wir uns zur Ableitung der Identitäten (20) bis (23) bedienten, können die Umkehrungen:

$$X_{\alpha\beta}^{(c)} = \sum c_{\alpha\beta\gamma\delta}\, X'^{(c')}_{\gamma\delta}$$

gewonnen werden, während man durch einfache Vertauschung von c mit c' Identitäten von der Form:

$$X'^{(c)}_{\alpha\beta} = \sum c_{\alpha\beta\gamma\delta}\, X_{\gamma\delta}^{(c')}$$

erhält.

V. Sind A und B zwei lineare Transformationen, welche mod. k übereinstimmen, so ist die lineare Transformation M, welche die symbolische Gleichung:

$$A \,.\, M = B$$

befriedigt, mod. k zur Identität congruent, besitzt also das Coefficientenschema:

$$\begin{vmatrix} 1+k\alpha_1 & k\alpha_2 & k\alpha_3 & k\alpha_4 \\ k\beta_1 & 1+k\beta_2 & k\beta_3 & k\beta_4 \\ k\gamma_1 & k\gamma_2 & 1+k\gamma_3 & k\gamma_4 \\ k\delta_1 & k\delta_2 & k\delta_3 & 1+k\delta_4 \end{vmatrix}.$$

Man erkennt leicht, dass die Anwendung von M auf ein $X_{\alpha\beta}^{(c)}$ die Relation

$$X'^{(c')}_{\alpha\beta} = C_M\, X_{\alpha\beta}^{(c)}$$

zur Folge hat. Da nun k ungerade vorausgesetzt wurde, die Charakteristik aber nur mod. 2 in Betracht kommt, so können wir zu jeder beliebigen Transformation A, welche c in c' verwandelt, eine mod. k mit ihr übereinstimmende Transformation B angeben, welche die Charakteristik c ungeändert lässt. Dann folgt, *dass die beiden, A und B entsprechenden Klein'schen Identitäten bis auf den charakteristischen Factor übereinstimmen.*

VI. Deutet man die k^2 Functionen $X_{\alpha\beta}^{(c)}$ einer bestimmten Charakteristik c als homogene Punktcoordinaten im Raume von (k^2-1) Dimensionen und wendet nur diejenigen Transformationen an, welche c ungeändert lassen, (es sind dies diejenigen, die modulo 2 zur Identität congruent sind), so stellen die entstehenden Klein'schen Identitäten *Collineationen des Raumes in sich* dar und zwar erhält man eine *endliche Gruppe* von

$$\frac{1}{2}(k^4-1)k^3(k^2-1)k$$

Collineationen*) mit einer festbleibenden *Configuration* linearer Elemente. Nach V. *ist die Collineationsgruppe und ihre Configuration von der gerade ausgewählten Charakteristik unabhängig.*

§ 6.

Die Functionen $Y_{\alpha\beta}^{(c)}$, $Z_{\alpha\beta}^{(c)}$.

Die Functionalgleichung (17) giebt Veranlassung zur Bildung von geraden und ungeraden Functionen, von denen wir die ersteren mit $Y_{\alpha\beta}^{(c)}$, die letzteren mit $Z_{\alpha\beta}^{(c)}$ bezeichnen. Sie sind definirt durch:

$$(24)\qquad \begin{aligned} Y_{\alpha\beta}^{(c)} &= X_{\alpha\beta}^{(c)} + (-1)^{g_1h_1+g_2h_2}\, X_{k-\alpha\; k-\beta}^{(c)}, \\ Z_{\alpha}^{(c)} &= X_{\alpha\beta}^{(c)} - (-1)^{g_1h_1+g_2h_2}\, X_{k-\alpha\; k-\beta}^{(c)}. \end{aligned}$$

*) Wegen dieser Zahl vergl. C. Jordan, Traité des substitutions.

Vermöge (16) schreiben sich die Klein'schen Identitäten dieser Functionen genau wie die entsprechenden der $X^{(c)}_{\alpha\beta}$.

Nach dem Hermite-Weber'schen Satze*) giebt es

$$\frac{k^2+(-1)^{g_1h_1+g_2h_2}}{2} \text{ linear unabhängige } Y^{(c)}_{\alpha\beta}$$

und

$$\frac{k^2-(-1)^{g_1h_1+g_2h_2}}{2} \text{ linear unabhängige } Z^{(c)}_{\alpha\beta}.$$

In der That ist ja z. B. $Y^{(c)}_{\alpha\beta} = (-1)^{g_1h_1+g_2h_2}\, Y^{(c)}_{k-\alpha\ k-\beta}$.

Nimmt man nun $k = 3$ und wählt etwa eine gerade Charakteristik aus, so erhält man 4 linear unabhängige $Z^{(c)}_{\alpha\beta}$. Nach dem unter VI gesagten geben die Klein'schen Identitäten derselben zu einer endlichen quaternären Substitutionsgruppe, oder geometrisch gesprochen, zu einer endlichen Gruppe von Collineationen des gewöhnlichen Raumes Veranlassung. Die hierbei entstehende Configuration ist im gewissen Sinne ein Analogon der bekannten Hesse'schen Configuration der ebenen Curve dritter Ordnung d. h. der Configuration der bei der Curve auftretenden 9 Wendepunkte, 12 Wendelinien, 9 harmonischen Polaren und den 12 Schnittpunkten der letzteren.

§ 7.

Ueber die Configuration der $Z^{(c)}_{\alpha\beta}$ für $k = 3$**).

Es mögen hier nur einige wenige Resultate über die Configuration der $Z^{(c)}_{\alpha\beta}$ mitgetheilt werden, während betreffs der functionentheoretischen Bedeutung der nachstehend angeführten ausgezeichneten Elemente und ihrer Gruppirung auf die citirte Arbeit verwiesen werden muss.

Wir construiren uns zunächst in einer Ebene eine Hesse'sche Configuration, nehmen also 9 Punkte, *Hauptpunkte*, an, welche zu je 3 auf 12 Geraden, *Nebengeraden*, liegen, von denen je 4 durch einen Hauptpunkt gehen. Wir nehmen ferner 9 Gerade g, *Hauptgerade*, an, welche zu je 3 durch 12 Punkte, *Nebenpunkte*, gehen, von denen immer 4 auf einer Hauptgeraden liegen. Auf jeder Nebengeraden liegen 2 Nebenpunkte, durch jeden Nebenpunkt gehen zwei Nebengerade und zwar so, dass aus diesen Nebenelementen *4 Dreiecke* (die *Wendedreiecke* der Curve 3. O.) sich bilden. Jedem Nebenpunkt ordnen wir die ihm im Wendedreiecke gegenüberliegende Nebengerade zu; jede Hauptgerade wird in ihren 4 Nebenpunkten von 8 Neben-

*) Hermite a. a. O., Weber a. a. O.

**) Die Ableitung und genaue Untersuchung dieser Configuration bildet den Inhalt meiner demnächst erscheinenden Dissertation (Göttingen).

geraden geschnitten, die 4 übrigen Nebengeraden gehen durch einen Hauptpunkt, den wir der Hauptgeraden zuordnen.

Alle diese Elemente verbinden wir durch Geraden und Ebenen mit einem ausserhalb der Ebene angenommenen Punkte, dem *Pol der Ebene.* Durch diesen Pol gehen den Hauptpunkten entsprechend 9 Gerade g', welche mit den Hauptgeraden g 9 *windschiefe Geradenpaare* ausmachen. Durch jede dieser Geraden g' verlaufen 4 Ebenen, im ganzen 12, welche den Pol mit den 12 Nebengeraden verbinden. Die diesen zugeordneten 12 Nebenpunkte stellen sich als die Pole jener 12 Ebenen heraus.

Jede der Hauptgeraden g trägt aber ausser der ihnen allen gemeinsamen Ebene noch 3 weitere Ebenen, sodass wir insgesammt

$$1 + 12 + 27 = 40$$

Ebenen erhalten. Alle diese 40 Ebenen sind unter einander gleichberechtigt, alle enthalten in sich eine Hesse'sche Configuration und jede besitzt ihren Pol. Den 40 Ebenen stellen sich also 40 Pole gegenüber, von denen immer 12 in einer der 40 Ebenen als Nebenpunkte der in ihr liegenden Hesse'schen Configuration sich befinden.

Die Geraden g und g' eines Geradenpaares sind unter einander gleichberechtigt, sodass g' die 4 Pole der durch g gehenden Ebenen trägt, gerade wie g die Pole der 4 durch g' verlaufenden Ebenen enthielt. So trägt jedes Geradenpaar 8 Pole; da durch jeden Pol 9 Gerade gehen, so stellt sich die Zahl der vorhandenen Geradenpaare auf

$$\frac{9 \cdot 40}{8} = 45.$$

Jede Ebene nimmt mit ihrem Pole an 4 Tetraedern theil, deren Seiten Ebenen unserer Configuration, deren Ecken die zugehörigen Pole sind; die Bildung der Tetraeder geht aus der Existenz der 4 Wendedreiecke in jeder Ebene hervor. Es giebt 40 solcher Tetraeder. Die 240 Kanten, resp. 120 Kantenpaare derselben bilden ein neues Element der Configuration.

Einer Ebene gegenüber spalten sich die 39 übrigen in 27 und 12, einem Geradenpaare gegenüber die andern 44 Paare in 32 und 12, von denen die letzteren windschief gegen das ausgewählte Paar sind. 4 unter diesen 12 Paaren sind auch unter einander windschief, sodass man Systeme von 5 unter einander windschiefen Geradenpaaren erhält. Solcher „*Fünfen*" giebt es 27.

§ 8.

Bemerkung über die $X_{\alpha\beta}^{(c)}$ bei geradem k.

Es möge zum Schluss noch eine Bemerkung darüber folgen, dass bei geradem k zwar die angestellten Rechnungen, sowie die aufgestellten

Gleichungen und Formeln ihre Gültigkeit nicht verlieren, dass aber die Normirung deshalb im allgemeinen hinfällig wird, weil es nicht mehr gestattet ist, die Functionen $X_{\alpha\beta}^{(c)}$ als Jacobi'sche Functionen der Charakteristik c zu bezeichnen, wie leicht aus den Gleichungen (18) für $\lambda = \mu = \nu = \varrho = k$ hervorgeht. Eine Ausnahme macht hier nur die Charakteristik $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$, für welche unsere Normirung allgemein gültig ist.*) Bei der Transformation dieser $X_{\alpha\beta}^{(0)}$ ist man bei *geradem* k natürlich gezwungen innerhalb der Charakteristik zu bleiben, d. h. nur solche Transformationen anzuwenden, welche die Charakteristik $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ ungeändert lassen.

Dresden, October 1886.

*) In der That hat bereits Herr Reichardt kürzlich für $k = 2$ eine im wesentlichen mit der unsrigen übereinstimmende Normirung der Thetafunctionen angewendet; Reichardt: „Ueber die Normirung der Borchardt'schen Moduln etc." Math. Ann. Bd. XXVIII, p. 84.

Zur Theorie der algebraischen Functionen.

Von

Adolf Kneser in Breslau.

In den Art. 9 und 10 meiner Abhandlung: „Die Monodromiegruppe einer algebraischen Gleichung bei linearen Transformationen der Variabelen*), ist implicite ein allgemeiner, die algebraischen Functionen betreffender Satz bewiesen, welcher zusammen mit seiner schwieriger zu beweisenden Umkehrung ein Criterium ergiebt zur Entscheidung, *ob eine gegebene algebraische Function von mehreren Variabeln als rationale Function mehrerer algebraischer Functionen von je einer Variabeln dargestellt werden kann oder nicht.* Die Ableitung dieses Criteriums auf Grund einer erweiterten Darstellung jenes Satzes bildet das Ziel der vorliegenden Zeilen.

§ 1.

Die Grösse x sei als algebraische Function der unabhängigen Variabeln $u, v_1, v_2, \ldots, v_\varkappa$ durch die Gleichung

$$F(x, u, v_1, v_2, \ldots, v_\varkappa) = 0 \tag{1}$$

definirt, welche bei Adjunction aller Constanten, d. h. aller von $u, v_1, v_2, \ldots, v_\varkappa$ nicht irrational abhängigen Grössen, oder kurz im Rationalitätsbereich $\mathfrak{R}_0$ irreducibel sein möge. Angenommen nun, eine beliebige Wurzel x_0 der Gleichung (1) könne in der Form

$$x_0 = \vartheta(y, z) \tag{2}$$

dargestellt werden, wo ϑ eine rationale Function mit Coefficienten aus dem Bereich $\mathfrak{R}_0$, y eine algebraische Function von u und z eine algebraische Function von $v_1, v_2, \ldots, v_\varkappa$ bedeutet, so betrachte man die Gleichung (1) im Rationalitätsbereich aller algebraischen Functionen der Grössen v_ν oder kurz im Bereich $\mathfrak{R}_1$. Dann kann die linke Seite dieser Gleichung in Factoren zerfallen, welche nur noch in x und u rational und ganz sind; der im Bereich $\mathfrak{R}_1$ irreducibele Factor $F_0(x, u)$,

---

*) Diese Annalen Bd. XXVIII, S. 125.

welcher für $x = x_0$ verschwindet, besitze ausserdem die Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$. Die algebraische Function y wird nun durch eine Gleichung

$$(3) \qquad f(y, u) = 0$$

definirt, welche bei Adjunction aller von u nicht irrational abhängigen Grössen, also auch im Bereich $\mathfrak{R}_1$ irreducibel ist; da ferner in demselben Bereich auch die Gleichung

$$(4) \qquad F_0(x, u) = 0$$

irreducibel ist, so lehrt die Gleichung (2), dass die durch die Gleichung (4) definirte Gattung x_0 unter der durch die Gleichung (3) definirten Gattung y im Rationalitätsbereich $\mathfrak{R}_1$ enthalten ist; die Ordnung der letzteren muss also nach bekannten Sätzen ein Vielfaches der Ordnung von x_0, also etwa gleich mm_1 sein. Versteht man demnach unter $y_1, y_2, \ldots, y_{mm_1}$ die Wurzeln der Gleichung (3), so besteht bei passender Vertheilung der Indices, wenn man durch φ einen rationalen Ausdruck mit Coefficienten aus dem Bereich $\mathfrak{R}_1$ bezeichnet, ein Gleichungssystem von folgender Gestalt

$$(5) \quad x_\lambda = \varphi(y_{\lambda m_1 + \nu}); \quad \nu = 1, 2, \ldots, m_1; \quad \lambda = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Hieraus folgt sofort die Gleichung

$$m_1 x_\lambda = \varphi(y_{\lambda m_1 + 1}) + \varphi(y_{\lambda m_1 + 2}) + \cdots + \varphi(y_{(\lambda+1)m_1});$$

also ist x_λ nach dem Theorem von Lagrange rational im Bereich $\mathfrak{R}_1$ ausdrückbar durch jede symmetrische Function der Grössen $y_{\lambda m_1+1}$, $y_{\lambda m_1+2}, \ldots, y_{(\lambda+1)m_1}$, welche keinem ihrer conjugirten Werthe gleich ist, z. B. durch das Product

$$Y_\lambda = (\alpha - y_{\lambda m_1+1})(\alpha - y_{\lambda m_1+2}) \cdots (\alpha - y_{(\lambda+1)m_1}),$$

in welchem α eine passend gewählte Constante bedeutet; d. h. es bestehen die Gleichungen

$$(6) \qquad x_\lambda = \psi(Y_\lambda),$$

oder, was dasselbe bedeutet,

$$x_\lambda = \vartheta'(Y_\lambda, Z),$$

wenn ψ und ϑ' rationale Ausdrücke sind, deren Coefficienten beziehentlich den Bereichen $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_0$ angehören, und Z eine algebraische Function der Grössen v bedeutet.

Nun kann leicht gezeigt werden, dass die symmetrischen Functionen der Grössen $Y_0, Y_1, \ldots, Y_{m-1}$ dem Bereich $\mathfrak{R}_1$ angehören. Denn das mit der Unbestimmten β gebildete Product

$$Y_\lambda' = (\beta - \varphi(y_{\lambda m_1+1}))(\beta - \varphi(y_{\lambda m_1+2})) \cdots (\beta - \varphi(y_{(\lambda+1)m_1}))$$

hat mit keinem der Ausdrücke, welche aus ihm durch Umsetzung der Grössen y_ν entstehen und formell von ihm verschieden sind, denselben

Werth, weil sonst zwischen den Grössen $\varphi(y_\nu)$ noch andere Gleichungen als die folgenden

$$\varphi(y_{\lambda m_1+1}) = \varphi(y_{\lambda m_1+2}) = \cdots = \varphi(y_{(\lambda+1)m_1})$$

bestehen würden, was mit den Gleichungen (5) und der Irreducibilität der Gleichung (4) unvereinbar ist. Demnach kann jede beliebige symmetrische Function der m_1 Grössen $y_{\lambda m_1+1}, y_{\lambda m_1+2}, \ldots, y_{(\lambda+1)m_1}$, z. B. die Grösse Y_λ im Bereich $\mathfrak{R}_1$ rational durch Y_λ' ausgedrückt werden. Da nun offenbar die Gleichung

$$Y_{\lambda'} = (\beta - x_\lambda)^{m_1}$$

besteht, so sind die symmetrischen Functionen von $Y_0', Y_1', \ldots, Y_{m-1}'$, mithin auch die symmetrischen Functionen von $Y_0, Y_1, \ldots, Y_{m-1}$ im Bereich $\mathfrak{R}_1$ rational.

Die Gleichung ferner, deren Wurzeln die m Grössen $Y_0, Y_1, \ldots, Y_{m-1}$ sind, ist im Bereich $\mathfrak{R}_1$ irreducibel, weil sonst in Folge der Gleichung (6) auch die Gleichung (4) reducibel sein müsste, was der Definition von $F_0(x, u)$ widerspricht. Die beiden Grössen x_λ und Y_λ sind also algebraische Functionen m^{ter} Ordnung von u, welche im Bereich $\mathfrak{R}_1$ zu einer und derselben Gattung gehören, also auch dieselbe Gattungsdiscriminante*) besitzen; oder, was dasselbe bedeutet, der wesentliche Theiler der Discriminante**) der Gleichung

$$\prod_{\lambda=0}^{m-1} (Y - Y_\lambda) = 0$$

muss mit dem wesentlichen Theiler der Discriminante der Gleichung (4) identisch sein; letzterer ist also, da die Grössen Y_λ Functionen von u allein sind, von den Grössen v unabhängig.

Dieselbe Schlussreihe wie für die Gleichung (4) kann nun für jede Gleichung $F_1(x, u) = 0$ durchgeführt werden, in welcher links ein beliebiger, im Bereich $\mathfrak{R}_1$ irreducibeler Factor von $F(x, u, v_1, v_2, \ldots, v_\varkappa)$ steht. Um dies zu zeigen genügt der Nachweis, dass aus der Gleichung (2) eine Gleichung von derselben Form für jede Wurzel der Gleichung (1) folgt; denn der irreducibele Factor F_0 war nur dadurch ausgezeichnet, dass eine seiner Wurzeln x_0 der Gleichung (2) genügte. Dass nun in der That jede Wurzel der Gleichung (1) einer Gleichung (2) genügt, sieht man leicht, indem man eine Grösse s einführt, durch welche man y und z im Bereich $\mathfrak{R}_0$ rational ausdrücken kann:

$$(7) \qquad \begin{aligned} y &= \eta(s); \quad z = \zeta(s), \\ x_0 &= \vartheta(\eta(s),\ \zeta(s)). \end{aligned}$$

*) Vgl. Kronecker, Grundzüge § 8; Crelle's Journal Bd. 92, S. 22.

**) Vgl. Kronecker, Ueber die Discriminante, §§ 3 und 7, Crelle's Journal Bd. 91, S. 313 und 329.

Ersetzt man hier die Grösse s successive durch ihre sämmtlichen conjugirten Werthe, d. h. die Wurzeln der im Bereich $\mathfrak{R}_0$ irreducibeln Gleichung, welcher die Grösse s genügt, so erhält man auf der linken Seite der Gleichung (7) alle im Bereich $\mathfrak{R}_0$ mit x_0 conjugirten Grössen, also, wegen der Irreducibilität der Gleichung (1) im Bereich $\mathfrak{R}_0$, die sämmtlichen Wurzeln dieser Gleichung. Da nun auch die Grössen $\eta(s)$ und $\zeta(s)$ in ihre conjugirten Werthe übergehen, also algebraische Functionen von u bezw. den Grössen v bleiben, so genügt jede Wurzel der Gleichung (1) einer Gleichung (2). Hiermit wird die an dem Polynom $F_0(x, u)$ entwickelte Schlussreihe auf das Polynom $F_1(x, u)$ übertragbar; also hat die Discriminante der Gleichung $F_1(x, u) = 0$ einen von den Grössen v unabhängigen wesentlichen Theiler.

Berücksichtigt man nun noch, dass der wesentliche Theiler der Discriminante einer reducibeln Gleichung nichts anderes ist als das Product der wesentlichen Theiler der Discriminanten der irreducibeln Gleichungen, in welche die reducibele Gleichung sich auflöst*), so ergiebt sich das folgende Resultat:

Ist eine algebraische Function x der Variabeln $u, v_1, v_2, \ldots, v_\varkappa$ rational ausdrückbar durch eine algebraische Function von u allein und eine algebraische Function der Grössen v allein, so muss, wenn man x als algebraische Function von u allein betrachtet und demgemäss alle algebraischen Functionen der Grössen v adjungirt, die Discriminante der gegebenen die Function x definirenden Gleichung einen von den Grössen v unabhängigen wesentlichen Theiler besitzen.

§ 2.

Eine Anwendung des erhaltenen Resultats führt zur Erledigung einer Frage, welche in der Abhandlung über die Monodromiegruppe**) aufgeworfen ist, der Frage nämlich, wann eine dem Bereich $\mathfrak{R}_0$ nicht angehörige rationale Function der Wurzeln der Gleichung (1) nach Adjunction einer algebraischen Function von u allein rational werden kann.

Sind zunächst $y_1, y_2, \ldots, y_r$ die conjugirten Werthe irgend einer algebraischen Function von u, so constituirt die mit unbestimmten Coefficienten α gebildete Grösse

$$\eta = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_r y_r$$

eine Galois'sche Gattung, welche mit der Gattung

$$\eta' = \alpha_1 y_1' + \alpha_2 y_2' + \cdots + \alpha_r y_r'$$

identisch ist, wenn y_1' eine beliebige von den Unbestimmten α unabhängige Grösse der Gattung y_1 und y_r' die entsprechend gebildete

*) Vgl. Kronecker, Ueber die Discriminante, § 4, a. a. O. S. 318.

**) Diese Annalen XXVIII, S. 130.

Grösse der Gattung y_ν bedeutet. Ist also etwa $u - u_0$ ein Factor der Discriminante der Gattung η, so sind für $u = u_0$ zwei conjugirte Werthe von η', also auch zwei der Grössen y_ν' einander gleich; also ist $u - u_0$ ein Factor der Discriminante der Grösse y_1'; da nun y_1' eine beliebige von den Unbestimmten α unabhängige Grösse der Gattung y_1 bedeutet, so ist $u - u_0$ auch ein Factor der Discriminante der Gattung y_1. Somit ergiebt sich das übrigens von selbst einleuchtende

Lemma. Versteht man unter $y_1, y_2, \ldots y_r$, die Wurzeln einer Gleichung, deren Coefficienten ganze Functionen von u sind, so ist die Discriminante der Gattung $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_r y_r$, wo $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ Unbestimmte sind, zusammengesetzt aus Linearfactoren, welche auch in der Discriminante der gegebenen Gleichung als Factoren des wesentlichen Theilers enthalten sind.

Jetzt sei speciell y_1 eine rationale Function der Wurzeln $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ der Gleichung (1), welche nach Adjunction einer algebraischen Function von u allein rational wird; dann kann man das Resultat des § 1, auf die Function y_1 anwenden, bei welcher ein specieller Fall der Voraussetzung jenes Resultats stattfindet, und man kann schliessen, dass wenn man y_1 als algebraische Function von u allein betrachtet, der wesentliche Theiler der Discriminante der Grösse y_1 von $v_1, v_2, \ldots, v_\varkappa$ unabhängig sein muss. Da nun nach einem Satze von Kronecker*) die Discriminante der Gattung y_1 ein Theiler der Discriminante der Gattung η, und diese ein Theiler der Discriminante der Gattung

$$\xi = \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{n-1} x_{n-1}$$

sein muss, weil die Gattung y_1 unter der Gattung η, und diese unter der Gattung ξ enthalten ist, so folgt, dass die Discriminante der Gattung ξ lineare Factoren besitzen muss, welche von den Grössen v unabhängig sind. Nun ist nach dem eben bewiesenen Lemma jeder Linearfactor der Discriminante der Gattung ξ zugleich ein Factor der Discriminante der Gattung x_0, wenn man x_0 als Function von u allein betrachtet, also sicher ein Factor der Discriminante der Gleichung (1); *wird also eine rationale Function der Wurzeln der Gleichung* (1) *nach Adjunction einer algebraischen Function von u allein rational*, *so muss die Discriminante dieser Gleichung Linearfactoren besitzen*, *welche von $v_1, v_2, \ldots, v_\varkappa$ unabhängig sind.* Ist dies durch die specielle Form der Gleichung (1) ausgeschlossen, wie z. B. wenn dieselbe die Gestalt $F(x, ux + v) = 0$ besitzt, unter $F(x, y)$ ein im Bereich $\mathfrak{R}_0$ irreducibeles Polynom verstanden, so kann keine rationale Function der Wurzeln dieser Gleichung nach Adjunction einer algebraischen Function von u allein rational werden. Damit ist der zweite der beiden Fälle,

*) Vgl. Grundzüge § 9, Crelle's Journal Bd. 92, S. 26.

welche am Ende des Art. 8 der citirten Abhandlung über die Monodromiegruppe bezeichnet sind, als unmöglich nachgewiesen.

§ 3.

Bemerkenswerth ist nun, dass das Resultat des § 1 sich umkehren lässt. Dem Beweis dieser Behauptung müssen aber zwei einfache Hülfsbetrachtungen vorausgeschickt werden.

(A) Durch die Gleichung

$$G(x, u) = 0, \tag{8}$$

deren Coefficienten von den Unbestimmten $v_1, v_2, \ldots, v_\varkappa$ in beliebiger Weise algebraisch abhängig sein mögen, sei x als algebraische Function von u definirt; ersetzt man v_ν durch die Constante c_ν, so gehe die Gleichung (8) in die Gleichung

$$G'(x, u) = 0 \tag{9}$$

über. Dann kann leicht gezeigt werden, dass bei passender Wahl der Constanten c_ν der wesentliche Theiler der Discriminante der Gleichung (9) aus dem wesentlichen Theiler der Discriminante der Gleichung (8) erhalten wird, indem man v_ν durch c_ν ersetzt, und dass die Werthsysteme c_ν, bei denen dies nicht stattfindet, höchstens eine algebraische Mannichfaltigkeit von $\varkappa - 1$ Dimensionen erfüllen können.

Setzt man nämlich:

$$G(x, u) = U_0 x^m + U_1 x^{m-1} + \cdots + U_m,$$
$$G'(x, u) = U_0' x^m + U_1' x^{m-1} + \cdots + U_m',$$
$$H(x, u) = x^m + U_1 x^{m-1} + U_2 U_0 x^{m-2} + \cdots + U_m U_0^{m-1},$$
$$H'(x, u) = x^m + U_1' x^{m-1} + U_2' U_0' x^{m-2} + \cdots + U_m' U_0'^{m-1},$$
$$\frac{\partial H(x, u)}{\partial x} = H_1(x, u), \qquad \frac{\partial H(x, u)}{\partial u} = H_2(x, u),$$

indem unter $U_0, U_1, \ldots$ ganze Functionen von u, unter $U_0', U_1', \ldots$ dieselben ganzen Functionen nach Ersetzung von v_ν durch c_ν verstanden werden, so sind die wesentlichen Theiler der Discriminanten der Gleichungen (8) und (9) beziehentlich identisch mit den wesentlichen Theilern der Discriminanten der Gleichungen*)

$$H(x, u) = 0, \tag{10}$$
$$H'(x, u) = 0. \tag{11}$$

Nun kann der ausserwesentliche Theiler der Discriminante der Gleichung (10) definirt werden als der grösste gemeinsame Theiler der Coefficienten in der homogenen Function

*) Vgl. Kronecker, Ueber die Discriminante § 7, a. a. O. S. 329.

$$P(U, V) = \prod_{\nu=0}^{m-1} (U H_1(\xi_\nu, u) + V H_2(\xi_\nu, u))$$

der Unbestimmten U und V, wenn $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{m-1}$ die Wurzeln der Gleichung (10) sind*). Haben aber allgemein mehrere ganze Functionen von u, deren Coefficienten algebraisch von den Grössen v abhängen, z. B. $g_1(u; v)$, $g_2(u; v)$, ... einen grössten gemeinsamen Theiler $T(u; v)$, so müssen gewisse ganze Functionen der Coefficienten von u in den Polynomen $g_\nu(u; v)$ verschwinden, während eine bestimmte solche Function von Null verschieden bleibt, sodass für unbestimmte Werthe der Grössen v ein System von Relationen

$$| h_0(v) | > 0, \quad h_1(v) = h_2(v) = \cdots = 0$$

besteht, in welchen $h_0, h_1, \ldots$ gewisse algebraische Functionen der Grössen v bedeuten; und diese Relationen können so gewählt werden, dass umgekehrt aus ihrem Bestehen die Existenz eines grössten gemeinsamen Theilers der Functionen $g_\nu(u; v)$ geschlossen werden kann, dessen Grad in u derselbe ist wie der Grad von $T(u; v)$. Giebt man also den Unbestimmten v_ν constante Werthe c_ν, für welche die Grösse $h_0(c)$ von Null verschieden ist, so haben die Polynome $g_\nu(u; c)$ sicher den gemeinsamen Theiler $T(u; c)$ und einen grössten gemeinsamen Theiler, dessen Grad in u derselbe ist wie der Grad von $T(u; v)$, der sich also von $T(u; c)$ höchstens um einen constanten Factor unterscheiden kann. Sollen dagegen die Polynome $g_\nu(u; c)$ nach Division durch $T(u; c)$ noch eine nicht constante ganze Function von u als gemeinsamen Theiler besitzen, so muss $h_0(c) = 0$ sein, also eine Gleichung bestehen, welche nur für eine höchstens $(\varkappa - 1)$-fache Mannichfaltigkeit von Werthsystemen c erfüllt sein kann, weil $h_0(v)$ für unbestimmte Werthe der Grössen v von Null verschieden ist. Versteht man also speciell unter $g_1(u; v)$, $g_2(u; v)$, ... die Coefficienten in $P(U, V)$, so ergiebt sich, dass abgesehen von einer höchstens $(\varkappa - 1)$-fachen algebraischen Mannichfaltigkeit von Werthsystemen c der ausserwesentliche Theiler der Discriminante der Gleichung (11) aus dem ausserwesentlichen Theiler der Discriminante der Gleichung (10) erhalten wird, indem man v_ν durch c_ν ersetzt. In derselben Weise erhält man also den wesentlichen Theiler der Discriminante der Gleichung (11), oder was dasselbe ist, der Gleichung (9), aus dem wesentlichen Theiler der Discriminante der Gleichung (10), oder was dasselbe ist, der Gleichung (8), womit die aufgestellte Behauptung bewiesen ist.

(B) Ein zweiter vorauszuschickender Hülfssatz, dessen Richtigkeit übrigens fast von selbst einleuchtet, ist der folgende. Eine im

*) Kronecker, a. a. O. § 8, S. 334.

Bereich $\mathfrak{R}_1$ irreducibele ganze Function $G(x, u; v)$ von zwei oder mehr Variabeln $x, u_1, u_2, \ldots$, deren Coefficienten von den Unbestimmten $v_1, v_2, \ldots, v_\varkappa$ algebraisch abhängen, kann, wenn die Unbestimmte v_ν durch die Constante c_ν ersetzt wird, höchstens für eine $(\varkappa - 1)$-fache algebraische Mannichfaltigkeit von Werthsystemen c in Factoren, welche ganze Functionen von $x, u_1, u_2, \ldots$ sind, zerlegbar werden.

Denn bezeichnet man durch $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{m-1}$ die Wurzeln der Gleichung $G(x, u; v) = 0$ mit der Unbekannten x, so besteht für die Existenz einer in $G(x, u; c)$ aufgehenden ganzen Function von $x, u_1, u_2, \ldots$, welche in x vom Grade $p < m$ ist, eine hinreichende und nothwendige Bedingung in Folgendem.

Es müssen die symmetrischen Functionen eines gewissen Systems von p Wurzeln $\eta_{i_1}, \eta_{i_2}, \ldots, \eta_{i_p}$ für $v_\nu = c_\nu$ rationale Functionen der Grössen $u_1, u_2, \ldots$ werden; oder es muss, wenn man wiederum

$$G(x, u; v) = U_0 x^m + U_1 x^{m-1} + \cdots$$

setzt und unter $U_0, U_1, \ldots$ ganze Functionen der Grössen u versteht, das mit der Unbestimmten α gebildete Product

$$U_0^p(\alpha - \eta_{i_1})(\alpha - \eta_{i_2}) \cdots (\alpha - \eta_{i_p}) = X,$$

durch welches alle jene symmetrischen Functionen rational ausdrückbar sind, und welches stets eine ganze algebraische Function der Grössen u ist, für $v_\nu = c_\nu$ in eine ganze rationale Function der Grössen u übergehen. Nun kann man aus den Dimensionszahlen der Coefficienten U_ν bezüglich der Variabeln u leicht eine obere Grenze γ bestimmen, welche die Dimension von X, wenn diese Grösse eine ganze rationale Function wird, nicht überschreiten kann. Denn setzt man für $v_\nu = c_\nu$

$$X = g(\alpha, u_1, u_2 \ldots),$$

so ist offenbar die Grösse

$$g\left(\frac{\beta}{U_0}, u_1, u_2, \ldots\right) = (\beta - U_0\eta_{i_1})(\beta - U_0\eta_{i_2}) \cdots (\beta - U_0\eta_{i_p})$$

ein Factor von

$$U_0^{m-1} G\left(\frac{\beta}{U_0}, u; c\right) = (\beta - U_0\eta_0)(\beta - U_0\eta_1) \cdots (\beta - U_0\eta_{m-1}),$$

wenn in U_0 überall $v_\nu = c_\nu$ gesetzt wird; ist also γ die Dimension des Polynoms $U_0^{m-1}G(x, u; v)$ in den Grössen u, so kann die Dimension der ganzen Function $g(x, u_1, u_2, \ldots)$ den Werth γ sicher nicht übersteigen. Demnach bestehen, wenn die Grösse X für $v_\nu = c_\nu$ in den Grössen u rational wird, die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^{\gamma+1} X}{\partial u_1^{\gamma_1} \partial u_2^{\gamma_2} \ldots} = 0,$$

worin unter $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ irgend welche Zahlen der Reihe $0, 1, \cdots, \gamma+1$ zu verstehen sind, welche der Gleichung

$$1 + \gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots$$

genügen. Versteht man nun unter X', X'', ... die sämmtlichen Producte von derselben Gestalt wie X, so darf für unbestimmte Werthe der Grössen v keine der über alle möglichen Systeme $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ erstreckten Summen

$$\sum_{(\gamma)} V_{\gamma_1\gamma_2\ldots} \frac{\partial^{\gamma+1} X^{(\nu)}}{\partial u_1^{\gamma_1} \partial u_2^{\gamma_2} \ldots}$$

bei unbestimmten Coefficienten V verschwinden, weil sonst eine der Grössen $X^{(\nu)}$ eine ganze rationale Function der Grössen u wäre, also $G(x, u; v)$ für unbestimmte Werthe der Grössen v reducibel wäre, was der Voraussetzung widerspricht. Da man nun, unter Ψ rationale Ausdrücke verstanden, setzen kann

$$\frac{\partial^{\gamma+1} X^{(\nu)}}{\partial u_1^{\gamma_1} \partial u_2^{\gamma_2} \ldots} = \Psi_{\gamma_1\gamma_2\ldots}(X^{(\nu)}),$$

so besitzt man in dem Product

$$\Xi = \prod_{\nu} \sum_{\gamma_1\gamma_2\ldots} V_{\gamma_1\gamma_2\ldots} \Psi_{\gamma_1\gamma_2\ldots}(X^{(\nu)})$$

einen rationalen Ausdruck, welcher für unbestimmte Werthe der Grössen v_ν sicher von Null verschieden ist, und welcher für $v_\nu = c_\nu$ verschwinden muss, wenn das Polynom $G(x, u; c)$ einen Factor haben soll, der in $x; u_1, u_2, \ldots$ rational und ganz, und in x vom Grade p ist. Setzt man also in der Gleichung

$$\Xi = 0$$

die Werthe $v_\nu = c_\nu$ ein, so erhält man für die Grössen c ein System von Bedingungsgleichungen, welches sicher nicht identisch erfüllt ist, also höchstens eine $(\varkappa - 1)$-fache algebraische Mannichfaltigkeit im Gebiet der Grössen c definiren kann, womit die aufgestellte Behauptung bewiesen ist.

§ 4.

Um jetzt nach Erledigung der einfachen Vorfragen zum Beweis der Behauptung zu kommen, dass das Resultat des § 1 sich umkehren lässt, diene als Ausgangspunkt die Bemerkung, dass es nur eine endliche Anzahl von Gattungen n-werthiger algebraischer Functionen von einer Variabeln u geben kann, deren Gattungsdiscriminante eine bestimmte ganze rationale Function von u ist. Der algebraische Beweis dieser Behauptung scheint ziemlich schwierig zu sein; die Richtigkeit derselben ergiebt sich aber leicht aus der Betrachtung der n-blättrigen Riemann'schen Flächen*).

*) Vgl. F. Klein, Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen, § 19, S. 64.

Zunächst ist klar, dass eine algebraische Function sich nur an den Nullstellen ihrer Gattungsdiscriminante verzweigen kann, da für jeden von diesen Nullstellen verschiedenen Werth u_0 der unabhängigen Variabeln*) eine Grösse der Gattung gefunden werden kann, welche für $u = u_0$ lauter von einander verschiedene conjugirte Werthe besitzt, sich also unmöglich an der Stelle $u = u_0$ verzweigen kann. Da nun jede Riemann'sche Fläche eine bestimmte Gattung algebraischer Functionen von u definirt, so wird die endliche Anzahl der Gattungen mit gegebener Gattungsdiscriminante erwiesen sein, wenn man gezeigt hat, dass nur eine endliche Anzahl verschiedener, d. h. nicht conform aufeinander abbildbarer Riemann'scher Flächen existirt, welche sich an keinen andern Punkten der u-Ebene als den gegebenen $P_1, P_2, \ldots, P_k$ verzweigen. Diese Behauptung kann aber leicht bewiesen werden. Zieht man nämlich eine sich selbst nicht schneidende Linie L von P_1 nach P_2, von P_2 nach P_3, u. s. f., von P_k ins Unendliche, welches durch P_{k+1} bezeichnet werden möge, so ist jeder einzelne Zweig einer nur in den Punkten P verzweigten algebraischen Function in der ganzen Ebene mit Ausnahme der Linie L eindeutig bestimmt, solange die Linie L nicht überschritten wird, und die zugehörige Riemann'sche Fläche ist völlig gegeben, sobald man weiss, in welcher Weise bei Ueberschreitung der Linien L in einer ein für alle Mal festzusetzenden Richtung an jeder der Strecken $P_\nu P_{\nu+1}$ die n Zweige ineinander übergehen. Bezeichnet man dieselben durch $1, 2, \ldots, n$, so gehört zu jeder Strecke $P_\nu P_{\nu+1}$ eine bestimmte den Zusammenhang der Zweige längs dieser Strecke definirende Substitution

$$S_\nu = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & n \\ \nu_1, & \nu_2, & \ldots, & \nu_n \end{pmatrix},$$

Gehört zu jeder Strecke $P_\nu P_{\nu+1}$ bei einer algebraischen Function dieselbe Substitution S_ν wie bei einer zweiten, so sind die zugehörigen Riemann'schen Flächen identisch; dasselbe findet übrigens offenbar schon dann statt, wenn die bei der einen Function auftretenden Substitutionen S_ν durch Transformation mit einer für alle Indices ν sich gleich bleibenden Substitution aus den bei der andern auftretenden ableitbar sind. Da es nun aber nur eine endliche Anzahl von Umsetzungen der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ giebt, und aus diesen für eine endliche Anzahl von Strecken $P_\nu P_{\nu+1}$ die zugehörigen Substitutionen S_ν auszuwählen sind, so ist klar, dass nur eine endliche Anzahl wesentlich verschiedener n-blättriger Riemann'scher Flächen existiren kann, welche sich an keinen andern Stellen als den Stellen P_ν verzweigen. Zu einer gegebenen Gattungsdiscriminante gehört also nur eine endliche Anzahl von n-werthigen Gattungen algebraischer Functionen von u.

*) Vgl. Kronecker a. a. O. § 5, S. 322.

Jetzt werde durch die im Bereich $\mathfrak{R}_1$ irreducibele Gleichung

$$(12) \qquad F_0(x, u; v) = 0,$$

deren linke Seite von den Parametern $v_1, v_2, \ldots, v_\varkappa$ algebraisch abhängen möge, die Grösse x als eine algebraische Function von u definirt, deren Gattungsdiscriminante von den Grössen v_ν unabhängig ist. Dann kann man die letzteren nach § 3 (A) durch derartige Constanten c_ν ersetzen, dass der wesentliche Theiler der Discriminante der Gleichung

$$(13) \qquad F_0(x', u; c) = 0$$

aus demjenigen der Gleichung (12) erhalten wird, indem man v_ν durch c_ν ersetzt; da nun letzterer nach Voraussetzung von den Grössen v unabhängig ist, so haben die Discriminanten der Gleichungen (12) und (13) denselben wesentlichen Theiler; dabei können nach § 3 (A) diejenigen Werthsysteme c, für welche dies nicht stattfindet, höchstens eine $(\varkappa - 1)$-fache algebraische Mannichfaltigkeit $\mathfrak{M}$ erfüllen. Somit kann man durch Gleichungen (13) unendlich viele Functionen x' definiren, welche eine und dieselbe Gattungsdiscriminante besitzen, sich also auf eine endliche Anzahl von Gattungen vertheilen müssen; schliesst man ausser der Mannichfaltigkeit $\mathfrak{M}$ auch diejenigen Werthsysteme c aus, für welche die Gleichung (13) reducibel wird und welche nach § 3 (B) ebenfalls nur eine höchstens $(\varkappa - 1)$-fache algebraische Mannichfaltigkeit $\mathfrak{M}'$ erfüllen können, so mögen sich alle durch die Gleichungen (13) definirten algebraischen Functionen x' auf die p Gattungen vertheilen, welche durch die Gleichungen

$$(14) \qquad F_0(x^{(\nu)}, u; C^{(\nu)}) = 0, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, p$$

definirt werden. Dann lässt sich zeigen, dass alle diese Gattungen identisch sind.

Zum Beweis dieser Behauptung soll indirect bewiesen werden, dass eine Wurzel x der Gleichung (12) durch eine der Wurzeln $x^{(\varrho)}$ der Gleichungen (14) rational ausdrückbar ist. Wäre dies nicht der Fall, so könnten in der auf den Bereich $\mathfrak{R}_1$ bezogenen Gruppe der reducibeln Gleichung

$$(15) \qquad F_0(x, u; v) \prod_{\nu=1}^{p} F_0(x, u; C^{(\nu)}) = 0$$

unter den Substitutionen, welche eine der Wurzeln x des ersten Factors am Platze lassen, niemals die sämmtlichen Substitutionen vorkommen, welche eine der Grössen $x^{(\varrho)}$, also eine der Wurzeln der p übrigen Factoren am Platze lassen. Dagegen giebt es, wenn das Werthsystem c_ν den Mannichfaltigkeiten $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ nicht angehört, in der Gleichung

$$(16) \qquad F_0(x, u; c) \prod_{\nu=1}^{p} F_0(x, u; C^{(\nu)}) = 0$$

zu jeder Wurzel x' des ersten Factors eine Wurzel $x^{(\varrho)}$ eines der p letzten Factoren, durch welche jene Wurzel x' rational ausdrückbar ist; in der auf den Bereich $\mathfrak{R}_1$ bezogenen Gruppe der Gleichung (16) kommt also unter den Substitutionen, welche eine Wurzel x' am Platze lassen, stets ein vollständiges System aller derjenigen Substitutionen vor, welche eine gewisse Wurzel $x^{(\varrho)}$ am Platze lassen. Die Gruppen der Gleichungen (15) und (16) sind demnach verschieden.

Ist nun etwa $\Gamma(\xi; v)$ ein irreducibeler Factor der Galois'schen Resolvente der Gleichung (15), so ist offenbar $\Gamma(\xi; c)$ ein rationaler Factor der Galois'schen Resolvente der Gleichung (16); die Gruppe der letzteren ist also in der Gruppe der Gleichung (15) enthalten oder mit ihr identisch. Letzteres kann, wie soeben gezeigt ist, nicht eintreten; also muss für jedes der Werthsysteme c, welche den Mannichfaltigkeiten $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ nicht angehören, das Polynom $\Gamma(\xi; c)$ reducibel sein, während bei unbestimmten Werthen v_ν das Polynom $\Gamma(\xi; v)$ irreducibel ist. Dies Resultat würde aber nach § 3 (B) unmöglich sein, weil höchstens eine $(\varkappa - 1)$-fache algebraische Mannichfaltigkeit von Werthsystemen c existiren kann, für welche das irreducibele Polynom $\Gamma(\xi; v)$ bei Ersetzung von v_ν durch c_ν reducibel wird. Die Annahme, von welcher man ausgegangen ist, dass nämlich keine Wurzel der Gleichung (12) durch eine der Wurzeln der Gleichungen (14) rational ausdrückbar sei, ist also unrichtig, und es muss demnach für eine Wurzel x der Gleichung (12) eine Gleichung von folgender Gestalt bestehen:

$$(17) \qquad x = \varphi(x^{(\varrho)}, u; v),$$

in welcher die rechte Seite von $x^{(\varrho)}$ und u rational, von den Grössen v algebraisch abhängt. Da nun im Bereich $\mathfrak{R}_1$ die Grössen x und $x^{(\varrho)}$ Wurzeln irreducibeler Gleichungen desselben Grades sind, so besteht, wenn unter ψ ein ähnlicher Ausdruck wie φ verstanden wird, auch eine Gleichung

$$(18) \qquad x^{(\varrho)} = \psi(x, u; v);$$

aus den Gleichungen (17) und (18) aber folgt

$$F_0(\varphi(x^{(\varrho)}, u; v), u; v) = 0$$

also auch

$$F_0(\varphi(x^{(\varrho)}, u; c), u; c) = 0;$$

ebenso andrerseits

$$F_0(\psi(x, u; v), u; C^{(\varrho)}) = 0,$$

also, da x in x' übergeht, wenn v_ν durch c_ν ersetzt wird

$$F_0(\psi(x', u; c), u; C^{(\varrho)}) = 0.$$

Somit ergiebt sich das Resultat, dass die durch (13) definirten Functionen x' sich nicht nur auf eine endliche Anzahl von Gattungen vertheilen, sondern sogar alle einer und derselben Gattung angehören. Hieraus fliesst sofort der folgende

Lehrsatz I.

*Sind die Coefficienten der eine algebraische Function von einer Variabeln definirenden Gleichung, nicht aber die Verzweigungspunkte dieser Function von gewissen $\varkappa$ Parametern algebraisch abhängig, so gehören alle für specielle Werthe der Parameter erhaltenen algebraischen Functionen, abgesehen höchstens von einer $(\varkappa-1)$-fachen algebraischen Mannichfaltigkeit im Gebiet der $\varkappa$ Parameter, einer und derselben Gattung an.**)

Ein weiteres Resultat, welches aus der Gleichung (18) abgelesen werden kann, ist dieses, dass die von den $\varkappa+1$ Variabeln $u, v_1, \cdots, v_\varkappa$ abhängige Grösse x durch eine algebraische Function von u allein, nämlich $x^{(\varrho)}$, und die in den Coefficienten des Ausdruckes φ auftretenden algebraischen Functionen der Grössen v, welche alle durch eine einzige algebraische Function dieser Grössen ausgedrückt werden können, also auch durch eine algebraische Function von u allein und eine algebraische Function der Grössen v allein im Bereich $\mathfrak{R}_0$ rational ausdrückbar ist. Damit ist die Umkehrung des in § 1 erhaltenen Resultats erwiesen und es ergiebt sich der folgende

Lehrsatz II.

Eine algebraische Function der Variabeln $u, v_1, v_2, \ldots, v_\varkappa$ ist dann und nur dann rational ausdrückbar durch eine algebraische Function von u allein und eine algebraische Function der Grössen v allein, wenn bei Betrachtung von x als algebraischer Function von u allein und dementsprechender Adjunction aller algebraischer Functionen der Grössen v die Discriminante der gegebenen, die Function x definirenden Gleichung einen von den Grössen v unabhängigen wesentlichen Theiler besitzt.

Hieraus kann nun leicht ein Kriterium dafür abgeleitet werden, ob eine algebraische Function von mehreren Variabeln rational durch algebraische Functionen von je einer dieser Variabeln ausgedrückt werden kann oder nicht.

Die algebraische Function x der h Variabeln $u_1, u_2, \ldots, u_h$ sei für jeden Werth von ν rational durch eine algebraische Function von u_ν allein und eine algebraische Function der übrigen $h-1$ Grössen u rational ausdrückbar, sodass man setzen kann

$$
\begin{aligned}
x &= \vartheta_1\left(\sigma_1(u_2, u_3, \cdots, u_h),\quad \tau_1(u_1)\right)\\
&= \vartheta_2\left(\sigma_2(u_1, u_3, \cdots, u_h),\quad \tau_2(u_2)\right) = \cdots\\
&= \vartheta_h\left(\sigma_h(u_1, u_2, \cdots, u_{h-1}),\ \tau_h(u_h)\right)
\end{aligned}
\tag{19}
$$

*) In der Riemann'schen Terminologie einer und derselben „Classe“.

wobei unter $\vartheta_1, \vartheta_2, \cdots, \vartheta_h$ rationale Ausdrücke, deren Coefficienten von den Grössen u nicht irrational abhängig sind, und unter σ, τ algebraische Functionen der beigefügten Argumente zu verstehen sind. Dann kann man annehmen, dass die Ordnung der algebraischen Function σ_1 dieselbe ist wie die Ordnung der Grösse x nach Adjunction aller algebraischen Functionen von u_1, d. h. gleich dem Grade der nach dieser Adjunction irreducibeln Gleichung, welcher die Grösse x genügt. Denn sind die Wurzeln dieser Gleichung $x_0 = x, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$, so bestände andernfalls das Gleichungssystem

$$(20)\qquad \begin{aligned} x_0 &= \vartheta_1(\sigma_{1\nu}, \tau_1(u_1)), \\ x_1 &= \vartheta_1(\sigma_{1,n_1+\nu}, \tau_1(u_1)), \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= \vartheta_1(\sigma_{1,(n-1)n_1+\nu}, \tau_1(u_1)) \qquad \nu = 1, 2, \cdots, n_1 \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\; r = n n_1, \end{aligned}$$

wo unter $\sigma_{11} = \sigma_1(u_2, u_3, \cdots, u_h)$, $\sigma_{12}, \sigma_{13}, \cdots, \sigma_{1r}$ die sämmtlichen r conjugirten Werthe der algebraischen Function σ_1 zu verstehen sind. Diese conjugirten Werthe sind dieselben, gleichviel ob man den Rationalitätsbereich aller Constanten oder denjenigen aller algebraischen Functionen von u_1 zu Grunde legt; denn die nach Adjunction aller Constanten irreducibele Gleichung, welcher die Grösse $\sigma_1(u_2, u_3, \cdots, u_h)$ genügt, kann offenbar durch Adjunction algebraischer Functionen von u_1 nicht reducibel werden. Aus den Gleichungen (20) und der Verschiedenheit der Werthe x_ν folgt, dass der mit der Unbestimmten α gebildete Ausdruck

$$s_\lambda = \prod_{\nu=1}^{n_1} \{\alpha - \vartheta_1(\sigma_{1,\lambda n_1+\nu}, \tau_1(u_1))\} \qquad \lambda = 0, 1, \cdots, n-1$$

keinem formell von ihm verschiedenen Ausdrucke, welcher aus ihm durch Umsetzung der r Grössen $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \cdots, \sigma_{1r}$ entsteht, dem Werthe nach gleich sein kann; durch s_λ sind also alle symmetrischen Functionen der Grössen

$$(21)\qquad \sigma_{1,\lambda n_1+1}, \sigma_{1,\lambda n_1+2}, \cdots, \sigma_{1,(\lambda+1)n_1}$$

rational nach dem bekannten Theorem von Lagrange ausdrückbar; da nun aber offenbar die Gleichung

$$s_\lambda = (\alpha - x_\lambda)^{n_1}$$

besteht, so folgt, wenn man

$$S_\lambda = \prod_{\nu=1}^{n_1} (\alpha - \sigma_{1,\lambda n_1+1})$$

setzt, dass die symmetrischen Functionen der Grössen $S_0, S_1, \cdots, S_{n-1}$

nach Adjunction algebraischer Functionen von u_1 rational sind; da nun aber die Grössen S_λ von u_1 unabhängig sind, so sind die genannten symmetrischen Functionen nach alleiniger Adjunction von Constanten rational, d. h. sie sind rationale Functionen von $u_2, u_3, \cdots, u_h$. Weil ferner die Grösse S_λ keiner formell von ihr verschiedenen Grösse, welche durch Umsetzung der Grössen $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \cdots, \tau_{1r}$ aus ihr entsteht, dem Werthe nach gleich ist, so kann durch S_λ jede symmetrische Function der Grössen (21), also auch die Grösse

$$x_\lambda = \frac{1}{n_1} \sum_{\nu=1}^{n_1} \vartheta_1 (\sigma_{1,\lambda n_1+1}, \tau_1(u_1))$$

rational ausdrückbar, speciell kann man setzen

$$x_0 = x = \Theta(S_0, \tau_1(u_1)),$$

wenn unter Θ ein rationaler Ausdruck derselben Art wie ϑ_1 verstanden wird. Da nun S_0 eine n-werthige algebraische Function von $u_2, u_3, \cdots, u_h$ ist, so ist bewiesen, dass man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen kann, in der Gleichung

$$x = \vartheta_1 (\sigma_1(u_2, u_3, \cdots, u_h), \tau_1(u_1))$$

sei σ_1 eine n-werthige algebraische Function, wenn die Grösse x bei Adjunction aller algebraischen Functionen von u_1 einer irreducibeln Gleichung n^{ten} Grades genügt. Dann sind x und σ_1 algebraische Grössen derselben Ordnung, also folgt aus der rationalen Ausdrückbarkeit von x durch σ_1 auch umgekehrt, dass man setzen kann

$$\sigma_1(u_2, u_3, \cdots, u_h) = \vartheta_0(x, \tau_0(u_1), u_1, u_2, \cdots, u_h),$$

wobei ϑ_0 einen rationalen Ausdruck mit constanten Coefficienten, und τ_0 eine algebraische Function bedeutet. Hieraus folgt, wenn für $u_1 = c_1$ die Function x in x' übergeht,

$$\text{(22)} \qquad \sigma_1(u_2, u_3, \cdots, u_h) = \vartheta_0(x', \tau_0(c_1), c_1, u_2, \cdots, u_h).$$

Nun ergeben die Gleichungen (19):

$$\begin{aligned} x' &= \vartheta_2'(\sigma_2(c_1, u_3, \cdots, u_h), \tau_2(u_2)) \\ &= \vartheta_3'(\sigma_3(c_1, u_2, u_4, \cdots, u_h), \tau_3(u_3)) \\ &\;\vdots \\ &= \vartheta_h'(\sigma_h(c_1, u_2, \cdots, u_{h-1}), \tau_h(u_h)) \end{aligned}$$

wenn der rationale Ausdruck ϑ_ν für $u_1 = c_1$ in ϑ_ν' übergeht; also lehrt die Gleichung (22), dass die Function $\sigma_1(u_2, u_3, \cdots, u_h)$, wenn unter μ ein beliebiger der Werthe $2, 3, \cdots, h$ verstanden wird, rational ausgedrückt werden kann durch eine algebraische Function von u_μ allein, und eine algebraische Function der Grössen $u_2, u_3, \cdots, u_h$ mit Ausschluss von u_μ. Demnach besteht für die Function σ_1 ein den Glei-

chungen (19) ganz analoges Gleichungssystem. In diesen neuen Gleichungen treten algebraische Functionen von $h-2$ Variabeln auf, für welche dieselben Schlüsse wie für σ_1 entwickelt werden können, und durch Fortsetzung dieses Beweisverfahrens kommt man schliesslich zu dem Resultat,

> dass eine den Gleichungen (19) genügende algebraische Function der Grössen $u_1, u_2, \cdots, u_h$ aus algebraischen Functionen von je einer der h Grössen u rational zusammengesetzt werden kann.

Hieraus ergiebt sich in Verbindung mit dem Lehrsatz II der folgende

Lehrsatz III.

Eine algebraische Function x der Variabeln $u_1, u_2, \cdots, u_h$ ist dann und nur dann durch h algebraische Functionen von je einer der h Variabeln u rational ausdrückbar, wenn folgende Bedingung erfüllt ist. Wählt man den Index μ in der Reihe der Zahlen $1, 2, \cdots, h$ beliebig, und betrachtet x als algebraische Function von u_μ allein, indem man alle algebraischen Functionen von $u_1, u_2, \cdots, u_{\mu-1}, u_{\mu+1}, \cdots, u_h$ adjungirt, so muss die Discriminante der ursprünglich gegebenen die Function x definirenden Gleichung einen von den Grössen $u_1, u_2, \cdots, u_{\mu-1}, u_{\mu+1}, \cdots, u_h$ unabhängigen wesentlichen Theiler besitzen.

Ein ganz ähnlich lautendes Criterium für die Ausdrückbarkeit einer algebraischen Function von h Variabeln durch algebraische Functionen von mehr als einer, aber weniger als h Variabeln kann nach einer der hier gebrauchten ähnlichen Beweismethode abgeleitet werden; doch wird die Darstellung dieses allgemeinen Criteriums besser mit einer genaueren Untersuchung der Verzweigung der algebraischen Functionen von mehreren Variabeln verbunden, und mag deshalb einer andern Gelegenheit vorbehalten bleiben.

Breslau, November 1886.

Ueber die in den Vielfachen eines Kettenbruchs enthaltenen grössten Ganzen.

Von

Koppe in Berlin.

Die Aufgabe, eine rationale oder irrationale Zahl a, die durch einen gewöhnlichen Kettenbruch dargestellt sei, angenähert durch einen Bruch mit dem gegebenen Nenner q auszudrücken, findet nur dann ihre Lösung durch die Näherungswerthe des Kettenbruchs, wenn q zufällig Nenner eines Näherungsbruchs ist. Der practische Nutzen der Kettenbrüche ist daher, obwohl sie die absolut besten Näherungswerthe liefern, nur ein beschränkter. Soll man z. B. die Zahl a auf fünf Stellen in einen Decimalbruch verwandeln, so wäre ein Näherungswerth mit dem Nenner 10^5 erforderlich. Soll ferner die Anzahl der auf vier Jahrhunderte zu vertheilenden Schalttage bestimmt werden, so hätte man in dem Verhältniss des tropischen Jahres zum Sonnentage $= 365,242008$ den Bruchteil durch einen Bruch vom Nenner 400 zu ersetzen, dessen Zähler dann die gesuchte Zahl gäbe.

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt werden, dass sich die obige Aufgabe bei beliebigen Werthen des Nenners q mit Hilfe der Näherungswerthe des Kettenbruchs lösen lässt, und zwar nach folgender Regel:

Man dividire q durch den grössten Näherungsnenner, der $< q$ ist, den Rest wieder durch den grössten in ihm enthaltenen Näherungsnenner u. s. f., wodurch sich schliesslich q als Aggregat der mit gewissen Coefficienten multiplicirten Näherungsnenner ergiebt. Multiplicirt man nun jeden Näherungsbruch im Zähler und Nenner mit dem entsprechenden Coefficienten, und bildet dann aus der Summe sämmtlicher Zähler und der Summe sämmtlicher Nenner einen neuen Bruch, so ist dies einer der beiden Brüche $\frac{p}{q}$ und $\frac{p+1}{q}$, welche a einschliessen, und es lässt sich leicht entscheiden, welcher von beiden es ist. Es giebt aber auch ähnliche Methoden, welche bei Benutzung der Reihe der zunehmenden, resp. der abnehmenden intermediären Näherungswerthe nach vorher getroffener Bestimmung auf den einen oder auf den andern jener beiden Brüche führen.

Eine einfache Methode zur Bestimmung des grössten in $q \,.\, a$ enthaltenen Ganzen p ist besonders in solchen Fällen wichtig, wo dasselbe für viele aufeinanderfolgende Vielfache einer und derselben Zahl a zu ermitteln ist.

Würde z. B. eine Kalender-Ordnung festgesetzt, nach welcher das n^{te} bürgerliche Jahr mit demjenigen Tage schlösse, an welchem der von einer Epoche gerechnete Zeitraum von n tropischen Jahren abläuft, so hätte man zur Bestimmung der Jahreslängen die in a, $2a$, $3a, \ldots$ enthaltenen grössten Ganzen aufzusuchen, wenn a die oben angegebene Länge des tropischen Jahres in Tagen ist, die als unveränderlich angenommen wird. Jede Schaltmethode macht nach längeren Zeiträumen einen Eingriff nöthig, der das Jahr wieder in Uebereinstimmung mit der obigen Definition bringt. Bei der Bildung der Multipla von a ergiebt sich, dass die grössten Ganzen meist um 365, alle 4 oder 5 Jahr um 366 zunehmen. Es fragt sich nun, ob der Wechsel dieser Zeiträume einem bestimmten Gesetze unterliegt, dessen Kenntniss die jedesmalige Entscheidung durch Ausführung der Multiplication entbehrlich macht, ferner ob und welche Näherungswerthe statt der Irrationalzahl angewandt werden können, ohne die Sicherheit des Resultats zu gefährden.

Ein anderes Beispiel ist folgendes: Werden die Primzahlen 2, 3, 5, ... mit $p_1, p_2, p_3, \ldots$ bezeichnet, so ist die Anzahl derjenigen Zahlen $\leqq q$, welche durch keine der λ ersten Primzahlen theilbar sind, ausgedrückt durch

$$T(q,\lambda) = \left[q\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_\lambda}\right)\right]$$

mit der Massgabe, dass nach Entwicklung des Products jedes Glied seinem absoluten Betrage nach durch die grösste in demselben enthaltene ganze Zahl ersetzt werde. Hieraus folgt, wenn

$$p_\lambda^2 \leqq q < p_{\lambda+1}^2,$$

dass die Anzahl der Primzahlen $\leqq q$ folgende ist:

$$\psi(q) = T(q,\lambda) + \lambda - 1.$$

Als Näherungswerth des schwierig zu berechnenden $T(q,\lambda)$ betrachtet Legendre*) die grösste in dem Product

$$q\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_\lambda}\right)$$

enthaltene ganze Zahl, für welche das Functionszeichen E benutzt werde. Für $13^2 \leqq q < 17^2$ würde angenähert:

*) Théorie des nombres, 3 ed., tom II, p. 86. In der letzten Formel von § 425, p. 90, sind diejenigen Zahlen zwischen ω' und a' übersehen, welche Primzahlpotenzen enthalten.

$$\psi(q) = E\left(q\left(1-\tfrac{1}{2}\right)\left(1-\tfrac{1}{3}\right)\left(1-\tfrac{1}{5}\right)\left(1-\tfrac{1}{7}\right)\left(1-\tfrac{1}{11}\right)\left(1-\tfrac{1}{13}\right)\right)+5$$
$$= E\left(q\cdot\tfrac{192}{1001}\right)+5.$$

Um die Genauigkeit dieses Ausdrucks zu prüfen, wäre nun erwünscht, diejenigen Werthe des wachsenden q zu kennen, für welche E in eine höhere ganze Zahl aufrückt. Ist diese $= n$, so wäre der betreffende Werth von q angenähert gleich der $(n+5)^{\text{ten}}$ Primzahl.

Bei einer andern Classe von Aufgaben kommt es auf die Grösse des Restes an, der nach Weglassung der grössten Ganzen von den auf einander folgenden Vielfachen einer Zahl a übrig bleibt.

Es seien die Zeiten für den Eintritt von Vorübergängen der Venus vor der Sonne zu bestimmen. Man gehe von einem Zeitpunkt aus, für welchen von der Sonne aus Venus und Erde in Conjunction stehen, und betrachte den dann von der Erde eingenommenen Ort als Anfangspunkt für die Zählung rechtläufiger Entfernungen längs der Erdbahn, die als Längen bezeichnet werden mögen. Der Umfang der Erdbahn sei $= a_0$, die Länge desjenigen Punktes, in welchem die Erde bei der nächsten Conjunction steht, sei a_1. Da die synodische Umlaufszeit der Venus etwa 584 Tage beträgt, so ist a_1 etwa gleich 216^0. Findet nach q synodischen Umläufen wieder eine Conjunction statt, so hat die Erde die Länge $qa_1 - pa_0$, wo p angiebt, wieviel volle Kreise a_0 in qa_1 enthalten sind. Für einen Venusvorübergang ist erforderlich, dass die Conjunction in der Nähe eines Knotens, etwa des aufsteigenden, stattfinde. Ist dessen Länge $= \varepsilon$, der gestattete Abstand $= \delta$, so muss $qa_1 - pa_0$ zwischen $\varepsilon + \delta$ und $\varepsilon - \delta$ liegen. Diese Grenzwerthe haben nur dann verschiedene Zeichen, wenn die als Epoche dienende Conjunction selbst mit einem Vorübergang verbunden war. Um Uebereinstimmung mit dem früher betrachteten Ausdruck $qa - p$ zu erhalten, hat man von den Strecken a_1 und a_0 die letztere als Einheit zu wählen.

Verbindet man die Punkte, in denen die Erde bei den regelmässig wiederkehrenden Conjunctionen steht, der Reihe nach durch Sehnen, so erhält man eine dem Kreise eingeschriebene gebrochene Linie, von der sich beständig neue Eckpunkte zwischen die schon vorhandenen einschieben, so dass dieselben den Kreisumfang in immer kleinere Teile zerlegen.

Ist $a_1 : a_0$ irrational, so kann bei der Weiterführung der gebrochenen Linie niemals ein früherer Eckpunkt wieder erreicht werden, also ist die Gleichung $qa_1 - pa_0 = \varepsilon$, wenn überhaupt, nur auf eine Art in endlichen Zahlen p und q lösbar. Man kann daher nicht nur aus der Zahl q die Grössen p und ε, sondern auch umgekehrt aus ε die Zahl q eindeutig finden.

Ist $a_1 : a_0$ rational, so folgen aus einer Lösung der Gleichung unendlich viele, da durch wiederholtes Eintragen der Sehne ein vorhandener Eckpunkt beliebig oft wieder zu erreichen ist.

Die bei der letzten Aufgabe sich darbietende geometrische Deutung von $qa_1 - pa_0$ werden wir nun beständig zu Grunde legen. Wir werden untersuchen, wann die Eckpunkte der gebrochnen Linie dem Anfangspunkt wieder besonders nahe kommen, und werden nachweisen, dass in jedem derartigen Falle die Vertheilung derselben über den Kreis hin besonders einfach ist, so dass nämlich die Abstände benachbarter nur von zweierlei Grösse sind. Jedem entstehenden Eckpunkt des Sehnenpolygons entspricht ein Näherungsbruch $\frac{p}{q}$ des Verhältnisses $a_1 : a_0$; für Punkte, welche die besondere Annäherung an den Anfangspunkt zeigen, wird dies ein Näherungswerth des Kettenbruchs. Hierdurch lassen sich die Eigenschaften der Kettenbrüche anschaulich ableiten.

Betrachtet man von diesem Gesichtspunkte die Diophantische Gleichung $qa_1 - pa_0 = \varepsilon$, wo a_1, a_0, ε, ganze Zahlen seien, so ergiebt sich die Lösung derselben in den kleinsten Zahlen zu der das gewöhnliche Verfahren nicht führt. Die Methode ist einfacher als die übliche Zurückführung auf den Fall $\varepsilon = 1$, da es im allgemeinen nicht nöthig ist, $a_1 : a_0$ vollständig in einen Kettenbruch zu verwandeln. Man sucht ε als Aggregat der möglichst oft genommenen Reste darzustellen, die bei der Verwandlung von $a_1 : a_0$ in einen Kettenbruch allmählich auftreten. Sobald dies abgeschlossen ist, bildet man entsprechende Aggregate aus den Zählern resp. Nennern der zugehörigen Näherungsbrüche. Dies sind die Werthe der Unbekannten.

Lagrange*) hat in den Zusätzen zu Euler's Algebra analytisch die Aufgabe gelöst, solche Werthe der ganzen Zahlen p und q zu finden, dass $qa - p$ für dieselben dem absoluten Werthe nach ein Minimum wird, d. h. kleiner als für beliebige kleinere Werthe von p und q. Er zeigt, dass es eine Reihe solcher Minima giebt, dass dieselbe auf die Entwicklung von a in einen Kettenbruch führt, und dass die sämmtlichen Lösungen durch die Zähler und Nenner der Näherungsbrüche dargestellt werden. Der bekannte Satz, dass ein Näherungswerth $\frac{p}{q}$ dem Werthe a eines Kettenbruchs näher kommt als alle Brüche mit kleinerem Nenner, ist aus dem obigen zu folgern. Denn ist $q' < q$, so ist

$$qa - p < q'a - p',$$

also auch

$$a - \frac{p}{q} < \frac{q'}{q}\left(a - \frac{p'}{q'}\right) < a - \frac{p'}{q'}.$$

Dirichlet**) hat die zu einer Irrationalzahl a gehörende Reihe

*) Oeuvres tome VII, p. 45—56.

**) Zahlentheorie, 2[te] Aufl. Suppl. VIII (Pell'sche Gl.) § 141. Serret, cours d'algèbre. tome I, no. 12.

$qa-p$ betrachtet, um daraus den sonst auf der Theorie der Kettenbrüche beruhenden Satz abzuleiten, dass man a durch einen Bruch $\frac{p}{q}$ mit einem Fehler $< q^{-2}$ darstellen kann. Versteht man nämlich, für $q=1, 2, \ldots n$, unter p die grösste in qa enthaltene ganze Zahl, so liegen die Werthe von $qa-p$ innerhalb der Strecke $0\ldots 1$. Ist α der grösste von ihnen, so zerfällt die Strecke $0\ldots\alpha$ in n Theile, von denen der kleinste $\leqq \frac{\alpha}{n}$, also $< \frac{1}{n}$ sein muss. Wird dieser von den Punkten $q'a-p'$ und $q''a-p''$ begrenzt, wo $q''>q'$, also $p''\geqq p'$ sei, so besteht für $q=p''-q'$, $p=p''-p'$ die Ungleichheit $qa-p<\frac{1}{n}$, folglich auch $qa-p<\frac{1}{q}$ oder $a-\frac{p}{q}<\frac{1}{q^2}$.

Grunert hat darauf hingewiesen, dass es zur Bestimmung des grössten gemeinschaftlichen Maasses zweier Zahlen ausser dem Euclidischen Verfahren noch einen andern Weg giebt. Haben a_1 und a_0 das Maass m, so dass $a_1=p.m$, $a_0=q.m$, so ist $qa_1-pa_0=0$. Man bilde daher die Vielfachen von a_1, lasse von jedem das grösste darin enthaltene Vielfache von a_0 fort, bis man zu dem Reste $qa_1-pa_0=0$ gelangt. Dann ist $\frac{a_1}{p}=\frac{a_0}{q}=m$ das gesuchte Maass. Sind a_1 und a_0 Linien, so hat man hiernach auf einer Geraden vom Punkte 0 an beliebig oft die Strecke a_1 abzutragen, bis zu den Punkten $A_1, A_2, A_3, \ldots$, ferner auf derselben Geraden in gleicher Weise wiederholt die Strecke a_0 abzutragen bis zu den Punkten $X_1, X_2, X_3, \ldots$. Findet sich dann, dass zwei Punkte der beiden Reihen genau zusammenfallen, z. B. A_q mit X_p, so sind a_1 und a_0 commensurabel, ihr Maass ist entweder $\frac{a}{p}=\frac{a_0}{q}$ oder auch der kleinste aufzufindende Abstand zweier Punkte der beiden Reihen.

Die folgenden Betrachtungen werden erkennen lassen, wie sich dieses weitläufige Verfahren auf das Euclidische reducirt.

Eine der obigen entsprechende Auffassung liegt bei Euclid der Behandlung der Proportionen zu Grunde. Ein Verhältniss $a_1 : a_0$ wird $= b_1 : b_0$ definirt, wenn bei Annahme beliebiger ganzer Zahlen p und q immer qa_1-pa_0 von gleichem Zeichen mit qb_1-pb_0 ist. Hat man aber in der obigen Weise noch auf einer zweiten Geraden wiederholt b_1 und b_0 bis zu den Punkten $B_1\,B_2\ldots$ resp. $Y_1\,Y_2$ abgetragen, so lässt sich die angegebene Bedingung auch so aussprechen, dass auf der ersten Geraden die Punkte A mit den Punkten X in derselben Reihenfolge abwechseln wie auf der andern die Punkte B mit den Punkten Y. Dem Verhältniss $a_1 : a_0$ wird also die Aufeinanderfolge der Punkte A und X substituirt.

§ 1.

Geometrische Darstellung der Werthe von $qa_1 - pa_0$.

Auf einer vom Anfangspunkt nach rechts laufenden Geraden seien die Punkte bezeichnet, deren Abscissen $0, a_0, 2a_0, \ldots$ sind. Um dieselbe Gerade noch mit einer zweiten Eintheilung in kleinere Theile von der Grösse a_1 zu versehen, die zu a_0 im allgemeinen in irrationalem Verhältniss stehe, denke man sich, dass ein Kreis vom Umfange a_1, der mit seinem Nullpunkt ursprünglich den Anfangspunkt der Geraden berührte, nach rechts über dieselbe hinrolle, und dass der Nullpunkt desselben seine Spur auf die Gerade bei jeder Berührung übertrage. Dies geschehe innerhalb der ersten Hauptstrecke, die von 0 bis a_0 reicht, n_1 mal, so dass

$$a_0 = n_1 a_1 + a_2, \; a_2 < a_1.$$

Wir wollen den Abstand irgend eines Punktes der secundären Theilung von dem nächst vorangehenden Punkte der Hauptheilung, d. h. den Ausdruck $qa_1 - pa_0$ ins Auge fassen. Alle Werthe, deren derselbe fähig ist, sind innerhalb der einzelnen Strecken $0 \ldots a_0$, $a_0 \ldots 2a_0$, $2a_0 \ldots 3a_0 \ldots$ durch Punkte repräsentirt. Man kann aber bewirken, dass auf der Strecke $\lambda a_0 \ldots (\lambda + 1)a_0$ nicht nur die derselben eigenthümlichen Werthe zur Darstellung gelangen, sondern dass auch die der vorhergehenden Hauptstrecken wiederholt werden. Um z. B. solche Punkte zu erhalten, wie sie der nächst vorhergehenden Strecke zukommen, ist nur nöthig, zum zeichnenden Punkte des rollenden Kreises an Stelle des Nullpunktes denjenigen zu wählen, mit welchem der Kreis die Gerade beim Verlassen der ersten Hauptstrecke, also in a_0, berührte. Wählt man dagegen als zeichnenden Punkt denjenigen, mit welchem der Kreis beim Verlassen der zweiten Hauptstrecke, also in $2a_0$, die Gerade berührte, so erhält man die Reproduction derjenigen Theilpunkte, die der Nullpunkt auf der zweiten vorhergehenden Strecke hervorbrachte.

Um immer alle Werthe zugleich zu übersehn, die dem Ausdruck $qa_1 - pa_0$ durch die früheren, auf verschiedene Hauptstrecken verstreuten, Punkte beigelegt wurden, wollen wir festsetzen, dass sich dem Nullpunkt des rollenden Kreises beim Ueberschreiten der Grenzpunkte $a_0, 2a_0, 3a_0 \ldots$ die Punkte, mit denen er dann jedesmal die Gerade berührt, als neue zeichnende Punkte zugesellen. Welche sind dies? Rollt der Kreis über die erste Strecke a_0, so kommen dieselben Punkte gegenseitig zur Deckung wie wenn man die Strecke a_0 auf den Kreis aufwickelt und zwar von seinem Aufangspunkte aus und in der Richtung gegen den Uhrzeiger. Da $a_0 = n_1 a_1 + a_2$, so fällt der Endpunkt der aufgewickelten Strecke a_0 in den Punkt a_2 des Kreises. Entsprechend

haben die Punkte, auf denen der Kreis über die Grenzpunkte $2a_0, 3a_0, \ldots$ der Geraden hinwegrollt, auf ihm selbst die Längen $2a_2$, $3a_2 \ldots$

Die „vollständige" Eintheilung der Strecke $\lambda a_0 \ldots (\lambda + 1)\ a_0$ wird daher folgendermassen erhalten. Man versieht die Peripherie a_1 des rollenden Kreises mit den Punkten 0, a_2, $2a_2, \ldots \lambda a_2$, setzt ihn mit dem letzten Punkte auf den Aufangspunkt λa_0 der Strecke und rollt ihn über dieselbe hinweg, wobei jeder auf dem Umfange markirte Punkt seine Spur der Geraden aufprägen muss. Der Punkt 0 giebt dann die wirklich jetzt erst entstehenden, d. h. die der Strecke eigenthümlichen Punkte, er kann daher während des Processes ausser Wirksamkeit gesetzt werden, wenn man die Zahl q beschränken will. Dagegen müssen sich die übrigen Punkte bis zuletzt übertragen, um die den kleineren Werthen von q entsprechenden Werthe von $qa_1 - pa_0$ durch Wiederholung der Punkte früherer Strecken vollständig zur Darstellung zu bringen.

Die Zahl λ wird bald so gross werden, dass die auf dem rollenden Kreise wiederholt abzutragenden Bogen von der Grösse a_2 den Umfang desselben öfter als einmal erfüllen. Dann lagern sich die spätern Punkte zwischen die früheren, zerlegen dadurch die schon vorhandenen Abschnitte der Kreisperipherie in kleinere Abtheilungen, die sich durch das Abrollen des Kreises auch den späteren Strecken der Geraden mittheilen.

Das System der Reste $qa_1 - pa_0$ entsteht auf jeder folgenden Strecke von neuem und erreicht jedesmal grössere Vollständigkeit. Wir können aber eine stetige Entwicklung desselben herbeiführen, wenn wir die Hauptstrecken in eine zusammenziehen, dadurch dass wir als Bahn, auf welcher der Kreis a_1 rollt, die innere Peripherie eines Kreises vom Umfange a_0 wählen, auf welchem sich der Berührungspunkt in der Richtung gegen den Uhrzeiger bewege. Dieser Kreis zeigt, einmal durchlaufen, die Eintheilung der ersten Hauptstrecke, zweimal durchlaufen die vollständige Eintheilung der zweiten Hauptstrecke u. s. f. Wieviele Male die Strecke a_0 durchlaufen ist, lässt sich nun allerdings nicht mehr, wie anfangs, durch Abzählen der Hauptstrecken a_0 finden, ergiebt sich aber daraus, dass der rollende Kreis a_1, wenn er die Bahn zum 2^{ten}, $3^{\text{ten}}, \ldots$ Mal durchmisst, mit einem neuen Punkte $a_2, 2a_2 \ldots$ ausgerüstet wird, so dass die Anzahl der auf seinem Umfange ausser dem Nullpunkte noch bezeichneten Punkte die vollen Umläufe angiebt.

Die auf dem rollenden Kreise a_0 allmählich entstehenden Punkte lassen sich direct erzeugen, indem man die zu dem Bogen a_2 gehörende Sehne wiederholt in ihn einträgt, oder auch indem man einen Kreis vom Umfange a_2 innerhalb des Kreises a_1 oder lieber eines ihm congruenten festen Kreises rollen lässt, so dass der Berührungspunkt den

letztern in der Richtung gegen den Uhrzeiger durchläuft. Dabei muss der Kreis a_2 den Kreis a_1 in derselben Zeit durchlaufen, in welcher der Kreis a_1 den Kreis a_0 durchläuft. Denn nach Ablauf dieser Zeit muss auf die eine oder die andere Art der Punkt a_2 auf dem Kreise a_1 entstehen.

Man kann jetzt den Kreis a_0 vorläufig ausser Acht lassen. Man lässt in dem Kreise a_1 den Kreis a_2, der jenen ursprünglich in dem gemeinschaftlichen Nullpunkte berührte, beliebig lange weiter rollen. Nach jedem Umlauf entsteht auf dem Kreise a_1 eine neue Reihe von Punkten, die sich auch auf dem rollenden Kreise a_2 durch einen neuen Punkt markirt. Zuerst rollt sich nämlich der Kreis a_2, bevor er zum Nullpunkt des festen Kreises a_1 zurückkehrt, n_2 mal auf der Peripherie desselben ab, wodurch diese bis auf den Rest a_3 ($< a_2$) erschöpft werde. Der dadurch auf dem Kreise a_1 erreichte Punkt kann als ($-a_3$) bezeichnet werden. Unmittelbar darauf entsteht auf dem rollenden Kreise a_2 bei Ueberschreitung des Ausgangspunktes der Punkt a_3, bei Beginn des nächsten Umlaufs $2a_3$, u. s. w.

Bei dem Rollen des Kreises a_2 innerhalb des Kreises a_1 treten daher dieselben Verhältnisse auf wie bei dem von a_1 innerhalb a_0. Man kann folglich auch von dem Kreise a_1 vorläufig absehn, wenn man sich noch einen Kreis a_3 denkt, der den Kreis a_2 durchläuft, sich innerhalb desselben zunächst n_3 mal vollständig abrollt, dann nach Zurücklegung der Reststrecke a_4 ($< a_3$) zum Ausgangspunkte zurückkehrt, und sich nun bei wiederholten Umläufen mit den Punkten a_4, $2a_4$, $3a_4$, ..., bedeckt.

Hat man so etwa die Eintheilung des Kreises a_3 mit Hilfe eines rollenden Kreises a_4 direct erzeugt, so setzt man ersteren mit dem ihm zuletzt aufgeprägten Punkte auf den Anfangspunkt des Kreises a_2 und lässt ihn die Peripherie desselben einmal durchlaufen, wobei seine Theilpunkte sich beständig auf den festen Kreis übertragen, mit Ausnahme des Nullpunktes, der bei den letzten Abdrücken ausser Wirksamkeit treten kann. Der so vorbereitete Kreis a_2 wird nunmehr mit demjenigen Punkt, in dem er zuletzt von dem Nullpunkt des vorigen Kreises getroffen war, auf den Anfangspunkt des Kreises a_1 gesetzt und giebt, indem er dessen Peripherie einmal durchläuft, die auf demselben erforderlichen Punkte an. Endlich wird in entsprechender Weise der Kreis a_1 innerhalb des Kreises a_0 abgerollt.

Das resultirende Punktsystem des Kreises a_0 muss dann dasselbe sein als wenn man den nur mit einer Marke am Nullpunkt O versehenen Kreis a_1 so oft auf dem Kreise a_0 abgerollt hätte, bis ebensoviele Punkte entstanden wären wie bei dem beschriebenen Verfahren.

§ 2.

Die räumliche Anordnung der Ecken eines ungeschlossenen regulären Polygons.

Es sei in den Kreis a_0 die zu dem Bogen a_1 gehörende Sehne q mal hinter einander eingetragen. Die Ecken seien mit 0, 1, 2, ... q nach ihrer natürlichen Reihenfolge, d. h. nach der Zeit ihres Entstehens, bezeichnet. Betrachtet man die hiervon verschiedene, räumliche, Gruppirung der Eckpunkte auf der Kreisperipherie, so sei δ der kleinste Abstand zwischen benachbarten Punkten. Dieser Abstand finde sich zwischen den Ecken λ und μ. Ist $\lambda > \mu$, so führt eine aus $\lambda - \mu$ Sehnen bestehende Linie von der einen Ecke zur andern, eine eben solche führt daher vom Nullpunkt zu einer Ecke, die von diesem nach der positiven oder negativen Seite den Abstand δ hat und da δ als Minimum angenommen ist, so ist diese Ecke dem Nullpunkt unmittelbar benachbart. Nimmt daher bei wachsendem q das Minimum des Abstande seinen kleineren Werth an, so muss ein solcher jedesmal zuerst am Nullpunkte auftreten.

Dies bestimmt uns, zunächst zu untersuchen, wie sich die in die Nähe des Nullpunktes fallenden Ecken gruppiren. Die Nummer der Ecke werden wir mit N, ihren Abstand vom Nullpunkt mit $\pm\delta$ bezeichnen, endlich die Anzahl der von den zugehörigen Bogen nahezu erfüllten Kreisumfänge mit Z, so dass

$$Na_1 = Za_0 \pm \delta.$$

1) Nach einmaligem Eintragen der Sehne ist $\delta = a_1$, $N_1 = 1$, $Z_1 = 0$, so dass

$$N_1 a_1 = Z_1 a_0 + \delta.$$

2) Ist die Sehne n_1 mal eingetragen, wo n_1 die grösste in $a_0 : a_1$ enthaltene ganze Zahl bedeutet, so ist man dem Nullpunkt von der negativen Seite näher gekommen als bisher, und zwar bis auf den Abstand $\delta = a_2$. Dann ist

$$N_2 = n_1,\ Z_2 = 1,\ N_2 a_1 = Z_2 a_0 - \delta.$$

3) Trägt man vom Nullpunkt aus die Sehne N_1 mal ab und von dem Endpunkt noch N_2 mal, so gelangt man zuerst zu dem Punkt a_1 auf der positiven Seite, und dann zu einem solchen, der von diesem um a_2 in negativer Richtung entfernt ist, also zu $\delta = a_1 - a_2$ auf der positiven Seite. Verlängert man das Sehnenpolygon wieder um N_2 Sehnen, so erreicht man den Punkt $\delta = a_1 - 2a_2$. Ist a_2 in a_1 im ganzen n_2 mal enthalten, so erreicht man weiter die Punkte

$$\delta = a_1 - 3a_2, \ldots a_1 - n_2 a_2 = a_3.$$

Um einen von diesen, z. B. $a_1 - \mu a_2$, zu erhalten, sind vom Nullpunkt aus $N_1 + \mu N_2$ Sehnen einzutragen, für den letzten sei diese Zahl

$N_1 + n_2 N_2 = N_3$. Entsprechend ist $Z = Z_1 + \mu Z_2$ und für den letzten $= Z_1 + n_2 Z_2 = Z_3$. Dann ist immer

$$Na_1 = Za_0 + \delta.$$

4) Nunmehr wird die Annäherung von der negativen Seite fortgesetzt, die in 2) mit N_2 Sehnen zu dem Punkte $(-a_2)$ geführt hatte. Fügt man dem Zuge der N_2 Sehnen noch N_3 hinzu, die für sich allein vom Nullpunkt nach a_3 führen würden, so gelangt man zu einem Punkt auf der negativen Seite des Nullpunkts, der von diesem den Abstand $\delta = a_2 - a_3$ hat. Durch weitere N_3 Sehnen gelangt man zu einem Punkte auf der negativen Seite im Abstand $\delta = a_2 - 2a_3$, endlich zu $\delta = a_2 - n_3 a_3 = a_4$. Dem entsprechen

$$N = N_2 + N_3,\ N_2 + 2N_3 \ldots,\ N_2 + n_3 N_3\ (= N_4)$$
$$Z = Z_2 + Z_3,\ Z_2 + 2Z_3 \ldots,\ Z_2 + n_3 Z_3\ (= Z_4),$$

so dass immer

$$Na_1 = Za_0 - \delta.$$

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens findet man folgende dem Nullpunkt bald von der positiven, bald von der negativen Seite immer näher rückenden Eckpunkte des Sehnenpolygons:

$$(\mathrm{I})\ \begin{matrix} (+) & a_1 & a_1 - \mu a_2, a_3 & & a_3 - \mu a_4, a_5 & & \cdots \\ (-) & & a_2 & a_2 - \mu a_3, a_4 & & a_4 - \mu a_5, a_6 & \cdots \end{matrix} \Bigg\}\, 0,$$

wo zur Abkürzung $a_{\lambda-1} - \mu a_\lambda$, an Stelle der Reihe

$$a_{\lambda-1} - a_\lambda,\ a_{\lambda-1} - 2a_\lambda, \cdots,\ a_{\lambda-1} - (n_\lambda - 1) a_\lambda$$

gesetzt ist.

Ist die Annäherung von der einen Seite möglichst weit, etwa bis $\delta = a_4$, geführt, so erhält man von der andern Seite die Annäherungen $\delta = a_3 - a_4,\ a_3 - 2a_4, \cdots, a_5$. Diese Werthe sind mit Ausnahme des letzten grösser als a_4. Die absolute Annäherung nimmt also beim Uebergang von der einen zur andern Seite des Nullpunkts jedesmal ab und wird erst im letzten Punkt grösser als auf der früheren Seite. Daher würden die Eckpunkte nach der absoluten Grösse des Abstandes δ so zu ordnen sein:

$$(\mathrm{II})\ \begin{matrix} (+) & a_1, a_1 - \mu a_2 & & a_3, a_3 - \mu a_4 & & a_5, a_5 - \mu a_6 \cdots \\ (-) & & a_2, a_2 - \mu a_3 \cdot & & a_4, a_4 - \mu a_5 & \cdots \end{matrix} \Bigg\}\, 0.$$

Die zur Erreichung des Punktes $\delta = a_{\lambda-1} - \mu a_\lambda$ erforderliche Anzahl von Sehnen ist

$$N = N_{\lambda-1} + \mu N_\lambda$$

die Zahl der nahezu vollendeten Umläufe:

$$Z = Z_{\lambda-1} + \mu Z_\lambda;$$

ferner ist

$$Na_1 = Za_0 \pm \delta,$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem der betreffende Werth von δ der obern oder untern Reihe von (I) entnommen ist.

Wir werden nun zeigen, dass unmittelbar, bevor auf dem Kreise einer der ausgezeichneten Punkte $\pm\delta$ von dem Sehnenzug erreicht wird, die bis dahin entstandenen Eckpunkte nach ihrer räumlichen Gruppirung auf dem Kreise nur zwei verschiedene Abstände darbieten, deren Grösse durch das dem Werthe von δ nächst voraufgehende Glied der obern und durch das der untern Reihe von (I) dargestellt wird.

Dem Kreise a_1 werde ein Sehnenpolygon eingeschrieben, dessen Ecken 0, a_2, $2a_2 \ldots m a_2$ seien. Mit dem letzten Punkt berühre er den Nullpunkt des festen Kreises a_0 und übertrage dann, indem er über diesen hinrollt, zunächst n_1 mal vollständig sein Punktsystem. Nachdem er somit den Punkt $n_1 a_1 = a_0 - a_2$ erreicht hat, setzen wir für den nun noch zu durchlaufenden Bogen, dessen Grösse a_2 ist, den Nullpunkt des rollenden Kreises ausser Wirksamkeit. Verlegen wir zugleich den Anfangspunkt des rollenden Kreises, und zwar in den nunmehr ersten Punkt seines Sehnenpolygons, so sind die Eckpunkte mit $0, a_2, \ldots (m-1)\, a_2$ zu bezeichnen; mit dem letzten berührt er den Anfangspunkt des noch fehlenden Bogens, den Endpunkt desselben, d. h. den Nullpunkt des festen Kreises, trifft er also mit dem Punkte $m a_2$. Mithin ist zuletzt die Stellung des Kreises a_1 und die Zahl und Lage der auf ihm markirten Punkte wieder dieselbe wie sie Anfangs war.

Daher kann man das Punktsystem auf dem Kreise a_0 auch folgendermassen erhalten. Nachdem dem Kreise a_1 das Sehnenpolygon $0, a_2 \ldots, m a_2$ eingeschrieben, setzt man ihn mit dem vorletzten Eckpunkt, $(m-1)\, a_2$, auf den Punkt $-a_2$ des festen Kreises, rollt ihn nach der positiven Seite desselben hin, bis er zum Ausgangspunkte $(-a_2)$ zurückkehrt, der nun von dem letzten Eckpunkt, $m a_2$, getroffen wird.

Hieraus ist klar, dass sich jetzt auf dem Kreise a_0 nur solche Abstände benachbarter Punkte vorfinden, die auch auf dem Kreise a_1 vorkommen.

Wir wollen nun annehmen, dass die Zahl m der Eckpunkte nicht ganz willkürlich sei, dass vielmehr der Kreis a_1 seine Eintheilung selbst in der betrachteten Weise durch einen rollenden Kreis a_2 erhalten habe, dem ein Sehnenpolygon 0, a_3, $2a_3, \ldots, m' a_3$ eingeschrieben war. Dann ist das Punktsystem auf dem Kreise a_1 derartig, dass die Abstände benachbarter Punkte keine andern Werthe als auf dem Kreise a_2 haben. Es werden sich daher schliesslich auch auf dem Kreise a_0 nur die auf dem Kreise a_2 schon vorhandenen Abstände wieder finden.

In dieser Weise kann man bis auf einen Kreis $a_{\lambda-1}$ zurückgehn, auf dessen Peripherie μ mal der Bogen a_λ abgetragen sei, so dass noch ein Rest, $a_{\lambda-1} - \mu a_\lambda$, übrig bleibe. Dann werden auch auf den Kreisen $a_{\lambda-2}, a_{\lambda-3} \ldots a_2, a_1, a_0$ nur die Theile $a_{\lambda-1} - \mu a_\lambda$ und a_λ erscheinen.

Dies ist auch für $\mu = 0$ richtig. Der Fall $\mu = n_\lambda$ kann ausgeschlossen werden, da man, wenn er eintritt, von dem Kreise $a_{\lambda-1}$ noch weiter zu dem rollenden Kreise a_λ zurückgehn kann, dessen Punktsystem sich auf den Nullpunkt beschränkt.

Hiermit ist der eine Theil der Behauptung bewiesen.

Nehmen wir jetzt im Gegensatz zu dem vorhergehenden an, dass der Kreis a_1 sich ohne Reduction seines Punktsystems über den Punkt $(-a_2)$ des festen Kreises a_0 weiterbewegt, so entsteht beim nächsten Abrollen desselben ausser dem oben beschriebenen Punktsystem noch der nächstfolgende Eckpunkt auf dem Kreise a_0, ausserdem aber auch der nächstfolgende Eckpunkt auf dem Kreise a_1. Auf jedem der beiden Kreise wird nämlich der nächste Punkt durch den Nullpunkt des andern im Augenblick der Berührung markirt. Führt daher auf dem festen Kreise die Fortsetzung des ihm eingeschriebenen Polygons auf einen Punkt von der Länge x (zwischen $-a_2$ und $a_1 - a_2$), so führt die Fortsetzung des dem rollenden Kreise eingeschriebenen Polygons auf einen Punkt von der Länge $(-x)$, und es kommen die Punkte $(-x)\ldots 0$ des letzteren mit denen der Strecke $0\ldots x$ des ersteren zur Deckung.

Nach der über m gemachten Annahme liegt die auf dem Kreise a_1 in positiver Richtung gemessene Entfernung von ma_2 bis zum Nullpunkt in den Grenzen a_3 und $a_2 + a_3$, ferner ist die in gleicher Richtung gemessene Entfernung von ma_2 bis $(-x)$ gleich a_2, folglich muss die Entfernung von $(-x)$ bis zum Nullpunkt, d. h. die Grösse x, in den Grenzen $a_3 - a_2 \ldots a_3$ liegen, oder die Länge des nächsten Punktes, der bei Fortsetzung des dem Kreise a_1 einbeschriebenen Polygons entsteht, ist grösser als $-a_3$ und kleiner als $a_2 - a_3$.

Hieraus folgt nun wieder, dass man bei Fortsetzung des dem Kreise a_2 eingeschriebenen Polygons zu einem Punkte gelangt, dessen Länge $+x$ ist und dass dieselbe zwischen den Grenzen $-a_4$ und $a_3 - a_4$ eingeschlossen ist.

Durch Wiederholung dieser Schlüsse ergiebt sich endlich für den Kreis $a_{\lambda-2}$, dass der nächste Eckpunkt seines Sehnenpolygons der Punkt $(-1)^{\lambda-2}x$ zwischen $-a_\lambda$ und $a_{\lambda-1} - a_\lambda$ ist.

Für den folgenden Kreis a_λ ergiebt sich nur, dass der nächste Eckpunkt seines Polygons $(-1)^{\lambda-1}x$ ist, es ist dies aber der Endpunkt eines aus $\mu+1$ Sehnen bestehenden Polygons, der an sich ebensogut mit $(\mu+1)a_\lambda$ als mit $-(a_{\lambda-1} - (\mu+1)a_\lambda)$ zu bezeichnen wäre. Die Entscheidung ist zu Gunsten des letztern Werthes zu treffen, weil nur dieser, der letzten Grenzbestimmung entsprechend, zwischen a_λ und $-(a_{\lambda-1} - a_\lambda)$ liegt. Demnach ist

$$x = (-1)^\lambda\,(a_{\lambda-1} - (\mu+1)a_\lambda)$$

die Länge des nächsten Punktes auf dem Kreise a_0.

Nachdem also der Umfang von a_0 in Theile von der Grösse $a_{\lambda-1}-\mu a_\lambda$ und a_λ zerfallen war, wo μ eine der Zahlen $0, 1, \ldots (n_\lambda - 1)$, entsteht ein neuer Theil am Nullpunkt gleich $a_{\lambda-1}-(\mu+1)a_\lambda$, d. h. gleich der Differenz der bisherigen. Diese Theile werden am einfachsten als Bestandtheile des Kreises $a_{\lambda-1}$ betrachtet, wenn sie ihrer Grösse nach verglichen werden sollen. Es zeigt sich, dass nur für $\mu + 1 = n_\lambda$ der entstandene Theil kleiner als die bisherigen, nämlich $= a_{\lambda+1}$, wird, folglich sind die Minima der absoluten Werthe von $qa_1 - pa_0$ durch $a_{\lambda+1}$ $(\lambda = 0, 1, 2, \ldots)$ dargestellt.

§ 3.

Independente Construction der Eckpunkte. Die Sätze über Näherungswerthe eines Kettenbruchs.

Ist das Sehnenpolygon in dem Kreise a_0 beliebig weit fortgeschritten, so wollen wir für jeden der dann gerade vorhandenen Abstände benachbarter Eckpunkte eine bestimmte Richtung festsetzen. Ist der betreffende Theil von der Grösse $a_{\lambda-1} - \mu a_\lambda$ $(\mu < n_\lambda)$, so denken wir uns denselben längs der Peripherie verschoben, bis er mit dem zuerst am Nullpunkt entstandenen Theile von gleicher Grösse aus der Reihe (I) zusammenfällt. Er erstreckt sich dann vom Nullpunkt nach der positiven oder negativen Seite, je nachdem λ gerade oder ungerade ist. Der in den Nullpunkt gerückte Punkt soll als Anfangspunkt, der andere als Endpunkt des Theiles auch dann noch gelten, wenn dieser seine natürliche Stellung wieder eingenommen hat.

Nunmehr lässt sich leicht die fortschreitende Entwicklung des Punktsystems auf dem Kreise a_0 verfolgen. Wir nehmen an, derselbe sei bereits in Theile von der Grösse $a_{\lambda-1}$ und a_λ zerlegt. Da dann durch die nächste Sehne der Eckpunkt $(-1)^\lambda (a_{\lambda-1} - a_\lambda)$ entstehen würde, zu dem vom Anfangspunkt aus $(N_{\lambda-1} + N_\lambda)$ Sehnen führen, so besteht das Polygon erst aus $(N_{\lambda-1}+N_\lambda-1)$ Sehnen. Wächst nun die Anzahl derselben auf q, so kann man setzen $q = q' + N_\lambda$, und es liegt der Endpunkt der letzten in der Nähe des zu der Nummer q' gehörenden früheren Punktes, er ist gegen diesen um $(-1)^{\lambda-1} a_\lambda$ verschoben. Es können aber nicht alle früheren Punkte diese Verschiebung erleiden, nämlich diejenigen nicht, welche dadurch mit schon vorhandenen Punkten zusammenfallen würden, weil sich ja dann das Polygon schlösse. Folglich werden zunächst nur Theile von der Grösse $a_{\lambda-1}$ durch Einschaltung der neuen Punkte weiter zerlegt, wobei a_λ auf dem Theile $a_{\lambda-1}$ von dessen Endpunkt her abgetragen wird. Erst wenn dies auf jedem Theile $a_{\lambda-1}$ einmal geschehen ist, kann auf einem von ihnen zum zweiten Male von seinem Endpunkt her die Strecke a_λ abgetragen werden. Denn es darf der Theil $a_\lambda - 2a_{\lambda-1}$ erst dann auf-

treten, wenn die ganze Peripherie in a_λ und $a_\lambda - a_{\lambda-1}$ zerlegt ist. Es wird nun weiter a_λ zum 2^{ten}, 3^{ten}, ... n_λ^{ten} Male von jedem der Theile $a_{\lambda-1}$ weggenommen, so dass schliesslich nur der Rest $a_{\lambda+1}$ übrig bleibt. Dieser tritt zuerst am Nullpunkt auf und ist überall erreicht, wenn die Seitenzahl gleich $N_\lambda + N_{\lambda+1} - 1$ geworden ist.

Es mögen als erstes, zweites, ... λ^{tes} Polygon diejenigen Punktsysteme bezeichnet werden, welche den Kreis a_0 in die Intervalle a_1 und a_2, resp. a_2 und a_3, ... a_λ und $a_{\lambda+1}$ eintheilen. Ist das erste Polygon vollendet, so erhält man das zweite, indem man in jeden Theil a_1 vom Endpunkt aus Strecken von der Grösse a_2 möglichst oft einträgt. Man erhält dann das dritte, indem man jeden Theil a_2 von seinem Endpunkt aus wiederholt um a_3 verkürzt. In Bezug auf den Kreis ist die Richtung, in welcher die Theile abgetragen werden, bald die positive, bald die negative.

Wir sind daher jetzt im Stande, das Punktsystem für ein gewisses Gebiet des Kreises bis zu beliebiger Dichtigkeit gesondert herzustellen, d. h. ohne Vermittelung der auf dem übrigen Kreise belegenen Eckpunkte. Soll z. B. entschieden werden, ob ein gegebener Punkt ε ein Eckpunkt des gehörig weit fortgesetzten Polygons werden kann, so bestimmt man zuerst das Intervall a_1 oder a_2 des ersten Polygons, in welchem ε liegt. Das Intervall a_1 würde mittelst des 2^{ten}, das Intervall a_2 mittelst des dritten Polygons weiter getheilt, und so ε in immer engere Grenzen eingeschlossen, von denen schliesslich eine mit ε zusammenfallen müsste, wenn die oben gestellte Frage bejaht werden sollte. Trifft es sich, dass die Intervalle, in welche ε eingeschlossen wird, der Reihe nach a_1, a_2, a_3 ... sind, so findet die Annäherung an ε abwechselnd von der positiven und von der negativen Seite statt.

Wir werden jetzt auf einige Beziehungen eingehen, die darauf beruhen, dass der Kreisumfang immer gleich der Summe seiner Theile ist.

Zerfällt der Kreis in die Theile a_λ und $a_\lambda + a_{\lambda+1}$, so würde die nächste Sehne des eingeschriebenen Polygons auf das Intervall $a_{\lambda+1}$ am Nullpunkt führen. Da dieses durch $N_{\lambda+1}$ Sehnen erreicht wird, so bestand in dem angegebenen Zeitpunkt das Polygon nur aus $(N_{\lambda+1} - 1)$ Sehnen, deren Endpunkte zusammen mit dem Nullpunkt ein System von $N_{\lambda+1}$ Punkten, also auch ebensoviel Intervalle ergeben. Wären letztere gleich, so wäre $a_0 : N_{\lambda+1}$ ihr Werth, da sie aber ungleich und die kleineren von ihnen gleich a_λ sind, so ist $a_\lambda < \frac{a_0}{N_{\lambda+1}}$.

Nun ist

$$N_\lambda a_1 = Z_\lambda a_0 + (-1)^\lambda a_\lambda$$

also

$$a_1 = \frac{Z_\lambda}{N_\lambda} a_0 + (-1)^\lambda \frac{a_\lambda}{N_\lambda},$$

folglich wird der Werth von a_1 für a_0 als Einheit durch den Bruch $\frac{Z_\lambda}{N_\lambda}$ bis auf den Fehler $\frac{a_\lambda}{N_\lambda}$ ausgedrückt, welcher nach dem vorhergehenden $< \frac{1}{N_\lambda N_{\lambda+1}}$, insonderheit $< \frac{1}{N_\lambda^2}$ ist.

Setzt man das obige aus $N_{\lambda+1}$ Punkten bestehende System weiter fort, so wird jeder grössere Theil $(a_\lambda + a_{\lambda+1})$ in a_λ und $a_{\lambda+1}$ zerlegt, so dass, wenn die Eintheilung des Kreises in a_λ und $a_{\lambda+1}$ vollendet ist, sich der Theil a_λ so oft findet, als vorher überhaupt Theile vorhanden waren, nämlich $N_{\lambda+1}$ mal. Die übrigen Theile sind von der Grösse $a_{\lambda+1}$. Wieviel ihrer sind, ergiebt sich aus der Gesammtzahl aller Theile. Diese ist, da die nächste Sehne den Punkt $(a_\lambda - a_{\lambda+1})$ erreichen müsste, gleich $N_\lambda + N_{\lambda+1}$. Folglich ist N_λ die Anzahl der kleineren Theile, und man hat

$$a_0 = N_{\lambda+1}\, a_\lambda + N_\lambda\, a_{\lambda+1}$$

oder

$$\frac{a_0}{N_\lambda N_{\lambda+1}} = \frac{a_\lambda}{N_\lambda} + \frac{a_{\lambda+1}}{N_{\lambda+1}}.$$

Hier bedeuten die Glieder der rechten Seite die absoluten Werthe der Fehler, die man begeht, wenn man $\frac{a_1}{a_0}$ durch $\frac{Z_\lambda}{N_\lambda}$, resp. $\frac{Z_{\lambda+1}}{N_{\lambda+1}}$ ersetzt, denn es ist

$$\frac{a_\lambda}{N_\lambda} = (-1)^\lambda \left(a_1 - \frac{Z_\lambda}{N_\lambda}\, a_0\right), \quad \frac{a_{\lambda+1}}{N_{\lambda+1}} = (-1)^{\lambda+1} \left(a_1 - \frac{Z_{\lambda+1}}{N_{\lambda+1}}\, a_0\right).$$

Führt man die Näherungswerthe selbst ein, so wird

$$(1) \qquad \frac{1}{N_\lambda N_{\lambda+1}} = (-1)^\lambda \left(\frac{Z_{\lambda+1}}{N_{\lambda+1}} - \frac{Z_\lambda}{N_\lambda}\right).$$

Jetzt sei das Sehnenpolygon bis zur Erreichung des Punktes $a_{\lambda-1} - \mu a_\lambda$ fortgesetzt, wozu $N_{\lambda-1} + \mu N_\lambda$ Sehnen erforderlich sind. Denken wir uns, dass a_1 seinen Werth stetig wachsen oder abnehmen lasse, so werden die Eckpunkte ihre Abstände auf dem Kreise verändern, ihre Reihenfolge aber anfangs beibehalten. Die Theile a_2, $a_2 - \mu a_3$, $a_4 - \mu a_5 \cdots$ werden in entgegengesetztem, dagegen $a_1 - \mu a_2$, a_3, $a_3 - \mu a_4 \cdots$ in gleichem Sinne wie a_1 sich ändern. Man kann daher den Sinn der Aenderung von a_1 so bestimmen, dass $a_{\lambda-1} - \mu a_\lambda$ stetig zu 0 abnimmt. Ist dies erreicht, so schliesst sich das Polygon, jede Ecke kann nun als Anfangspunkt betrachtet werden, alle Abstände sind $= a_\lambda$, ihre Anzahl $= N_{\lambda-1} + \mu N_\lambda$. Geht man zu der ursprünglichen Gestalt des ungeschlossenen Polygons zurück, so findet sich auf dem Kreise immer noch $(N_{\lambda-1} + \mu N_\lambda)$ mal der Abstand a_λ, doch ausserdem als Zwischenraum eine gewisse Anzahl von Malen der Theil $(a_{\lambda-1} - \mu a_\lambda)$. Verwandelt man μ in $\mu + 1$, so wächst das

aus den Intervallen a_λ zusammengesetzte Gebiet der Peripherie um $N_\lambda a_\lambda$, das Ergänzungsgebiet muss um ebensoviel abnehmen, also muss N_λ die Anzahl der eben erwähnten Zwischenräume sein. Folglich ist

$$a_0 = (N_{\lambda-1} + \mu N_\lambda) a_\lambda + N_\lambda (a_{\lambda-1} - \mu a_\lambda).$$

Setzt man zur Abkürzung

$$N_{\lambda-1} + \mu N_\lambda = N_{\lambda,\mu}; \quad Z_{\lambda-1} + \mu Z_\lambda = Z_{\lambda,\mu}; \quad a_{\lambda-1} - \mu a_\lambda = a_{\lambda,\mu},$$

so wird

$$a_0 = N_{\lambda,\mu} a_\lambda + N_\lambda a_{\lambda,\mu},$$

$$\frac{a_0}{N_\lambda N_{\lambda,\mu}} = \frac{a_\lambda}{N_\lambda} + \frac{a_{\lambda,\mu}}{N_{\lambda,\mu}}.$$

Es ist aber

$$N_{\lambda,\mu} a_1 = Z_{\lambda,\mu} a_0 + (-1)^{\lambda-1} a_{\lambda,\mu}$$

oder

$$a_1 - \frac{Z_{\lambda,\mu}}{N_{\lambda,\mu}} a_0 = (-1)^{\lambda-1} \frac{a_{\lambda,\mu}}{N_{\lambda,\mu}}$$

so dass die rechte Seite der obigen Gleichung aus den Fehlern der Näherungswerthe $\frac{Z_\lambda}{N_\lambda}$ und $\frac{Z_{\lambda,\mu}}{N_{\lambda,\mu}}$ besteht. Setzt man für die Differenz der Fehler die Differenz der Näherungswerthe selbst, so wird:

$$\frac{1}{N_\lambda N_{\lambda,\mu}} = (-1)^{\lambda-1} \left(\frac{Z_\lambda}{N_\lambda} - \frac{Z_{\lambda,\mu}}{N_{\lambda,\mu}} \right). \tag{2}$$

Wenn man in der Gleichung, die a_0 durch a_λ und $a_{\lambda,\mu}$ ausdrückt, den Theil a_λ gleich der Differenz von $a_{\lambda,\mu}$ und $a_{\lambda,\mu+1}$ setzt, so nimmt sie die Form an

$$a_0 = N_{\lambda,\mu+1} a_{\lambda,\mu} - N_{\lambda,\mu} a_{\lambda,\mu+1}$$

welche weiter auf

$$\frac{1}{N_{\lambda,\mu} N_{\lambda,\mu+1}} = (-1)^{\lambda-1} \left(\frac{Z_{\lambda,\mu+1}}{N_{\lambda,\mu+1}} - \frac{Z_{\lambda,\mu}}{N_{\lambda,\mu}} \right) \tag{3}$$

führt. Die in dieser Formel vorkommenden beiden Näherungswerthe liegen auf derselben Seite des wahren Werthes, während sie in den beiden vorhergehenden Formeln ihn einschlossen.

§ 4.

Die grösste in einem Vielfachen von $a_1 : a_0$ enthaltene ganze Zahl.

Wir wenden uns nun zu der Aufgabe, das grösste in $q \cdot a_1$ enthaltene Vielfache von a_0 zu bestimmen, wenn q eine gegebene ganze Zahl ist. Dasselbe sei $p \cdot a_0$, so dass

$$q a_1 = p a_0 + \varepsilon \qquad (\varepsilon < a_0).$$

Man bestimme einen solchen Index λ, dass

$$N_\lambda < q < N_\lambda + N_{\lambda+1},$$

was immer auf eine oder zwei Arten möglich ist. Dann wird der Eckpunkt des Sehnenpolygons, welcher $q a_1$ darstellt, später erreicht als der Punkt $\pm a_\lambda$, zu welchem N_λ Sehnen führen. Bei der Fortsetzung des Polygons über $(\pm a_\lambda)$ hinaus ist die erste Ecke, die zwischen $(\pm a_\lambda)$ und den Nullpunkt fällt, gegeben durch $\pm(a_\lambda - a_{\lambda+1})$, zu dieser gehören $N_\lambda + N_{\lambda+1}$ Sehnen. Folglich liegt der Punkt $q a_1$ ausserhalb der Strecke $0 \cdots \pm a_\lambda$.

Es sei

$$q = N_\lambda + q',$$

ferner

$$q' a_1 = p' a_0 + \varepsilon' \qquad (\varepsilon' < a_0);$$

dann folgt aus

$$q a_1 - N_\lambda a_1 = q' a_1$$

die Gleichung

$$p a_0 + \varepsilon - Z_\lambda a_0 + (-1)^\lambda a_\lambda = p' a_0 + \varepsilon'.$$

Ist λ ungerade, so ist $\varepsilon > a_\lambda$, also $0 < \varepsilon + (-1)^\lambda a_\lambda < a_0$, es bestehen daher beide Seiten aus einem Vielfachen von a_0 und einem Reste, der $< a_0$ ist. Die gesonderte Gleichsetzung beider Theile ergiebt

$$p = Z_\lambda + p', \qquad \varepsilon = (-1)^{\lambda+1} a_\lambda + \varepsilon'.$$

Ist λ gerade, so erreicht man, vom Nullpunkt aus den Kreis a_0 in positiver Richtung durchlaufend, zuerst den Punkt ε, dann den Punkt $(-a_\lambda)$, also ist $\varepsilon + a_\lambda < a_0$, man gelangt daher auch hier durch Zerlegung der Gleichung zu dem obigen Resultat.

Die Aufgabe ist also von dem gegebenen Werthe von q auf einen kleineren $q' \geqq 1$ zurückgeführt. Mit q' kann man dieselbe Reduction vornehmen

$$q' = N_\mu + q'', \; p' = Z_\mu + p'', \; \varepsilon' = (-1)^{\mu+1} a_\mu + \varepsilon'',$$

wo $\mu \leqq \lambda$ sein wird. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens gelangt man schliesslich auf $q = 1 = N_1$, dann ist $p = 0 = Z_1$, $\varepsilon = a_1$. Es wird dann

$$q = N_\lambda + N_\mu + \cdots + N_1; \quad p = Z_\lambda + Z_\mu + \cdots + Z_1;$$
$$\varepsilon = (-1)^{\lambda+1} a_\lambda + (-1)^{\mu+1} a_\mu + \cdots + a_1.$$

Ist q selbst oder einer der Werthe $q', q'', \cdots$ gleich einem Näherungsnenner N_μ, so ist es nicht nöthig, das Verfahren weiter fortzusetzen, denn aus $q a_1 = Z_\mu a_0 + (-1)^{\mu+1} a_\mu$ folgt, wenn μ ungerade:

$$p = Z_\mu, \qquad \varepsilon = a_\mu$$

wenn μ gerade:

$$p = Z_\mu - 1, \quad \varepsilon = a_0 - a_\mu.$$

Indem man dies benutzt, lässt sich an Stelle des obigen allgemeinen Verfahrens die folgende bestimmte Vorschrift setzen:

Man dividirt q durch den grössten Näherungsnenner N_λ, der $< q$ ist, der Quotient sei h_λ. Den Rest dividirt man durch $N_{\lambda-1}$, der Quotient sei $h_{\lambda-1}$. In dieser Weise fährt man fort, bis nach Division durch einen Näherungsnenner N_μ, spätestens N_1, der Rest 0 erscheint. Dann ist

$$\begin{aligned} q &= h_\lambda N_\lambda + h_{\lambda-1} N_{\lambda-1} + \cdots + h_\mu N_\mu, \\ \varpi &= h_\lambda Z_\lambda + h_{\lambda-1} Z_{\lambda-1} + \cdots + h_\mu Z_\mu, \\ \varepsilon &= (-1)^{\lambda+1} h_\lambda a_\lambda + (-1)^\lambda h_{\lambda-1} a_{\lambda-1} + \cdots + (-1)^{\mu+1} h_\mu a_\mu, \\ q a_1 &= \varpi a_0 + \varepsilon. \end{aligned}$$

Ist μ ungerade, so wird $p = \varpi$, ist μ gerade, so wird $p = \varpi - 1$.

Es sei $a_0 = 268$, $a_1 = 117$, $q = 258$

λ	0	1	2	3	4	5	6	7
a	268	117	34	15	4	3	1	0
n		2	3	2	3	1	3	∞
Z	1	0	1	3	7	24	31	117
N	0	1	2	7	16	55	71	268

$$\begin{aligned} q &= 3 \cdot 71 + 45,\ 45 = 2 \cdot 16 + 13,\ 13 = 1 \cdot 7 + 6,\ 6 = 3 \cdot 2, \\ q &= 3 \cdot N_6 + 0 \cdot N_5 + 2 \cdot N_4 + 1 \cdot N_3 + 3 \cdot N_2 + 0 \cdot N_1 \\ &= [0, 3, 1, 2, \ldots 0, 3](N). \end{aligned}$$

Die in eckigen Klammern stehenden Zahlen sind als Coefficienten von $N_1, N_2, N_3, \cdots$ zu betrachten. Entsprechend sollen lineare homogene Functionen von $Z_1, Z_2, Z_3, \cdots$ sowie von $a_1, -a_2, a_3, -a_4, \cdots$ durch Angabe ihrer Coefficienten unter Hinzufügung des Symbols (Z) resp. $(\pm a)$ abgekürzt bezeichnet werden. Damit ist

$$\begin{aligned} \varpi = [0, 3, 1, 2, 0, 3](Z) &= 0 \cdot Z_1 + 3 Z_2 + Z_3 + 2 Z_4 + 0 Z_5 + 3 Z_6 \\ &= 113 \end{aligned}$$

und

$$p = \varpi - 1 = 112$$

weil in $[0, 3, 1, 2, 0, 3]$ der erste nicht verschwindende Coefficient an gerader Stelle steht. In der That wird

$$\begin{aligned} \varepsilon = [0, 3, 1, 2, 0, 3](\pm a) &= 0 \cdot a_1 - 3 a_2 + a_3 - 2 a_4 + 0 a_5 - 3 a_6 \\ &= -98, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q a_1 &= 113 \cdot a_0 - 98 \\ &= 112 \cdot a_0 + 170. \end{aligned}$$

In dem dargestellten Verfahren bildete die Betrachtung der Punkte $(\pm a_\lambda)$, in welchen der absolute Betrag von $qa_1 - pa_0$ seine kleinsten Werthe annimmt, die Grundlage. Ein anderer Weg führt über diejenigen Punkte, in welchen die positiven Werthe von $qa_1 - pa_0$ der Reihe nach kleiner werden als für kleinere Werthe von q. Diese Punkte sind die der oberen Reihe des Systems (I), nämlich

$$a_1, a_{2,\mu}, a_3, a_{4,\mu}, a_5 \cdots (= K_\lambda).$$

Die zugehörige Sehnenzahl sowie die Zahl der zurückgelegten vollen Kreisumfänge sind:

$$N_1, N_{2,\mu}, N_3, N_{4,\mu}, N_5 \cdots (= V_\lambda),$$
$$Z_1, Z_{2,\mu}, Z_3, Z_{4,\mu}, Z_5 \cdots (= U_\lambda).$$

Die Glieder dieser drei Reihen werden wir fortlaufend von 1 an numeriren und resp. mit K, V, U bezeichnen.

Zu gegebenem q lässt sich der Index λ eindeutig aus der Bedingung

$$V_\lambda \leqq q < V_{\lambda+1}$$

bestimmen. Der zu qa_1 gehörende Punkt ε des Sehnenpolygons liegt dann jedenfalls nicht innerhalb der Strecke $0 \cdots K_\lambda$, denn der nächste positive Abstand eines Eckpunktes vom Nullpunkt, der kleiner wäre als K_λ, ist $K_{\lambda+1}$ und wird erst durch $V_{\lambda+1}$ Sehnen erreicht. Ist

$$q = V_\lambda + q',$$

so folgt aus $qa_1 - V_\lambda a_1 = q'a_1$ die Gleichung:

$$pa_0 + \varepsilon - U_\lambda a_0 - K_\lambda = p'a_0 + \varepsilon'.$$

Hier darf man die mit a_0 multiplicirten und die übrigen Glieder für sich einander gleich setzen, so dass

$$p = V_\lambda + p', \qquad \varepsilon = K_\lambda + \varepsilon'.$$

Damit ist die Bestimmung von p aus q auf diejenige von p' aus q' zurückgeführt. Hieraus ergiebt sich folgende Vorschrift:

Man dividire q durch den grössten Näherungsnenner V_λ, der $< q$ ist, der Quotient sei t_λ, dann dividire man den Rest durch $V_{\lambda-1}$, der Quotient sei $t_{\lambda-1}$, u. s. w., bis man den Rest 0 erhält. Dadurch wird:

$$\begin{aligned} q &= t_1 V_1 + t_2 V_2 + \cdots + t_{\lambda-1} V_{\lambda-1} + t_\lambda V_\lambda \\ &= [t_1, t_2, \cdots, t_\lambda](V). \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} p &= t_1 U_1 + t_2 U_2 + \cdots + t_{\lambda-1} U_{\lambda-1} + t_\lambda U_\lambda \\ &= [t_1, t_2, \cdots, t_\lambda](U), \\ \varepsilon &= t_1 K_1 + t_2 K_2 + \cdots + t_{\lambda-1} K_{\lambda-1} + t_\lambda K_\lambda \\ &= [t_1, t_2, \cdots, t_\lambda](K). \end{aligned}$$

Für das obige Beispiel ergiebt sich

	1			3			5			7
K	117	83	49	15	11	7	3	2	1	0
U	0	1	2	3	10	17	24	55	86	117
V	1	3	5	7	23	39	55	126	197	268

Die mit 1, 3, 5 überschriebenen Columnen sind aus dem vorigen für a, Z, N geltenden Schema entnommen. Die Zwischenglieder sind nach Differenzen eingeschaltet, welche durch die nicht übernommenen Columnen angegeben werden.

$$q = 258 = 197 + 55 + 5 + 1 = [1;\ 0, 1, 0;\ 0, 0, 1;\ 0, 1](V),$$
$$\varpi = p = [1;\ 0, 1, 0;\ 0, 0, 1;\ 0, 1](U) = 112,$$
$$\varepsilon = [1;\ 0, 1, 0;\ 0, 0, 1;\ 0, 1](K) = 170,$$
$$q \cdot a_1 = 112\, a_0 + 170.$$

Wir wollen hieran eine Betrachtung schliessen über den Bereich der Werthe, welche die Coefficienten $t_1, t_2, \cdots, t_\lambda$ annehmen können. Aus der Reihe V ergiebt sich, dass irgend ein Glied, V_λ, in dem nächst grösseren $V_{\lambda+1}$ mindestens 1 mal, daher allgemein $\tau_\lambda + 1$ mal, enthalten ist, und dass der Ueberschuss von $V_{\lambda+1}$ über das grösste in ihm enthaltene Vielfache von V_λ mit der Differenz des letzteren Gliedes und des nächst kleineren, $V_{\lambda-1}$, übereinstimmt. Für

$$V_\lambda = N_1 \quad N_1 + N_2 \quad N_1 + 2N_2 \cdots N_1 + (n_2 - 1) N_2 \quad N_3 \quad N_3 + N_4 \cdots$$

wird

$$\tau_\lambda = n_1 \qquad 0 \qquad 0 \qquad \cdots \qquad 0 \qquad n_3 \qquad 0 \qquad \cdots$$

nämlich für $V = N_\mu$ wird $\tau = n_\mu$, für die intermediären Glieder wird $\tau = 0$. Es ist also

$$V_{\lambda+1} - (\tau_\lambda + 1) V_\lambda = V_\lambda - V_{\lambda-1}$$

oder

$$V_{\lambda+1} - V_\lambda = \tau_\lambda V_\lambda + (V_\lambda - V_{\lambda-1})$$

ebenso

$$V_\lambda - V_{\lambda-1} = \tau_{\lambda-1} V_{\lambda-1} + (V_{\lambda-1} - V_{\lambda-2})$$

endlich

$$V_2 - V_1 \quad = \tau_1 V_1$$

woraus

$$V_{\lambda-1} - V_\lambda = \tau_\lambda V_\lambda + \tau_{\lambda-1} V_{\lambda-1} + \cdots + \tau_1 V_1,$$
$$V_{\lambda+1} = [\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_{\lambda-1}, \tau_\lambda + 1](V).$$

Ist nun $q < V_{\lambda+1}$ und ergiebt sich bei der Division von q durch V_λ für t_λ der Maximalwerth $(\tau_\lambda + 1)$, so ist der Rest $< V^\lambda - V_{\lambda-1}$,

in diesem ist daher $V_{\lambda-1}$ höchstens $\tau_{\lambda-1}$ mal enthalten. Im allgemeinen ist dagegen ein Rest nur $< V_\lambda$, und kann für $t_{\lambda-1}$ den Werth $\tau_{\lambda-1}+1$ erforderlich machen.

Hat dann $t_{\lambda-1}$ den grössten ihm nach dem vorigen gestatteten Werth, d. h. je nach den Umständen $\tau_{\lambda-1}$ oder $\tau_{\lambda-1}+1$, so ist der grösste Werth von $t_{\lambda-2}$ gleich $\tau_{\lambda-2}$, anderen Falles ist $(\tau_{\lambda-2}+1)$ das Maximum von $t_{\lambda-2}$.

Hat überhaupt der Coefficient t_μ den grössten der Werthe, die er nach der Beschaffenheit von $t_{\mu+1}, \cdots, t_{\lambda-1}, t^\lambda$ annehmen kann, so ist das Maximum von $t_{\mu-1}$ um 1 kleiner als das absolute Maximum.

Hieraus ergiebt sich, dass der Bereich der Coefficienten $[t_1, t_2, \cdots]$ aus dem Gebiet $t_\lambda = 0, 1 \cdots \tau_\lambda$ ohne Einschränkung besteht, dass aber $t_\lambda = \tau_\lambda + 1$ nur bedingungsweise zulässig ist. Es sei t_μ von der rechten Seite aus der erste Coefficient, dessen Werth das absolute Maximum $\tau_\mu + 1$ ist. Hat dann auch $t_{\mu-1}$ seinen grössten Werth $\tau_{\mu-1}$, so ist das Maximum von $t_{\mu-2}$ gleich $t_{\mu-2}$ u. s. w. Es sei t_ν von diesen Coefficienten der erste, dessen Werth kleiner als das relative Maximum τ_ν sei. Dann hat der Coefficient $t_{\nu-1}$ als grössten Werth das absolute Maximum $\tau_{\nu-1}+1$, und wenn er unterhalb desselben bleibt, so überträgt er auf seinen Nachbar die Möglichkeit, das absolute Maximum zu erreichen.

Ist also t_ϱ der erste Coefficient links von t_μ, der wieder den absolut grössten seiner Werthe wirklich annimmt, so muss zwischen t_μ und t_ϱ mindestens ein Coefficient t_ν existiren, der $< \tau_\nu$ ist.

Soll diese nothwendige Bedingung zu einer hinreichenden ergänzt werden, so hat man noch festzusetzen, dass für t_1 das absolute Maximum auf die Zahl τ_1, das relative auf $\tau_1 - 1$, beschränkt wird, also beide um eine Einheit verkleinert werden. Ist man nämlich bei der Darstellung von q bis auf einen Rest $q' < V_2$ resp. $V_2 - V_1$ gekommen, so ist derselbe mindestens um 1 kleiner als diese Grenzen, also wird, da $V_1 = 1$, $q' \leq V_2 - V_1$, resp. $V_2 - 2V_1$, und es kann q' mittelst der Coefficienten $\tau_1 - 1$, resp. $\tau_1 - 2$ erschöpft werden.

Will man von der Darstellung der Zahl q durch $[t_1\, t_2 \cdots](V)$ zu derjenigen von $q-1$ übergehen, so hat man im allgemeinen nur den ersten Coefficienten t_1 um eine Einheit zu vermindern. Ist derselbe 0, so sei t_μ der erste Coefficient, welcher nicht verschwindet, so dass:

$$q = [0, 0, \cdots, 0, t_\mu \cdots t_\lambda](V),$$

dann ist auch

$$q = [\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_{\mu-1}+1, t_\mu - 1, t_{\mu+1}, \cdots, t_\lambda](V),$$

folglich

$$q - 1 = [\tau_1 - 1, \tau_2 \cdots \tau_{\mu-1}+1, t_\mu - 1, t_{\mu+1}, \cdots, t_\lambda](V).$$

Dieser Ausdruck hat wieder die Normalform, wenn der erste für q dieselbe hatte.

Man kann endlich noch zur Bestimmung der Zahl p ausser den bis jetzt entwickelten Methoden die Reihe der Punkte benutzen, in denen $q a_1 - p a_0$ bei negativem Werthe sich der Null stärker als für alle vorhergegangenen Werthe von q annähert. Die absoluten Werthe dieser Minima sind durch die untere Reihe von (I) dargestellt, nämlich

$$a_{1,\mu},\ a_2,\ a_{3,\mu},\ a_4,\ a_{5,\mu}\ \cdots\quad (=k_\lambda).$$

Dazu gehört als Sehnenzahl und als Zahl der nahezu erfüllten vollen Kreisumfänge

$$N_{1,\mu},\ N_2,\ N_{3,\mu},\ N_4,\ N_{5,\mu}\cdots\quad (=v_\lambda),$$
$$Z_{1,\mu},\ Z_2,\ Z_{3,\mu},\ Z_4,\ Z_{5,\mu}\cdots\quad (=u_\lambda).$$

Die Glieder dieser Reihen bezeichnen wir mit k, v, u und numeriren sie fortlaufend von 1 an. Das dem vorigen vollständig analoge Verfahren führt auf die kleinste ganze Zahl ϖ, welche grösser als $q a_1 : a_0$ ist, so dass $p = \varpi - 1$ wird. Die Berechnung des obigen Beispiels diene zur Erläuterung.

	0		2		4	6	
k	268	151	34	19	4	1	1
u	1	1	1	4	7	31	$31 + 117\mu$
v	0	1	2	9	16	71	$71 + 268\mu$

$$q = 258 = 3\cdot 71 + 2\cdot 16 + 1\cdot 9 + 2\cdot 2$$
$$= [0, 2;\ 1, 2;\ 3](v),$$
$$\varpi = p + 1 = [0, 2;\ 1, 2;\ 3](u) = 113,$$
$$\varepsilon = [0, 2;\ 1, 2;\ 3](-k) = -98,$$
$$q\cdot a_1 = 113 a_0 - 98.$$

Die beiden letzten Methoden, mittelst der Reihe (K_λ) das nächst kleinere Vielfache $p a_0$ oder mittelst der Reihe (k_λ) das nächst grössere $(p+1)a_0$ zu bestimmen, lassen sich beliebig combiniren. Man reducirt q zunächst mittelst der Reihe (V_λ) auf einen gewissen Werth q', diesen mittelst der Reihe v_λ auf q'', u. s. f., bis man zu 0 gelangt. Wie q aus den angewandten Gliedern der Reihen (V) und (v), so lässt sich ϖ aus den entsprechenden Gliedern (U) und (u) zusammensetzen. Ob ϖ als p oder als $p+1$ aufzufassen ist, hängt davon ab, ob das zuletzt benutzte Glied der ersten oder zweiten Reihe angehörte.

Bestimmt man die Zahl p mittelst der Reihen $N_1, N_2, N_3, \cdots$ und $Z_1, Z_2, Z_3, \cdots$ nach dem zuerst angegebenen Verfahren, so werden

diese Reihen nur bis zu dem Index λ benutzt, wenn $q < N_{\lambda+1}$ ist. Demnach bleibt p ungeändert, wenn man unter Beibehaltung von $n_1, n_2, \cdots, n_\lambda$ die Grösse a_λ zu 0 abnehmen lässt. Dann folgt aus der Gleichung $N_\lambda a_1 = Z_\lambda a_0 - (-1)^\lambda a_\lambda$, dass $\frac{a_1}{a_0} = \frac{Z_\lambda}{N_\lambda}$ geworden ist. Man kann also, indem man a_0 als Einheit ansieht, die Grösse a_1 resp. durch $\frac{Z_1}{N_1}, \frac{Z_2}{N_2}, \cdots$ ersetzen, wenn q resp. $< N_2, N_3, \cdots$ ist.

Da $\frac{Z_\mu}{N_\mu}$ von $\frac{a_1}{a_0}$ um weniger als N_μ^{-2} verschieden ist, so wird $q \cdot \frac{a_1}{a_0}$ durch $q \frac{Z_\mu}{N_\mu}$ mit einem Fehler < 1 ausgedrückt, wenn man μ nur so gross wählt, dass $N_\mu > \sqrt{q}$. Wenngleich hierdurch nicht bedingt wird, dass die Zahlen $q \frac{Z_\mu}{N_\mu}$ und $q \frac{a_1}{a_0}$ gleich viel Ganze enthalten, so wird dieser Fall doch sehr häufig eintreten. Es empfiehlt sich daher, die grösste in $q \cdot \frac{Z_\mu}{N_\mu}$ enthaltene ganze Zahl, zugleich aber auch die grösste in $q \frac{Z_{\mu+1}}{N_{\mu+1}}$ enthaltene bestimmen. Erhält man nach einer der angegebenen Methoden für beide denselben Werth, so hat man damit auch die Aufgabe für $q \cdot a_1$ gelöst.

Es sei z. B. $\sqrt{2}$ auf 3 Decimalstellen, ohne Abrundung der letzten, zu bestimmen. Für $a_0 = 1$, $a_1 = \sqrt{2} - 1$ erhält man:

λ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Z	0	1	2	5	12	29	70	169	408	985
N	1	2	5	12	29	70	169	408	985	2378

Da $q = 1000$, so ist $N_\mu = 70 > \sqrt{q}$. Man bestimme daher die grösste in $q \cdot x$ enthaltene ganze Zahl für $x = \frac{29}{70}$.

$$1000 = 14 \cdot 70 + 12 + 5 + 2 + 1,$$
$$p = 14 \cdot 29 + 5 + 2 + 1 + 0 = 414.$$

Dasselbe Verfahren, angewandt auf $x = \frac{70}{169}$; ergiebt

$$1000 = 5 \cdot 169 + 2 \cdot 70 + 12 + 2 + 1,$$
$$p = 5 \cdot 70 + 2 \cdot 29 + 5 + 1 + 0 = 414.$$

Folglich ist $\sqrt{2} - 1 = 0{,}414$. In der That hätte sich auch für $x = a_1$ ergeben

$$1000 = 985 + 12 + 2 + 1,$$
$$p = 408 + 5 + 1 + 0 = 414.$$

§ 5.

Die durch Näherungsbrüche von gegebenem Nenner erreichbare Genauigkeit.

Aus der Gleichung

$$V_\lambda a_1 = U_\lambda a_0 + K_\lambda$$

folgt

$$\frac{U_\lambda}{V_\lambda} a_0 = a_1 - \frac{K_\lambda}{V_\lambda}.$$

Mit wachsendem λ nimmt K_λ ab und V_λ zu, folglich nähern sich die Brüche $\frac{U_\lambda}{V_\lambda}$ wachsend dem Werthe $\frac{a_1}{a_0}$.

Aus der Gleichung

$$v_\lambda a_1 = u_\lambda a_0 - k_\lambda$$

folgt entsprechend

$$\frac{u_\lambda}{v_\lambda} a_0 = a_1 + \frac{k_\lambda}{v_\lambda}$$

so dass die Brüche $\frac{u_\lambda}{v_\lambda}$ sich abnehmend dem Werthe $\frac{a_1}{a_0}$ nähern.

Wir können daher $\left(\frac{U}{V}\right)$ als die Reihe der zunehmenden, $\left(\frac{u}{v}\right)$ als die der abnehmenden Näherungsbrüche bezeichnen, während $\left(\frac{Z}{N}\right)$ die Reihe der Hauptnäherungsbrüche bilde.

Stellt man die Werthe der Brüche auf einer Abscissenaxe dar, so erhält man folgende Reihe von Punkten

$$(0) \quad \frac{U_1}{V_1} \; \frac{U_2}{V_2} \cdots \frac{a_1}{a_0} \cdots \frac{u_2}{v_2} \; \frac{u_1}{v_1} \quad (\infty)$$

und wenn man den Anfangspunkt in den Punkt mit der Abscisse $\frac{a_1}{a_0}$ verlegt:

$$-\frac{K_1}{V_2} \; -\frac{K_2}{V_2} \cdots 0 \cdots \frac{k_2}{v_2} \; \frac{k_1}{v_1}.$$

In der Reihe $\frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \frac{3}{q} \cdots$ giebt es zwei benachbarte Brüche, welche den Werth $\frac{a_1}{a_0}$ einschliessen. Aus der Gleichung $q a_1 = p a_0 + \varepsilon$ folgt, dass dies die Brüche $\frac{p}{q}$ und $\frac{p+1}{q}$ sind. Zähler und Nenner des ersten sind als lineare Functionen von (U_λ) und (V_λ), des letzteren als solche von (u_λ) und (v_λ) dargestellt.

Ist nämlich $q < V_\lambda$, so ist folgendes der dem Verhältniss $a_1 : a_0$ abwärts benachbarte Bruch vom Nenner q:

$$\frac{p}{q} = \frac{[t_1 t_2 \dots t_{\lambda-1}](U)}{[t_1 t_2 \dots t_{\lambda-1}](V)}.$$

Dieser stellt den wahren Werth mit dem Fehler dar

$$\eta = \frac{\varepsilon}{q} = \frac{[t_1 t_2 \dots t_{\lambda-1}](K)}{[t_1 t_2 \dots t_{\lambda-1}](V)}.$$

Unter den Coefficienten t können auch solche vom Werthe 0 vorkommen, es sei daher t_α der erste, t_β der letzte von denen, die von 0 verschieden sind, so dass

$$\eta = \frac{t_\alpha K_\alpha + t_{\alpha+1} K_{\alpha+1} + \dots + t_\beta K_\beta}{t_\alpha V_\alpha + t_{\alpha+1} V_{\alpha+1} + \dots + t_\beta V_\beta}.$$

Denkt man sich die Masse t_λ in dem Punkte, dessen Coordinaten (K_λ, V_λ) sind, für $\lambda = \alpha, \alpha+1 \cdots \beta$, so sind Zähler und Nenner von η die Coordinaten des Schwerpunkts dieser Punkte. Hieraus erkennt man, dass η zwischen dem grössten und dem kleinsten der Brüche $\frac{K_\alpha}{V_\alpha}, \frac{K_{\alpha+1}}{V_{\alpha+1}} \cdots \frac{K_\beta}{V_\beta}$ liegt, folglich $> \frac{K_\beta}{V_\beta}$ und um so mehr $> \frac{K_{\lambda-1}}{V_{\lambda-1}}$ ist. Reducirt sich die Reihe der Coefficienten t auf ein Glied t_α, so wird $\eta = \frac{t_\alpha K_\alpha}{t_\alpha V_\alpha} = \frac{K_\alpha}{V_\alpha}$ für $q = t_\alpha V_\alpha < V_{\alpha+1}$.

Ist also der gegebene Nenner q kleiner als V_λ, so ist der Fehler des Bruches $\frac{p}{q}$, welcher dem Verhältniss $a_1 : a_0$ abwärts benachbart ist, $\geqq \frac{K_{\lambda-1}}{V_{\lambda-1}}$, diese Grösse selbst ist das Minimum des Fehlers. Ist daher der Unterschied zwischen irgend einem abwärts benachbarten Bruche und dem wahren Werthe kleiner als $\frac{K_{\lambda-1}}{V_{\lambda-1}}$, so muss der Nenner q desselben $\geqq V_\lambda$ sein.

Hieraus geht hervor, dass ebenso wie die Reihe $K_1, K_2 \dots$ die Minima der positiven Werthe angiebt, deren der Ausdruck

$$\varepsilon = q a_1 - p a_0 < a_0$$

für wachsende q fähig ist, so die Reihe $\frac{K_1}{V_1}, \frac{K_2}{V_2}, \cdots$ vollzählig die Minima der positiven Werthe angiebt, welche $\eta = a_0\left(\frac{a_1}{a_0} - \frac{p}{q}\right) < \frac{a_0}{q}$ für wachsendes q annimmt. Jedoch besteht ein Unterschied in folgendem: Die Grösse ε wird einen solchen Werth, der kleiner war als ihre bisherigen Werthe, fernerhin nicht noch einmal annehmen, da sonst das Sehnenpolygon sich schlösse, dagegen kann η zu einem Werthe, der

für $q = V_{\lambda-1}$ ein Minimum war, für $q = t\,V_{\lambda-1}$ zurückkehren, wenn $t\,V_{\lambda-1} < V_\lambda$ ist.

Die oben erwähnte Reihe von Massenpunkten (K_1, V_1), (K_2, V_2),... liegt auf einer gebrochenen Linie, deren Eckpunkte (a_1, N_1), (a_3, N_3)... sind, während auf ihren geradlinigen Theilen die intermediären Werthe $(a_{2,\mu}, N_{2,\mu})$, resp. $(a_{4,\mu}, N_{4,\mu})$ durch äquidistante Punkte dargestellt sind. Die Neigungswinkel ihrer einzelnen Theile haben die Tangenten $\frac{a_2}{N_2}$, $\frac{a_4}{N_4}$ . . ., nehmen also beständig ab, so dass die ganze Linie gegen den Nullpunkt convex ist. Im Allgemeinen sind den Eckpunkten Massen $\leq n_1, n_3, n_5$,... zuzuschreiben, während die Zwischenpunkte die Masse 0 haben, es können jedoch, unter gewissen oben näher angegebenen Bedingungen, sämmtliche Punkte dieses Maass um 1 überschreiten.

Man könnte noch eine andere Reihe von Massenpunkten (U_1, V_1), (U_2, V_2) . . . betrachten, welche durch die wachsenden Tangenten der Neigungswinkel ihrer Radienvectoren die Näherungswerthe selbst darstellten. Diese Punktreihe liegt auf einer gebrochenen Linie, deren Theile abnehmende Neigungswinkel haben, welche zu den Tangenten $\frac{Z_2}{N_2}$, $\frac{Z_4}{N_4}$ . . . gehören. Sie hat die vom Anfangspunkt durch den Punkt (a_1, a_0) gezogene Gerade zur Asymptote. Jeder abwärts benachbarte Bruch $\frac{p}{q}$ lässt sich durch die Neigung eines Radiusvectors darstellen, welcher den Anfangspunkt mit dem Schwerpunkt einer ausgewählten Punktmenge verbindet.

Dieselben Betrachtungen lassen sich auf die Reihe $\left(\frac{u}{v}\right)$ der abnehmenden Näherungsbrüche anwenden. Wenn $q < v_\mu$, so ist der Fehler des aufwärts benachbarten Bruches $\frac{p+1}{q}$ immer $\geq \frac{k_{\mu-1}}{v_{\mu-1}}$. Liegt daher der Fehler eines derartigen Bruches unterhalb der Grenze $\frac{k_{\mu-1}}{v_{\mu-1}}$, so ist $q \geq v_\mu$. Hieraus folgert man, dass ebenso wie die Grössen $k_1, k_2, \ldots$ die sämmtlichen Minima des Betrages der negativen Werthe von $\varepsilon = q a_1 - (p+1)a_0 > -a_0$ darstellen, so auch die Brüche $\frac{k_1}{v_1}$, $\frac{k_2}{v_2}$ . . . die sämmtlichen bei wachsendem q allmählich auftretenden Minima des Betrages von $\eta = a_0\left(\frac{a_1}{a_0} - \frac{p+1}{q}\right) > -\frac{a_0}{q}$ darstellen. In der Reihe ε kann sich ein und derselbe Werth nicht wiederholen, in der Reihe η kann dagegen ein kleinster Werth vor dem Auftreten von noch kleineren wieder erscheinen.

Die Grösse des Fehlers η, sowie die des Näherungswerthes $\frac{p+1}{q}$ könnte man wieder durch den Schwerpunkt gewisser Massenpunkte

zur Anschauung bringen, von denen irgend einer die Coordinaten (k_λ, v_λ), resp. (u_λ, v_λ) hat. Diese Punktreihen haben wie die vorigen die Abscissenaxe, resp. die nach (a_1, a_0) gehende Gerade zu Asymptoten, nähern sich denselben aber von der entgegengesetzten Seite. Verlängert man eine Seite der gebrochenen Linie (K, V) um eine der auf ihr abgetragenen Strecken, so erhält man einen Punkt auf einer Seite der andern gebrochenen Linie (k, v) und umgekehrt.

Man kann daher diese beiden Linien gleichzeitig auf folgende Art construiren. Die Spitze eines Dreiecks bezeichne man mit x_1, die Endpunkte der Grundlinie mit x_0 und 2. Nun verlängere man den einen Schenkel $(2)(x_1)$ über die Spitze bis zu einem Punkte x_2, und nehme auf dem andern Schenkel einen Punkt 3 an, so dass sich an das erste Dreieck ein neues anfügt, dessen Spitze x_2 und dessen Basis $(x_1)(3)$ ist. Man verlängere wieder den Schenkel $(3)(x_2)$ über die Spitze bis x_3, nehme auf dem andern einen Punkt 4 an, so dass ein neues Dreieck mit der Spitze x_3 und der Basis $(x_2)(4)$ entsteht. Indem man so fortfährt, wird abwechselnd auf der rechten und linken Seite des letzten Dreiecks das folgende in den Aussenwinkel an der Spitze eingefügt. Die Punkte $1\,(=x_0), 3, 5, 7\ldots$ sind dann die Eckpunkte der einen, die Punkte 2, 4, 6 die der andern Linie. Der Punkt λ entspricht dem Bruche $Z_\lambda : N_\lambda$, der Punkt x_λ dem Bruche $Z_{\lambda+2,1} : N_{\lambda+2,1}$. Auf der von λ und x_λ begrenzten Geraden liegen symmetrisch die Punkte $x_{\lambda-1}$ und $(\lambda+2)$.

Es sei $V_{\lambda-1} < q < V_\lambda$ und zugleich $v_{\mu-1} < q < v_\mu$. Trägt man dann die Werthe der Brüche $\frac{p}{q}$, $\frac{p+1}{q}$ als Abscissen auf dieselbe Axe, auf der schon die zunehmenden und die abnehmenden Näherungswerthe $\frac{U}{V}$ und $\frac{u}{v}$ dargestellt sind, so liegen die zugehörigen Punkte jedenfalls nicht innerhalb der Strecke, die durch die Punkte $\frac{U_{\lambda-1}}{V_{\lambda-1}}$ und $\frac{u_{\mu-1}}{v_{\mu-1}}$ begrenzt wird.

Wir wollen hieraus eine Folgerung bezüglich der Hauptreihe $\frac{Z_\lambda}{N_\lambda}$ ziehen, deren Glieder sich auch in den Reihen $\left(\frac{U_\lambda}{V_\lambda}\right)$ und $\left(\frac{u_\lambda}{v_\lambda}\right)$ finden.

Ist $q < N_\lambda$ gegeben und gehört beispielsweise $\frac{Z_\lambda}{N_\lambda}$ der zunehmenden Reihe $\left(\frac{U}{V}\right)$ an, so ist der Fehler von $\frac{p}{q}$ grösser als der des vorhergehenden, also ungenaueren Gliedes dieser Reihe, $\frac{Z_\lambda - Z_{\lambda-1}}{N_\lambda - N_{\lambda-1}}$, um so mehr ist er auch grösser als der von $\frac{Z_\lambda}{N_\lambda}$.

Betrachtet man die abnehmende Reihe $\left(\frac{u}{v}\right)$, in welcher die Glieder vorkommen

$$\frac{Z_{\lambda-1}}{N_{\lambda-1}},\ \frac{Z_{\lambda-1}+Z_\lambda}{N_{\lambda-1}+N_\lambda}\ \cdots\ \frac{Z_{\lambda+1}}{N_{\lambda+1}},$$

so ergiebt sich, da q kleiner als der Nenner des zweiten hier aufgeführten Gliedes sein wird, dass der aufwärts benachbarte Bruch $\frac{p+1}{q}$ nicht genauer sein kann als $\frac{Z_{\lambda-1}}{N_{\lambda-1}}$. Folglich liegt, wenn $q < N_\lambda$ ist, weder der eine noch der andere Nachbarbruch innerhalb der Strecke $\frac{Z_{\lambda-1}}{N_{\lambda-1}} \cdots \frac{Z_\lambda}{N_\lambda}$. Liegt daher ein Bruch $\frac{\varpi}{q}$ innerhalb genannter Strecke, so ist $q > N_\lambda$.

Man kann hieraus aber nicht den Schluss ziehen, dass die Reihe $\frac{Z}{N}$ die sämmtlichen Minima der absoluten Werthe von

$$\frac{\eta}{a_0} = \frac{a_1}{a_0} - \frac{p}{q}\left(< \frac{1}{q}\right)$$

für allmählich wachsendes q ergiebt*). Sie enthält zwar nur Minima, aber bei weitem nicht alle, und es liegt hierin ein wesentlicher Unterschied zwischen den kleinsten Werthen der Reihe η und denjenigen der Reihe $\varepsilon = qa_1 - pa_0 (< a_0)$.

Die sämmtlichen absoluten Minima von η müssen aber in den beiden Reihen der relativen Minima $\frac{K}{V}$ und $\frac{k}{v}$ enthalten sein. Denn wenn etwa ein absolutes Minimum das negative Zeichen hat, so muss dasselbe auch ein relatives bezüglich aller vorangegangenen negativen Werthe von η sein. Die Reihe $\frac{Z}{N}$ müsste also, wenn wirklich unvollständig, durch Einschaltung aus den Reihen $\frac{U}{V}$ und $\frac{u}{v}$ ergänzt werden.

Es sei das Sehnenpolygon im Kreise a_0 bis zum Punkte a_λ fortgesetzt, der etwa auf der positiven Seite des Nullpunktes liege. Dann sind die nächsten ausgezeichneten Eckpunkte auf der negativen Seite zu finden, nämlich $a_{\lambda,1}, a_{\lambda,2} \ldots a_{\lambda,n_\lambda-1}$; diese geben aber nur relative Minima von ε, da sie absolut grösser sind als der Abstand des vorhergehenden Punktes a_λ vom Nullpunkt. Erst der nächste Punkt $a_{\lambda+1}$ giebt ein absolutes Minimum. Diesen Punkten gehören Näherungsbrüche zu, deren Fehler folgende sind:

$$\frac{a_\lambda}{N_\lambda},\quad \frac{a_{\lambda,\mu}}{N_{\lambda,\mu}} = \frac{a_{\lambda-1} - \mu a_\lambda}{N_{\lambda-1} + \mu N_\lambda},\quad \frac{a_{\lambda+1}}{N_{\lambda+1}},\quad (\mu = 1, 2, \ldots, n_\lambda - 1).$$

*) Dieses ist von Lagrange übersehen worden in den Additions aux éléments d'algèbre d'Euler, no. 19. (Oeuvres, tome VII, pag. 34).

Bestimmt man nun z aus der Gleichung

$$\frac{a_{\lambda-1} - z a_\lambda}{N_{\lambda-1} + z N_\lambda} = \frac{a_\lambda}{N_\lambda},$$

so wird

$$z = \frac{1}{2}\left(\frac{a_{\lambda-1}}{a_\lambda} - \frac{N_{\lambda-1}}{N_\lambda}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(n_\lambda + \frac{a_{\lambda+1}}{a_\lambda} - \frac{N_{\lambda-1}}{N_\lambda}\right),$$

wo

$$a_{\lambda+1} : a_\lambda = 1 : (n_{\lambda+1} + 1 : (n_{\lambda+2} + \cdots))$$

und

$$N_{\lambda-1} : N_\lambda = 1 : (n_{\lambda-1} + 1 : (n_{\lambda-2} + \cdots))$$

zwei von einander unabhängige echte Brüche sind. Der Werth von z liegt daher zwischen $\frac{1}{2}(n_\lambda - 1)$ und $\frac{1}{2}(n_\lambda + 1)$. Wenn n_λ ungerade ist $= 2\varkappa + 1$, so liegt z zwischen $\varkappa$ und $\varkappa + 1$, d. h. $\frac{a_{\lambda,\mu}}{N_{\lambda,\mu}}$ ist für $\mu = \varkappa$ grösser, für $\mu = \varkappa + 1$ schon kleiner als das bisherige Fehlerminimum $\frac{a_\lambda}{N_\lambda}$. In diesem Falle befinden sich zwischen $a_{\lambda-1}$ und $a_{\lambda+1}$ im Ganzen $2\varkappa$ Zwischenglieder, von denen die zweite Hälfte absolute Minima von η ergiebt. Ist n_λ gerade, $= 2\varkappa$, so liegt z zwischen $\varkappa - \frac{1}{2}$ und $\varkappa + \frac{1}{2}$, und es lässt sich nicht allgemein entscheiden, ob schon das mittelste Zwischenglied $\frac{Z_{\lambda,\varkappa}}{N_{\lambda,\varkappa}}$ oder ob erst die auf dasselbe folgenden intermediären Werthe zur Reihe der absolut genauesten gehören.

Das folgende Beispiel, $a_0 = 931$, $a_1 = 130$, lässt alle möglichen Fälle erkennen:

λ	0	1	2	3	4	5
a	931	130	21	4	1	0
n		7	6	5	4	∞
Z	1	0	1	6	31	130
N	0	1	7	43	222	931

Wir werden die Glieder der beiden Reihen

$$\eta = -\frac{k}{v} \quad \text{und} \quad \eta = \frac{K}{V}$$

vereinigen und nach abnehmender absoluter Grösse ordnen. Ihre natürliche Reihenfolge nach der Zeit ihres Entstehens ergiebt sich

aus den in der ersten Reihe stehenden Indices und ist: (0), (1), $(1, \mu)$, (2), $(2, \mu)$, (3), ...

λ / (λ, μ)	0	(1,1)	(1,2)	(1,3)	1	(1,4)	(1,5)	(1,6)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	2
$\frac{k}{v}$	$\frac{931}{0}$	$\frac{801}{1}$	$\frac{671}{2}$	$\frac{541}{3}$		$\frac{411}{4}$	$\frac{281}{5}$	$\frac{151}{6}$				$\frac{21}{7}$
$\frac{K}{V}$					$\frac{130}{1}$				$\frac{109}{8}$	$\frac{88}{15}$	$\frac{67}{22}$	

λ / (λ, μ)	(2,4)	(2,5)	(3,1)	(3,2)	3	(3,3)	(3,4)	(4,1)	4	(4,2)	(4,3)	5
$\frac{k}{v}$			$\frac{17}{50}$	$\frac{13}{93}$		$\frac{9}{136}$	$\frac{5}{179}$		$\frac{1}{222}$			
$\frac{K}{V}$	$\frac{46}{29}$	$\frac{25}{36}$			$\frac{4}{43}$			$\frac{3}{265}$		$\frac{2}{487}$	$\frac{1}{709}$	$\frac{0}{931}$

Die absoluten Minima von $\eta = a_0\left(\frac{p}{q} - \frac{a_1}{a_0}\right)$ nebst den zugehörigen genauesten Näherungswerthen sind daher:

λ / (λ, μ)	1	(1,4)	(1,5)	(1,6)	2	(2,4)	(2,5)	3	(3,3)	(3,4)	4	(4,2)	(4,3)	5
$\frac{K}{V}, \frac{k}{v}$	$\frac{130}{1}$	$\frac{411}{4}$	$\frac{281}{5}$	$\frac{151}{6}$	$\frac{21}{7}$	$\frac{46}{29}$	$\frac{25}{36}$	$\frac{4}{43}$	$\frac{9}{136}$	$\frac{5}{179}$	$\frac{1}{222}$	$\frac{2}{487}$	$\frac{1}{709}$	$\frac{0}{931}$
$\frac{U}{V}, \frac{u}{v}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{29}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{43}$	$\frac{19}{136}$	$\frac{25}{179}$	$\frac{31}{222}$	$\frac{68}{487}$	$\frac{99}{709}$	$\frac{130}{931}$

Wir haben bisher $\frac{a_1}{a_0}$ zwischen zwei benachbarte Brüche eingeschlossen, deren Nenner q gegeben war. Alle hieraus erhaltenen Resultate lassen sich leicht darauf ausdehnen, dass man dieselbe Grösse zwischen zwei Nachbarbrüche von gegebenem Zähler p einschliesst. Sind diese $\frac{p}{q}$ und $\frac{p}{q-1}$, so liegt pa_0 zwischen qa_1 und $qa_1 - a_1$, also ist

$$qa_1 = pa_0 + \varepsilon, \quad (\varepsilon < a_1).$$

Es liege p zwischen Z_λ und $Z_\lambda + Z_{\lambda+1}$ und es sei $p = Z_\lambda + p'$. Für $p = Z_\lambda$ und $q = N_\lambda$ wird $qa_1 - pa_0 = (-1)^{\lambda-1}a_\lambda$; einen Werth von gleichem Zeichen und kleinerem Betrage kann der Ausdruck $qa_1 - pa_0$ erst für $p = Z_\lambda + Z_{\lambda+1}$ annehmen. Man bestimme nun zu p' eine Zahl q', so dass

$$q'a_1 = p'a_0 + \varepsilon', \quad (\varepsilon' < a_1).$$

Dann folgt aus $pa_0 - Z_\lambda a_0 = p' a_0$ die folgende Gleichung

$$qa_1 - \varepsilon - (N_\lambda a_1 + (-1)^\lambda a_\lambda) = q' a_1 - \varepsilon',$$

$$(q - N_\lambda) a_1 - (\varepsilon + (-1)^\lambda a_\lambda) = q' a_1 - \varepsilon'.$$

Hier kann man die Vielfachen von a_1 und die Restglieder für sich gleichsetzen, weil letztere auf beiden Seiten zwischen 0 und $-a_1$ liegen. Ist nämlich λ gerade, so ist $\varepsilon + a_\lambda < a_1$, weil $\varepsilon - a_1$, d. h. die Länge des unmittelbar vor ε erreichten Eckpunktes $< -a_\lambda$ sein muss. Ist λ ungerade, so ist $\varepsilon - a_\lambda$ positiv, weil p nicht so gross ist, dass $qa_1 - pa_0$ unterhalb a_λ fallen könnte. Mithin ist

$$p = Z_\lambda + p', \quad q = N_\lambda + q', \quad \varepsilon = (-1)^{\lambda-1} a_\lambda + \varepsilon'.$$

Auf Reductionsgleichungen dieser Art beruhten aber alle Entwicklungen dieses und des vorhergehenden Paragraphen.

Man wird daher den Zähler p aus den Grössen Z, resp. U, u zusammensetzen, dann giebt ein mit denselben Coefficienten aus den entsprechenden Grössen N, resp. V, v gebildeter linearer Ausdruck den einen der beiden zugehörigen Nenner q. Der Abstand ε wird entsprechend aus $(\pm a)$, resp. (K), $(-k)$ zusammengesetzt, der Fehler $\eta = a_0\left(\frac{a_1}{a_0} - \frac{p}{q}\right)$ ist dann $= \frac{\varepsilon}{q}$ und lässt sich auch mittelst des Schwerpunktes gewisser Massenpunkte deuten.

Ist $p < Z_\lambda$ gegeben, so liegt weder $\frac{p}{q}$ noch $\frac{p}{q-1}$ innerhalb der Strecke $\frac{Z_{\lambda-1}}{N_{\lambda-1}} \cdots \frac{Z_\lambda}{N_\lambda}$.

Die Reihen $\frac{U}{V}$, $\frac{u}{v}$ und die nach dem Früheren um etwa die Hälfte der intermediären Werthe verstärkte Reihe $\frac{Z}{N}$ haben die Eigenschaft, alle genauesten Werthe zu liefern, die entweder abwärts, oder aufwärts, oder in beliebiger Richtung dem Werthe $a_1 : a_0$ benachbart sind, nicht nur bezüglich aller Brüche mit kleinerem Nenner, sondern auch bezüglich aller Brüche mit kleinerem Zähler.

6.

Die Lösung einer Diophantischen Gleichung mittelst der Hauptnäherungsbrüche eines Kettenbruchs.

Wir beschäftigen uns nun damit, die Diophantische Gleichung

$$qa_1 - pa_0 = \varepsilon$$

in ganzen Zahlen p und q zu lösen. Das Verhältnis $a_1 : a_0$ werde als irrational angesehen, die Grösse ε sei durch einen Punkt auf dem Kreise a_0 repräsentirt, der zugleich auch $\varkappa a_0 + \varepsilon$ für ganzzahlige Werthe von $\varkappa$ darstellt. Der Weg hierzu ist schon in § 3 angedeutet. Dort war als erstes Polygon dasjenige bezeichnet, dessen Eckpunkte

die Kreisperipherie in die Bogen a_1 und a_2 theilen, ferner war eine Definition des Anfangspunktes eines beliebigen Theiles aufgestellt, derzufolge der Punkt $n_1 a_1$ als Endpunkt für die beiden in ihm zusammenstossenden Theile a_1 und a_2 zu gelten hat.

Wir wollen jetzt noch auf eine besondere Art die Punkte mit Ausschluss des Nullpunktes nach Gruppen zusammenfassen. Die erste Gruppe bestehe aus den Endpunkten der Theile, welche die Eintheilung des Kreises in die Bogen a_1 und a_2 bewirken. Sie ist dargestellt durch

$$h_1 a_1, \quad h_1 = 1, 2, \cdots, n_1.$$

Die zweite Gruppe setzt eine Theilung des Kreises a_0 in die Theile a_2 und a_3 voraus, und wird von den sämmtlichen Endpunkten derselben gebildet. Sie ist dargestellt durch

$$h_1 a_1 - h_2 a_2 = [h_1, h_2]\,(a).$$

Hier gilt für h_1 der vorige Bereich; ist $h_1 < n_1$, so ist $h_2 = 1, 2, \ldots, n_2$, ist $h_1 = n_1$, so wird erforderlich $h_2 = 0, 1, \ldots, n_2$ zu setzen, damit man als Endpunkt des Theiles $0 \ldots (-a_2)$ den schon der ersten Gruppe angehörenden Punkt $n_1 a_1$ darstellen könne.

Ueberhaupt werden die Punkte, welche bei Vollendung der Eintheilung in a_λ und $a_{\lambda+1}$ der Gruppe als Endpunkte der kleineren Theile angehören, auch in der nächsten vorkommen. Doch ist es unmöglich, dass derselbe Punkt in mehr als zwei benachbarten Gruppen erscheint.

Die λ^{te} Gruppe besteht aus den Endpunkten der den Kreis erfüllenden Theile a_λ und $a_{\lambda+1}$ und ist darzustellen durch:

$$[h_1, h_2, \ldots, h_\lambda]\,(\pm a),$$

wo

$$h_1 = 1, 2, \ldots, n_1,$$

und im allgemeinen

$$h_\mu = 1, 2, \ldots, n_\mu \quad (\mu = 2, 3, \ldots, \lambda),$$

jedoch auch $h_\mu = 0$, wenn $h_{\mu-1} = n_{\mu-1}$.

Man suche nun in jeder Gruppe den Endpunkt desjenigen Theiles, innerhalb dessen ε liegt. Gehört ε selbst einer Gruppe an, so erhält man eine endliche Reihe von Punkten, die in ε endigt, wenn nicht, so wird die Reihe der Punkte unendlich. Man kann aber auch im ersten Falle den Punkt ε unendlich wenig in den benachbarten Theil hineingerückt denken, und erhält dann auch dort eine unendliche Reihe von Punkten. Wir wollen deshalb immer diese zu Grunde legen. Lässt man nun vom Nullpunkt aus einen Punkt derartig auf dem Kreise sich bewegen, dass er der Reihe nach mit den aus den einzelnen Gruppen ausgewählten Punkten zusammenfällt, so ist die Summe der von ihm zurückgelegten Wege gleich ε, und man erhält

$$\varepsilon = [h_1, h_2, \ldots]\,(\pm a).$$

Da

$$a_0 = n_1 a_1 + a_2, \quad a_2 = n_3 a_3 + a_4, \quad a_4 = n_5 a_5 + a_6, \ldots,$$

so ist

$$a_0 = n_1 a_1 + n_3 a_3 + n_5 a_5 + \cdots$$
$$= [n_1, 0, n_3, 0, n_5 \ldots] (\pm a)$$

und entsprechend

$$a_\lambda = n_{\lambda+1} a_{\lambda+1} + n_{\lambda+3} a_{\lambda+3} + n_{\lambda+5} a_{\lambda+5} + \cdots,$$

folglich

$$[h_1, h_2, \ldots, h_\lambda] (\pm a) = [h_1, \ldots, h_{\lambda-1}, h_\lambda + 1, n_{\lambda+1}, 0, n_{\lambda+3}, 0, \ldots] (\pm a)$$

und, wenn $h_\lambda = n_\lambda$,

$$[h_1, \ldots, h_{\lambda-1}, n_\lambda] (\pm a) = [h_1, \ldots, h_{\lambda-1}, n_\lambda, 0] (\pm a)$$
$$= [h_1, \ldots, h_{\lambda-1}, n_\lambda, 1, n_{\lambda+2}, 0, n_{\lambda+4}, 0, n_{\lambda+6}, \ldots] (\pm a).$$

Hierdurch ist die endliche Darstellung eines Punktes ε, der selbst einer Gruppe angehört, in die oben aufgestellte Normalform übergeführt, da leicht zu sehen, dass die Coefficienten innerhalb der vorgeschriebenen Bereiche liegen.

Die oben eindeutig definirten Coefficienten h können nach folgender Regel gefunden werden.

Man dividirt ε so durch a_1, dass der Rest negativ wird, und setzt $\varepsilon = h_1 a_1 - \varepsilon'$, $(\varepsilon' < a_1)$. Ergäbe dies Verfahren den Quotienten $n_1 + 1$, so setzt man dagegen $\varepsilon = n_1 a_1 + \varepsilon'$, $(\varepsilon' < a_2)$, so dass $h_1 = n_1$ wird. In diesem Ausnahmefall folgt weiter $\varepsilon' = 0 \cdot a_2 + \varepsilon''$ $(\varepsilon'' < a_2)$, $h_2 = 0$. Die Darstellung von ε ist im ersten Fall auf diejenige von $\varepsilon' < a_1$ durch $a_2, a_3, \ldots$, im zweiten auf die von $\varepsilon'' < a_2$ durch $a_3, a_4, \ldots$ zurückgeführt. Allgemein wird $\varepsilon^{(\lambda-1)}$ durch a_λ so dividirt, dass der Rest negativ wird, ausser wenn der Quotient $= n_\lambda + 1$ würde, in welchem Falle man die Division auf die gewöhnliche Art ausführt. Der Quotient ist $= h_\lambda$, man setzt $\varepsilon^{(\lambda-1)} = h_\lambda a_\lambda - \varepsilon^{(\lambda)}$, und wendet auf $\varepsilon^{(\lambda)}$ dasselbe Verfahren an.

Es sei nun ε ein Punkt einer Gruppe und zwar der λ^{ten}, so dass man die Normalform auf den endlichen Ausdruck

$$\varepsilon = [h_1, h_2, \ldots, h_\lambda] (\pm a)$$

reduciren kann. Dann ist

$$q = h_1 N_1 + h_2 N_2 + \cdots + h_\lambda N_\lambda = [h_1, h_2, \ldots, h_\lambda] (N)$$

die Zahl der Sehnen, welche vom Nullpunkt zu dem Eckpunkt ε hinführt, und

$$p = h_1 Z_1 + h_2 Z_2 + \cdots + h_\lambda Z_\lambda = [h_1, h_2, \ldots, h_\lambda] (Z)$$

die zugehörige Zahl der Kreisumfänge. Diese Zahlen erfüllen die gegebene Gleichung

$$q a_1 - p a_0 = \varepsilon.$$

Der Ausdruck für ε gleicht einer in einem Zahlensystem geschriebenen Zahl. Die Ziffern einer solchen werden bekanntlich entweder in der Reihenfolge von links nach rechts dadurch bestimmt, dass man von der abzuzählenden Menge die grössten Einheiten möglichst oft abzusondern sucht und auf den Rest dasselbe Verfahren anwendet, oder auch in der Reihenfolge von rechts nach links dadurch, dass man von der betreffenden Menge möglichst viel Gruppen abtrennt, deren Grösse durch die kleinste höhere Einheit ausgedrückt wird, und auf die Anzahl der Gruppen dasselbe Verfahren anwendet. Ziffern sind dort die Quotienten, hier die Reste.

Wir wollen jetzt nachweisen, dass auch das Coefficientensystem $[h_1 h_2 \ldots h_\lambda]$ sich nicht nur in der einen Reihenfolge, wie schon nachgewiesen, aus dem gegebenen Werthe von ε bilden lässt, sondern auch in der umgekehrten aus dem zugehörigen Werthe von q.

Es sei

$$q = h_\lambda N_\lambda + q',$$

also

$$q' = [h_1 \ldots h_{\lambda-1}]\ (N)$$

die Sehnenzahl des zu ε gehörenden Punktes der vorhergehenden Gruppe. Wir nehmen an, dass h_λ nicht $= 0$ sei, da man sonst den Punkt ε selbst schon der vorigen Gruppe zurechnen könnte.

Der zuerst entstehende Punkt der λ^{ten} Gruppe ist dadurch bestimmt, dass sein Abstand vom Nullpunkt gleich der Differenz der durch die Gesammtheit der früheren Gruppen erzeugten Theile ist, also $= \pm (a_{\lambda-1} - a_\lambda)$, er gehört zur Sehnenzahl $N_{\lambda-1} + N_\lambda$. Entsprechend gehört der erste Punkt der $(\lambda - 1)^{\text{ten}}$ Gruppe zur Sehnenzahl $N_{\lambda-2} + N_{\lambda-1}$. Folglich ist

$$N_{\lambda-2} + N_{\lambda-1} \leqq q' < N_{\lambda-1} + N_\lambda.$$

Hierdurch ist q' auf das Gebiet von $(N_\lambda - N_{\lambda-2})$ auf einander folgenden Zahlen beschränkt, so dass die obige Gleichung

$$q = h_\lambda N_\lambda + q'$$

zur Bestimmung von h_λ und q' ausreicht.

Man stelle also die beiden Reihen auf

$$\begin{array}{ccccccc} N_1 & & N_1 + N_2 & & N_2 + N_3 & & N_3 + N_4 \cdots \\ & N_1 & & N_2 & & N_3 & \end{array}$$

Die kleinste Zahl der ersten Reihe, welche $> q$ ist, sei $N_{\lambda-1} + N_\lambda$, das ihr vorhergehende Glied der zweiten Reihe subtrahire man h_λ mal von q, nämlich so oft, dass der Rest nicht mehr grösser ist als das vorhergehende Glied der ersten. Mit dem Rest verfährt man ebenso, um den vorhergehenden Coefficienten $h_{\lambda-1}$ zu erhalten u. s. w.

Dann ist

$$q = [h_1 h_2 \ldots h_\lambda]\ (N)$$

und die Coefficienten sind identisch mit den vorher aus ε abgeleiteten. Es gelten daher auch dieselben Bedingungen über die Bereiche, aus denen dieselben zu wählen. Diese Darstellung von q ist ein besonderer Fall derjenigen, die in § 4 (pag. 203) als erste angeführt wurde.

Es sei z. B.

$$a_1 = 117, \quad a_0 = 268,$$

und die zu lösende Gleichung

$$q a_1 - p a_0 = -98.$$

Der Punkt (-98) auf dem Umfange von a_0 ist hier als (170) zu bezeichnen. Benutzt man das in § 4 (pag. 204) berechnete Schema, so wird:

$$\begin{array}{ccc} 170 = 2\cdot 117 - 64, & 64 = 2\cdot 34 - 4, & 4 = 1\cdot 15 - 11, \\ (n_1 = 2) & (n_2 = 3) & (n_3 = 2) \\ 11 = 3\cdot 4 - 1, & 1 = 1\cdot 3 - 2, & 2 = 2\cdot 1, \\ (n_4 = 3) & (n_5 = 1) & (n_6 = 3) \end{array}$$

$$\begin{aligned} 170 &= [2,\ 2,\ 1,\ 3,\ 1,\ 2]\ (\pm a), \\ q &= [2,\ 2,\ 1,\ 3,\ 1,\ 2]\ (N) = 258, \\ p &= [2,\ 2,\ 1,\ 3,\ 1,\ 2]\ (Z) = 112, \\ 258 a_1 &= 112 a_0 + 170. \end{aligned}$$

Um aus $q = 258$ die Coefficienten zu bestimmen, benutzt man die beiden Reihen

$$(\lambda = 1, 2, 3 \ldots) \quad \begin{array}{rccccccc} N_{\lambda-1} + N_\lambda = & 1, & 3, & 9, & 23, & 71, & 126, & 339 \\ N_\lambda = & 1, & 2, & 7, & 16, & 55, & 71, & 268 \end{array}$$

und erhält

$$q = 258 = 2\cdot 71 + 116\ (116 < 126), \quad 116 = 1\cdot 55 + 61\ (61 < 71),$$
$$61 = 3\cdot 16 + 13\ (13 < 23), \quad 13 = 1\cdot 7 + 6\ (6 < 9),$$
$$6 = 2\cdot 2 + 2\ (2 < 3), \quad 2 = 2\cdot 1,$$
$$q = [2,\ 2,\ 1,\ 3,\ 1,\ 2]\ (N).$$

Es giebt noch eine zweite Normalform für das Coefficientensystem $[h_1 h_2 h_3 \ldots h_\lambda)$, die sich auch wieder auf 2 Arten bilden lässt, einerseits aus der Lage des Punktes ε auf dem Kreise, andererseits aus der Nummer q, die er als Eckpunkt des Sehnenpolygons hat. In letzterer Art aufgefasst, stimmt sie mit derjenigen überein, die in § 4 (pag. 204) durch ein Beispiel erläutert wurde.

Man theile den Kreis a_0 in Theile von der Grösse a_1 und $a_1 + a_2$, dazu sind $(n_1 - 1)$ Sehnen erforderlich. Diese mögen das erste Polygon bilden. Bei fortgesetzter Theilung wird jeder Theil $a_1 + a_2$ von seinem Endpunkt aus um a_1, d. h. von seinem Anfangspunkt aus um a_2 verkürzt. Die Theilung besteht dann aus a_1 und a_2. Des weiteren wird jeder Theil a_1 von seinem Endpunkt aus wiederholt um a_2 verkürzt. Es müssen also vorhandene Punkte immer um a_2 in der

Richtung abnehmender Längen verschoben werden, um die Lage der neuen Punkte anzugeben.

Man kann die weitere Theilung dann aufhalten, wenn der Kreis in die Theile a_2 und $a_2 + a_3$ zerlegt ist. Bis zu diesem Zeitpunkt ist jeder Theil a_1 der ersten Theilung $(n_1 - 1)$ mal, jeder Theil $(a_1 + a_2)$ dagegen n_1 mal um a_2 reducirt worden. Die hinzugekommenen Punkte bilden die zweite Gruppe, die sämmtlichen jetzt vorhandenen das zweite Polygon.

Das λ^{te} Polygon zerlegt die Kreisperipherie in die Theile a_λ und $a_\lambda + a_{\lambda+1}$. Zu seiner Herstellung sind, da $a_{\lambda+1}$ der nächste entstehende Theil ist, $N_{\lambda+1} - 1$ Sehnen erforderlich.

Die Strecke zwischen zwei benachbarten Punkten, z. B. den Punkten $h a_1$ und $(h + 1)\, a_1$ des ersten Polygons wird nun an diese beiden Punkte folgendermaassen vertheilt.

Um die Strecke a_1 mit den Punkten der zweiten Gruppe zu besetzen, muss sich auf dem Kreise a_0 ein Punkt aus der Lage von $(h + 1)\, a_1$ so oft in negativer Richtung um die Strecke a_2 verschieben, bis ihn von $h_1 a_1$ nur noch der Abstand $a_2 + a_3$ trennt, also $(n_2 - 1)$ mal. Der von ihm beschriebene Bogen werde dem Gebiete des Ausgangspunktes $(h + 1)\, a_1$ zugerechnet. Zugleich hat der Punkt $h a_1$ sein Gebiet nach negativer Richtung ausgedehnt, der Punkt 0, abweichend von den übrigen, sogar um die Strecke $n_2 a_2$. Das noch nicht besetzte Gebiet des betrachteten Bogens a_1 erstreckt sich von $h a_1$ bis $h a_1 + a_2 + a_3$. Dieses wird nun mit Punkten der dritten Gruppe besetzt, indem man einen Punkt annimmt, der sich aus der Lage $h a_1$ wiederholt um a_3 in positiver Richtung bewegt, bis ihn von dem nächsten Punkte nur noch der Abstand $a_3 + a_4$ trennt. Der von ihm beschriebene Bogen wird dem Gebiet seines Ausgangspunktes hinzugefügt.

So dringen in die Strecke zwischen $h a_1$ und $(h + 1)\, a_1$ abwechselnd Punkte vor, welche von dem durch diese Eckpunkte schon erworbenen Gebiete ausgehen, so dass schliesslich der Punkt $(h + 1)\, a_1$ das seinige ausdehnt bis zu der Grenze:

$$\begin{aligned}
&(h + 1)\, a_1 - (n_2 - 1)\, a_2 - n_4 a_4 - n_6 a_6 \cdots \\
&= (h + 1)\, a_1 + a_2 - (n_2 a_2 + n_4 a_4 + n_6 a_6 + \cdots) \\
&= h a_1 + a_2
\end{aligned}$$

und der Punkt $(h a_1)$ bis:

$$h a_1 + n_3 a_3 + n_5 a_5 + \cdots = h a_1 + a_2.$$

Der Zwischenraum a_1 ist also vollständig an die beiden Eckpunkte vertheilt. Es erstreckt sich daher das Gebiet des Punktes $h a_1$ über den Bereich

$$(h - 1)\, a_1 + a_2 \cdots h a_1 + a_2,$$

das des Nullpunktes über

$$(n_1 - 1)\, a_1 + a_2 \cdots 0 \cdots a_2,$$

oder auch

$$-a_1 \cdots 0 \cdots a_2.$$

Aehnliches liesse sich über das Gebiet zwischen den Nachbarpunkten irgend eines Polygons festsetzen.

Ist daher ein Punkt ε auf dem Kreise gegeben, so wird man die Länge desselben so bestimmen, dass

$$-a_1 < \varepsilon < a_0 - a_1.$$

Dann dividirt man ε durch a_1 zunächst auf gewöhnliche Art mit positivem Rest, benutzt aber nur dann den Quotienten als Werth von h_1, wenn der Rest $< a_2$ ist, andernfalls nimmt man die nächst grössere Zahl als Quotienten und setzt sie $= h_1$. Dann ist

$$h_1 = 0, 1, \cdots, n_1 - 1,$$
$$\varepsilon = h_1 a_1 - \varepsilon'.$$

Nun wird ε' durch a_2 dividirt, und der einem positiven Rest entsprechende Quotient $= h_2$ gesetzt, wenn der Rest $< a_3$; sonst nimmt man als Quotienten und zugleich als Werth von h_2 die nächst grössere Zahl. Man setzt nun

$$\varepsilon' = h_2 a_2 - \varepsilon''.$$

Hierbei wird im allgemeinen $h_2 = 0, 1, \ldots, n_2 - 1$, nur wenn $h_1 = 0$ war, so wird, da das Gebiet des Nullpunktes von 0 bis $-a_1$ reicht, auch $h_2 = n_2$ erforderlich. Allgemein ist

$$h_\lambda = 0, 1, \cdots, n_\lambda - 1,$$

dagegen

$$h_\lambda = 0, 1, \cdots, n_\lambda,$$

für

$$h_{\lambda-1} = 0.$$

Ist nun ε ein durch eine endliche Anzahl von Sehnen erreichbarer Punkt, so erhält ε die Form $[h_1, h_2 \ldots h_\lambda]\,(\pm a)$. Die Lösung der Diophantischen Gleichung wird dann gegeben durch

$$q = [h_1, h_2 \cdots h_\lambda]\,(N),$$
$$p = [h_1, h_2 \cdots h_\lambda]\,(Z).$$

Um nun auch aus gegebenem q die Coefficienten h herzuleiten, sei

$$q' = [h_1, h_2 \cdots h_{\lambda-1}]\,(N).$$

Dann ist $q' a_1$ die Ecke des $(\lambda - 1)^{\text{ten}}$ Polygons, in deren Gebiet $q a_1$ fällt. Folglich ist $q' < N_\lambda$, denn zur Herstellung des $(\lambda - 1)^{\text{ten}}$ Polygons sind $N_\lambda - 1$ Sehnen erforderlich. Nun ist $q = q' + h_\lambda N_\lambda$, also q' der Rest, und h_λ der Quotient aus der Division von q durch N_λ. Man wird daher auf das in § 4 (pag. 204) auseinandergesetzte Verfahren geführt.

Es sei wieder

$$a_0 = 268, \quad a_1 = 117, \quad qa_1 - pa_0 = -98.$$

$$\varepsilon = -98 = 0 \cdot 117 - 98 = 0 \cdot a_1 - \varepsilon',$$

$$\varepsilon' = 98 = 3 \cdot 34 - 4 = 3a_2 - a_4, \quad \varepsilon = 0 \cdot a_1 - 3a_2 + a_4.$$

Dieses ist noch nicht die Normalform. Man kann dieselbe aber leicht herstellen, indem man

$$a_4 = n_5 a_5 + n_7 a_7 + \cdots$$

setzt, oder aus

$$a_3 = n_4 a_4 + n_6 a_6 + \cdots.$$

ableitet:

$$a_4 = a_3 - (n_4 - 1)\, a_4 - n_6 a_6 - \cdots.$$

Um $n_7 = \infty$ zu vermeiden, wendet man den zweiten Ausdruck an

$$a_4 = a_3 - 2a_4 - 3a_6,$$

$$\varepsilon = 0 \cdot a_1 - 3a_2 + a_3 - 2a_4 - 3a_6$$

$$= [0, 3, 1, 2, 0, 3]\,(\pm a),$$

$$q = [0, 3, 1, 2, 0, 3]\,(N) = 258,$$

$$p = [0, 3, 1, 2, 0, 3]\,(Z) = 113.$$

Wenn es übrigens nur darauf ankommt, die Lösung der Diophantischen Gleichung $qa_1 - pa_0 = \varepsilon$, und, wenn $a_1 : a_0$ rational, diejenige in den kleinsten Zahlen zu finden, so ist die Herstellung eines der beiden Normalausdrücke für $[h_1 h_2 \ldots]$ nicht erforderlich. Es reicht aus, auf irgend eine Weise ε durch $a_1, a_2, \ldots$ zu erschöpfen, und in dem so erhaltenen linearen Ausdruck a_λ durch $(-1)^{\lambda-1} Z_\lambda$ resp. $(-1)^{\lambda-1} N_\lambda$ zu ersetzen. Zu dem Zwecke kann man ε durch a_1 so dividiren, dass der Rest negativ wird, den Rest ebenso durch a_2, diesen durch a_3, u. s. w. Dann haben die Glieder des für ε gefundenen Aggregates abwechselnde, also diejenigen für p und q gleiche Vorzeichen, die Quotienten haben den Bereich $h_\lambda = 1 \cdots n_\lambda + 1$. Man kann auch ε durch a_1, den Rest durch a_2, u. s. w. immer auf gewöhnliche Art mit positivem Rest dividiren, dann bestehen die Aggregate für p und q im Allgemeinen aus Gliedern mit wechselndem Zeichen. Die Coefficienten haben den Bereich $h_\lambda = 0, 1, \cdots, n_\lambda$.

Wollte man bei der Darstellung von ε die ersten der Grössen a unbenutzt lassen, also etwa der Reihe nach durch $a_\lambda, a_{\lambda+1}, \ldots$ dividiren, so beraubt man sich der Möglichkeit, für solche Punkte ε, die von dem Sehnenpolygon vor Erreichung des Punktes a_λ getroffen werden, die endliche Lösung überhaupt zu finden; man erhält nur eine Annäherung durch Zahlen, die in's Unendliche wachsen. Ist $a_1 : a_0$ rational, so wird diese, da dann a_μ von einem bestimmten Index an verschwindet, allerdings wieder auf eine endliche Lösung reducirt, doch ist dies nicht die in den kleinsten Zahlen ausgedrückte. Zu

dieser Art von Lösungen gehört auch die übliche, bei der man ε als ein Vielfaches der letzten nicht verschwindenden Grösse a_μ darstellt. Dagegen führt die in Euler's Algebra dargestellte Methode zu den einfachsten Werthen der Unbekannten. Sie besteht in der Reduction der gegebenen Gleichung auf eine Reihe einfacherer, so dass in der letzten eine der beiden Unbekannten den Coefficienten 1 erhält. Dem Wesen nach fällt sie mit den oben dargestellten Methoden zusammen.

Die Coefficienten h der ersten oder der zweiten Normalform können noch unter einem andern Gesichtspunkte betrachtet werden. Setzen wir statt q und p die Zeichen p_1 und p_2, so ist

$$p_1 a_1 = p_2 a_0 + \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 = h_1 a_1 - \varepsilon_2,$$

demnach

$$\begin{aligned} p_1 a_1 &= p_2 a_0 + h_1 a_1 - \varepsilon_2 \\ &= p_2(n_1 a_1 + a_2) + h_1 a_1 - \varepsilon_2 \\ &= (p_2 n_1 + h_1)\, a_1 + (p_2 a_2 - \varepsilon_2). \end{aligned}$$

Hieraus folgt, dass

$$p_2 a_2 - \varepsilon_2 = p_3 a_1,$$

wo p_3 eine ganze Zahl ist. Dann wird:

$$p_1 = p_2 n_1 + h_1 + p_3.$$

So erhält man die beiden Gleichungssysteme:

$$\begin{array}{ll} p_1 a_1 = p_2 a_0 + \varepsilon_1, & p_1 = p_2 n_1 + p_3 + h_1, \\ p_2 a_2 = p_3 a_1 + \varepsilon_2, & p_2 = p_3 n_2 + p_4 + h_2, \\ p_3 a_3 = p_4 a_2 + \varepsilon_3, & p_3 = p_4 n_3 + p_5 + h_3. \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

In dem ersten kommen die Verhältnisse $a_1 : a_0$, $a_2 : a_1$, $a_3 : a_2 \ldots$ vor, von denen jedes folgende der in dem reciproken Werth des vorhergehenden enthaltene Bruchtheil ist. Die Zahl $p_{\lambda+1}$ ist dem durch p_λ ausgedrückten Vielfachen von $\frac{a_\lambda}{a_{\lambda-1}}$ benachbart in der für jede Normalform besonders festgestellten Richtung. Da aus der ersten Gleichung folgt

$$p_1 = [h_1 h_2 \ldots h_\lambda]\,(N),$$

so ergiebt sich aus den übrigen entsprechend:

$$\begin{aligned} p_2 &= [h_2, h_3 \ldots h_\lambda]\,(N') = [h_1, h_2 \ldots h_\lambda]\,(Z), \\ p_3 &= [h_3 \ldots h_\lambda]\,(N''), \\ &\vdots \end{aligned}$$

wenn N_λ', N_λ'' ... die Hauptnäherungsnenner der Kettenbrüche $1 : (n_2 + 1 : (n_3 + \cdots))$ resp. $1 : (n_3 + 1 : (n_4 + \cdots))$ u. s. w. sind.

Das zweite der obigen Gleichungssysteme zeigt, dass die Grössen $p_1, p_2, p_3 \ldots$ ähnlichen Gleichungen wie die Grössen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ genügen, der Unterschied besteht in dem Auftreten der Grössen h, die man durch diese Gleichungen definiren könnte.

Aus den obigen Methoden zur genauen Lösung der Gleichung $q a_1 - p a_0 = \varepsilon$ ergiebt sich auch der Weg, sie durch kleinere Zahlen p und q angenähert zu erfüllen. Nach einem Satze von Tchebychef*) kann dies so geschehen, dass der Unterschied beider Seiten $< \frac{a_0}{2q}$ ist. Auch hierfür lässt sich der Beweis leicht finden.

Gehört ε bei einer Theilung des Kreises in a_λ und $a_\lambda + a_{\lambda+1}$ einem der kleineren Theile an, und ist $\varepsilon' = q a_1 - p a_0$ der dem Punkt ε nähere Endpunkt desselben, so wird $|\varepsilon' - \varepsilon| < \frac{1}{2} a_\lambda$, es ist aber $q < N_{\lambda+1}$, folglich

$$q a_\lambda < N_{\lambda+1} a_\lambda + N_\lambda a_{\lambda+1}, \quad \text{d. h.} \quad < a_0,$$

also

$$|\varepsilon' - \varepsilon| < \frac{a_0}{2q}.$$

Liegt aber ε auf einem der grösseren Theile, den die Punkte $\varepsilon' = q' a_1 - p' a_0$ und $\varepsilon'' = q'' a_1 - p'' a_0$ begrenzen, so theile man denselben durch einen Zwischenpunkt in zwei Gebiete, die je einem Endpunkt zugehören. Da von den beiden Producten $q'(\varepsilon' - \varepsilon)$ und $q''(\varepsilon - \varepsilon'')$ das eine von 0 aus wächst, das andere zu 0 abnimmt, wenn sich ε von ε' bis ε'' bewegt, so kann man den Zwischenpunkt so wählen, dass in ihm beide Producte denselben Werth annehmen. Dieser Werth ist

$$P = \frac{(\varepsilon' - \varepsilon) + (\varepsilon - \varepsilon'')}{q'^{-1} + q''^{-1}} < \frac{q' + q''}{4} (a_\lambda + a_{\lambda+1}).$$

Von den Zahlen q', q'' ist die grössere $< N_{\lambda+1}$, die kleinere ist $< N_\lambda$, da die Punkte ε' und ε'' längs des Polygons durch $N_{\lambda+1} - N_\lambda$ Sehnen getrennt sind. Folglich ist

$$P < \frac{1}{4} (N_{\lambda+1} + N_\lambda)(a_\lambda + a_{\lambda+1}).$$

Addirt man hierzu

$$0 < \frac{1}{4} (N_{\lambda+1} - N_\lambda)(a_\lambda - a_{\lambda+1}),$$

so wird

$$P < \frac{1}{2} (N_{\lambda+1} a_\lambda + N_\lambda a_{\lambda+1}), \quad \text{d. h.} \quad < \frac{1}{2} a_0.$$

Beziehen sich daher p und q auf denjenigen der beiden Punkte $\varepsilon', \varepsilon''$, in dessen Gebiet der gegebene Punkt ε liegt, so ist auch hier

$$|q a_1 - p a_0 - \varepsilon| < \frac{a_0}{2q}.$$

*) S. Hermite, Crelle's Journal, Bd. 88, pag. 10.

§ 7.

Die Lösung einer Diophantischen Gleichung mittelst intermediärer Näherungsbrüche.

Man kann die Diophantische Gleichung $qa_1 - pa_0 = \varepsilon$ auch mit Hilfe der Reihe (K) lösen, welche aus den kleinsten positiven Werthen besteht, die $qa_1 - pa_0$ bei wachsendem q darbietet. Dazu werden wir nachweisen, dass sich aus den Ecken des Sehnenpolygons unter Wahrung ihrer natürlichen Anordnung nach der Zeit des Entstehens eine Auswahl solcher Punkte treffen lässt, die auch räumlich auf dem Kreise in positiver Richtung auf einander folgen, und sich dem gegebenen Punkte ε entweder aperiodisch nähern oder ihn wirklich erreichen.

Wir bezeichnen als λ^{tes} Sehnenpolygon dasjenige, welches mit Einschluss des Nullpunktes V_λ Eckpunkte enthält. Durch Verlängerung desselben um eine Sehne würde man zu dem Punkte K_λ gelangen. Hat K_λ die Form $a_{\nu,\mu} = a_{\nu-1} - \mu a_\nu$, so besteht der Kreis a_0 bei Vollendung des genannten Polygons aus Theilen von der Grösse $a_{\nu,\mu-1}$ und a_ν, d. h. $K_{\lambda-1}$ und $K_{\lambda-1} - K_\lambda$. Hat K_λ die Form a_ν, so sind die Theile von der Grösse $a_\nu + a_{\nu-1}$ und $a_{\nu-1}$, d. h. wieder $K_{\lambda-1}$ und $K_{\lambda-1} - K_\lambda$.

Das erste Polygon hat die Ecken $h_1 a_1$, wo $h_1 = 0, 1, \ldots, n_1$.

Um das zweite zu erhalten, trägt man in jeden der vorhandenen grösseren Theile $a_1 (= K_1)$ von dem Endpunkte desselben aus die Strecke a_2, also vom Anfangspunkte aus, d. h. in positiver Richtung, $a_1 - a_2 = K_2$ ab.

Um das dritte Polygon zu erhalten, hat man auf jedem der grösseren Theile, der gleich $a_1 - a_2$, von dem Anfangspunkte desselben aus, also in positiver Richtung, die Strecke $a_1 - 2a_2 = K_3$ abzutragen.

Zuletzt wird der Theil a_1 des ersten Polygons bis auf $a_2 + a_3$ reducirt, so dass dann der Kreis a_0 aus den Theilen a_2 und $a_2 + a_3$ besteht.

Für das nächste Polygon trägt man in dem Theile a_2 vom Endpunkt aus, in dem Theile $(a_2 + a_3)$ vom Anfangspunkte, also immer in positiver Richtung, die Strecke a_3 möglichst oft ab.

Dies lässt sich dahin zusammenfassen, dass man, um vom λ^{ten} Polygon zum nächsten überzugehen, auf jedem grösseren Theil, also K_λ, vom Anfangspunkte aus und zugleich in positiver Richtung den Theil $K_{\lambda+1}$ möglichst oft abträgt, nämlich einmal, wenn letzterer die Gestalt $a_{\nu,\mu}$ hat, und $(n_\nu + 1)$ mal, wenn er $= a_\nu$ ist.

Man durchlaufe nun den Kreis vom Nullpunkt bis zum Punkte ε in positiver Richtung und bemerke dabei den zuletzt überschrittenen

Eckpunkt des ersten Polygons, des zweiten, des dritten u. s. w., wobei mancher Punkt als letzter Eckpunkt mehrerer benachbarter Polygone auftreten kann. Der Weg vom Nullpunkt bis zum letzten Punkt des ersten Polygons sei $t_1 K_1$, von da bis zum letzten Punkte des zweiten $t_2 K_2$ u. s. w. Dann ist

$$\begin{aligned} \varepsilon &= t_1 K_1 + t_2 K_2 + \cdots + t_\lambda K_\lambda \\ &= [t_1, t_2, \cdots, t_\lambda] (K), \end{aligned}$$

oder auch

$$\begin{aligned} \varepsilon &= h_1 a_1 + \sum_\mu h_{2,\mu} a_{2,\mu} + h_3 a_3 + \sum h_{4,\mu} a_{4,\mu} + \cdots \\ &= [h_1; h_{2,\mu}, h_3; h_{4,\mu} \ldots] (a) \end{aligned}$$

und die Diophantische Gleichung wird gelöst durch

$$q = [t_1, t_2, \ldots, t_\lambda] (V), \quad p = [t_1, t_2, \ldots, t_\lambda] (U).$$

Zur Bestimmung der Coefficienten t dividirt man ε durch K_1, den Rest durch K_2, den neuen Rest durch K_3 u. s. w., die Quotienten sind $= t_1, t_2, t_3, \ldots$.

Wir werden nun zeigen, dass die Coefficienten t durch gleichartige Operationen in umgekehrter Reihenfolge aus dem zugehörigen Werthe von q bestimmt werden können.

Es sei ε, wie oben angenommen, ein Punkt des λ^{ten} Polygons; zu dem vorangehenden Punkte des $(\lambda-1)^{\text{ten}}$ Polygons mögen q' Sehnen gehören, so dass

$$q' = [t_1 t_2 \ldots t_{\lambda-1}] (V)$$

und

$$q = q' + t_\lambda V_\lambda.$$

Nun ist aber $q' < V_\lambda$, da das λ^{te} Polygon nur $V_\lambda - 1$ Sehnen enthält, folglich findet man t_λ als Quotienten, q' als Rest bei der Division von q durch V_λ. Ebenso findet man aus q' mittelst des Divisors $V_{\lambda-1}$ den Quotienten $t_{\lambda-1}$ u. s. w.

Auf diese Darstellung von q sind wir schon in § 4 (pag. 205—207) gekommen, wo auch der Bereich bestimmt wurde, dem die Coefficienten t angehören müssten, damit $[t_1 t_2 \ldots t_\lambda] (V)$ die Normalform des dargestellten Werthes sei.

Um diesen Bereich hier auch aus der von ε ausgehenden Darstellung der Coefficienten abzuleiten, ist folgendes zu beachten. Dividirt man in der Reihe

$$a_1, \; a_1 - a_2, \; a_1 - 2a_2, \ldots, \; a_1 - (n_2 - 1) a_2, \; a_3, \; a_3 - a_4, \ldots$$

irgend ein Glied $K_{\lambda-1}$, durch das folgende, K_λ, so erhält man einen Quotienten, der $\geqq 1$, allgemein $= \tau_\lambda + 1$, sei, und einen Rest, der $= K_\lambda - K_{\lambda+1}$ ist, so dass

$$K_{\lambda-1} = (\tau_\lambda + 1) K_\lambda + K_\lambda - K_{\lambda+1}$$

oder

$$K_{\lambda-1} - K_\lambda = \tau_\lambda K_\lambda + (K_\lambda - K_{\lambda+1}).$$

Hieraus folgt

$$K_{\lambda-1} - K_\lambda = \tau_\lambda K_\lambda + \tau_{\lambda+1} K_{\lambda+1} + \tau_{\lambda+2} K_{\lambda+2} + \cdots$$

Der Werth von τ_λ ist, wenn K_λ von der Form a_ν ist, gleich n_ν, wenn von der Form $a_{\nu,\mu}$, gleich 0.

Die Reihe $K_1 K_2 \ldots K_\lambda$ befolgt also ganz ähnliche Gesetze, wie sie in § 4 (pag. 206) von der Reihe $V_\lambda, V_{\lambda-1}, \ldots, V_1$ benutzt sind. Mit Hilfe derselben kann daher auch hier gezeigt werden, dass irgend zwei Coefficienten nur dann ihren grössten Werth haben dürfen, wenn ein zwischen ihnen stehender um mehr wie eine Einheit unterhalb seines Maximums bleibt. Dieses Maximum ist offenbar für den ersten Coefficienten $= n_1$, für einen beliebigen andern, t_λ, ist es gleich $\tau_\lambda + 1$.

In der That, wenn man annimmt, dass die Coefficienten dieser Bestimmung gemäss gewählt sind, so lässt sich erstens zeigen, dass in dem Ausdruck $[t_1, t_2, \ldots] (K)$ die Summe der nach Weglassung der μ ersten noch übrigen Glieder $t_{\mu+1} K_{\mu+1} + t_{\mu+2} K_{\mu+2} + \cdots < K_\mu$ ist, und zweitens, dass der Ausdruck bei Beschränkung auf λ Glieder jede Ecke des λ^{ten} Polygons darstellt.

Ist nämlich $\varepsilon = [t_1, t_2 \ldots t_\lambda] (K)$ irgend ein in der Normalform dargestellter Punkt, so lassen sich auch alle ihm auf dem Kreise räumlich vorangehenden erhalten. Dazu vermindert man im allgemeinen t_λ um 1. Ist dies wegen $t_\lambda = 0$ unmöglich, so sei $t_{\mu-1}$ der letzte von 0 verschiedene Coefficient, dann ist nach der obigen Formel

$$\varepsilon = [t_1, t_2, \ldots, t_{\mu-1}, 0, 0 \ldots 0] (K)$$
$$= [t_1, \ldots, t_{\mu-2}, t_{\mu-1} - 1, \tau_\mu + 1, \tau_{\mu+1}, \ldots, \tau_\lambda] (K) + K_\lambda - K_{\lambda+1}.$$

Folglich ist

$$\varepsilon' = [t_1 \ldots t_{\mu-2}, t_{\mu-1} - 1, \tau_\mu + 1, \tau_{\mu+1}, \ldots, \tau_\lambda] (K)$$

der auf dem Kreise benachbarte Eckpunkt.

Es sei noch bemerkt, dass aus der obigen Gleichung zwischen $K_{\lambda-1}, K_\lambda, K_{\lambda+1}$ folgt:

$$K_{\lambda-1} : K_\lambda = \overline{\tau_\lambda + 2} - 1 : \left(\overline{\tau_{\lambda+1} + 2} - 1 : \left(\overline{\tau_{\lambda+2} + 2} - \cdots\right)\right).$$

Zur Erläuterung diene das frühere Beispiel $q a_1 - p a_0 = -98$, oder, für $p = \varpi + 1$,

$$q a_1 - \varpi a_0 = 170.$$

Nach dem in pag. 206 aufgestellten Schema wird:

$$\varepsilon = 170 = 1 \cdot 117 + 53, \quad 53 = 1 \cdot 49 + 4, \quad 4 = 1 \cdot 3 + 1,$$
$$1 = 1 \cdot 1 + \mu \cdot 0,$$

$$\varepsilon = [1;\ 0, 1, 0;\ 0, 0, 1;\ 0, 1] (K) + \mu a_7,$$
$$q = 1 + 5 + 55 + 197 + 268\mu = 258 + 268\mu,$$
$$\varpi = 0 + 2 + 24 + 86 + 117\mu = 112 + 117\mu.$$

Die obigen Betrachtungen lassen sich offenbar auch auf die Reihe k der negativen Minima anwenden. Man erhält dann für das Beispiel folgende Rechnung (s. pag. 208):

$$-\varepsilon = 98 = 2\cdot 34 + 30, \qquad 30 = 1\cdot 19 + 11,$$
$$11 = 2\cdot 4 + 3, \qquad 3 = 2\cdot 1 + 1,$$
$$-\varepsilon = 2\cdot 34 + 1\cdot 19 + 2\cdot 4 + 2\cdot 1 + 1$$
$$= [0,2;\ 1,2;\ 2;\ 1]\ (k),$$
$$q = 2\cdot 2 + 1\cdot 9 + 2\cdot 16 + 2\cdot 71 + (71 + 268\mu) = 258 + 268\mu,$$
$$p = 2\cdot 1 + 1\cdot 4 + 2\cdot 7 + 2\cdot 31 + (31 + 117\mu) = 113 + 117\mu.$$

Hierher gehört auch die Aufgabe über die Termine und Perioden der Venus-Vorübergänge, die in der Einleitung darauf zurückgeführt ist, die Ungleichheit

$$\varepsilon - \delta < q a_1 - p a_0 < \varepsilon + \delta$$

in ganzen Zahlen p und q zu lösen. Man bringe die Grenzwerthe, die wir beide als positiv voraussetzen wollen, auf die Form

$$\varepsilon + \delta = [t_1', t_2', t_3', \ldots]\ (K),$$
$$\varepsilon - \delta = [t_1'', t_2'', t_3'', \ldots]\ (K).$$

Darauf suche man die Eckpunkte des ersten Polygons, $t_1 K_1$, welche zwischen $\varepsilon + \delta$ und $\varepsilon - \delta$ liegen. Sollten solche nicht vorhanden sein, so betrachte man dasjenige Polygon, welches zuerst Eckpunkte innerhalb der bezeichneten Strecke hat. Diese seien $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{\mu-1}$, ausserdem sei $\varepsilon_0 = \varepsilon + \delta$, $\varepsilon_\mu = \varepsilon - \delta$. Zu $\varepsilon_\nu = [t_1, t_2, \ldots, t_\lambda]\ (K)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, \mu - 1)$ gehört dann $p = [t_1, t_2, \ldots, t_\lambda]\ (N)$ und p ist die Anzahl der Jahre, nach denen von der in ε_ν stehenden Erde ein Venus-Vorübergang zu beobachten sein wird. Man bestimmt nun die Eckpunkte des folgenden, $(\lambda + 1)^{\text{ten}}$, Polygons, welche zwischen ε_ν und $\varepsilon_{\nu+1}$ liegen, und zwar dadurch, dass man $\varepsilon_\nu = [t_1, t_2, \ldots, t_\lambda, 0]\ (K)$ in der oben angegebenen Art wiederholt um möglichst wenig vermindert. Die zugehörigen Werthe von p geben dann die Zeitpunkte für die Wiederkehr solcher Vorübergänge an, die in ihrem Verlauf dem vorher betrachteten möglichst ähnlich sind. Die Dauer der kürzesten Perioden ist daher V_λ, für längere Zeiträume ist sie durch $V_{\lambda+1}$ zu ersetzen, schliesslich muss sich jede Periode als mangelhaft erweisen.

Dasselbe Verfahren wird bei der in der Einleitung erwähnten Aufgabe erforderlich, für eine von 169 bis 289 wachsende ganze Zahl n diejenigen Werthe zu bestimmen, welche den ganzzahligen Theil von $n \cdot \frac{192}{1001}$ um eine Einheit wachsen lassen. Hier erhält man:

λ	1	2	3	4	5	6	7
a	192	41	28	13	2	1	0
n	5	4	1	2	6	2	∞
Z	0	1	4	5	14	89	192
N	1	5	21	26	73	464	1001

Da $n < 289$, so sind die Näherungswerthe nur bis zum fünften heranzuziehen, weshalb man einfacher $n \cdot \frac{14}{73}$ betrachten kann. Ueberschreitet dieser Ausdruck für $n = q$ die ganze Zahl p, so ist

$$q \cdot \frac{14}{73} - p < \frac{14}{73},$$

also

$$q \cdot 14 - p \cdot 73 < 14.$$

Für $a_1 = 14$, $a_0 = 73$ ergiebt sich

λ	0	1	2	3	4	5
a	73	14	3	2	1	0
n		5	4	1	2	∞
Z	1	0	1	4	5	14
N	0	1	5	21	26	73

$\lambda, (\lambda\mu)$	1	(2,1)	(2,2)	(2,3)	3	(4,1)	5
K	14	11	8	5	2	1	0
U	0	1	2	3	4	9	14
V	1	6	11	16	21	47	73

Nun ist

$$14 = [1;\ 0, 0, 0, 0;\ 0]\ (K),$$

daher folgt aus

$$q \cdot 14 - p \cdot 73 = \varepsilon < 14,$$

dass

$$\varepsilon = [0;\ t_2 t_3 t_4 t_5,\ t_6]\ (K),$$

wo den Coefficienten keine besonderen Beschränkungen aufzuerlegen sind. Deutet man dieses Coefficientensystem nach den Einheiten V statt K, so wird

$$q = [0;\ t_2 t_3 t_4 t_5;\ t_6]\ (V)$$
$$= [0;\ h_{21}, h_{22}, h_{23}, h_3;\ h_{4,1}]\ (N).$$

Das Maximum von h_3 ist $n_3 + 1 = 2$, von den übrigen Coefficienten ist es $= 1$.

Bestimmt man nun die Coefficienten zuerst so, dass der Werth von q möglichst gross wird, und veringert denselben dann um möglichst wenig, so ergeben sich folgende Systeme:

$[t] =$	[0,0001,1]	[0,0010,1]	[0,0100,1]	[0,1000,1]	[0,0000,1]	[0,0002,0]	[0,0011,0]
$q =$	68	63	58	53	47	42	37
$p =$	13	12	11	10	9	8	7
$[t] =$	[0,0101,0]	[0,1001,0]	[0,0001,0]	[0,0010,0]	[0,0100,0]	[0,1000,0]	[0,0000,0]
$q =$	32	27	21	16	11	6	0
$p =$	6	5	4	3	2	1	0

Hier können q und p um gleiche Vielfache von 73 und 14 erhöht werden, so dass man für das Gebiet 169 ... 289 erhält:

$q =$ 173, 178, 183, 188, 193; 199, 204, 209, 214, 219; 225, 230, 235, 240; 246, 251, 256, 261, 266; 272, 277, 282, 287.

$p =$ 33, 34, ..., 54, 55.

Nach der Einleitung wäre $q = 173$ ein angenäherter Werth der $(p+5)^{\text{ten}}$, also 38^{ten} Primzahl, 178 ein genäherter Werth der 39^{ten} u. s. f. Thatsächlich ist die 38^{te} gleich 163, die 39^{te} gleich 167. Ueberhaupt findet man die genäherten Werthe um 2 bis 15 Einheiten zu gross.

Zum Schluss sei noch bemerkt, dass die hier dargelegte Auffassung der Kettenbrüche auch zu den Theilbruchreihen führt. Es rolle nämlich der Kreis a_1 in dem Kreise a_0 so oft seine Peripherie ab, bis er den Anfangspunkt des festen Kreises wieder überschritten hat, so dass

$$n_1 a_1 = a_0 + a_2, \quad (a_2 < a_1).$$

Um das Resultat einer beliebig häufigen Wiederholung dieser Bewegung darzustellen, denke man sich, dass ein Kreis vom Umfange a_2 gleichfalls auf der innern Peripherie von a_0 rollt. Dieser erreiche den Ausgangspunkt wieder, während er seine Peripherie zum n_2^{ten} Male abträgt, so dass $n_2 a_2 = a_0 + a_3$, $(a_3 < a_2)$.

Durch Wiederholung des zu a_3 führenden Cyklus von Umläufen gelangt man zu a_4, so dass

$$n_3 a_3 = a_0 + a_4, \quad (a_4 < a_3)$$

u. s. w., allgemein

$$n_\lambda a_\lambda = a_0 + a_{\lambda+1}, \quad (a_{\lambda+1} < a_\lambda).$$

Ist $N_\lambda = n_1 n_2 \ldots n_{\lambda-1}$, so gelangt man auch dadurch, dass man die zu dem Bogen a_1 gehörende Sehne N_λ mal in den Kreis a_0 einträgt, zu dem Punkte a_λ. Diesem entspricht der folgende Näherungsbruch für $\frac{a_1}{a_0}$:

$$\frac{Z_\lambda}{N_\lambda} = \frac{1}{n_1}\left(1 + \frac{1}{n_2}\left(1 + \cdots + \frac{1}{n_{\lambda-1}}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1 n_2} + \cdots + \frac{1}{n_1 n_2 \ldots n_{\lambda-1}}.$$

Der Fehler desselben ist $\frac{a_\lambda}{a_0 N_\lambda}$ und wird durch das schnelle Anwachsen des Nenners N_λ bald sehr klein, wenn auch der Zähler nur mässig abnimmt. Dass letzterer sogar constant bleiben kann, ergiebt sich aus folgendem Beispiel: Ist $a_0 = 9$, a_1 unendlich wenig kleiner als 1, so wird $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = 1$, $n_1 = n_2 = n_3 = \cdots = 10$.

Für Z und N gelten die Recursionsformeln:

$$Z_{\lambda+1} = n_\lambda Z_\lambda + 1, \quad N_{\lambda+1} = n_\lambda N_\lambda.$$

Combinirt man die Werthe von a_0 aus je zwei benachbarten der obigen Gleichungen, so erhält man ein System, welches der Form nach zu einem Kettenbruch für $\frac{a_1}{a_0}$ führt, der aber nicht ganzzahlige Quotienten hat.

Berlin, 14. November 1886.

Die geometrische Deutung einer gewissen Invariante bei ebenen Collineationen.*)

Von

J. Kraus in Mainz.

1. Die bei drei ebenen Reciprocitäten

$$\xi_\varkappa = a_{\varkappa 1}x_1 + a_{\varkappa 2}x_2 + a_{\varkappa 3}x_3 \quad (\varkappa=1, 2, 3)$$
$$\xi'_\varkappa = b_{\varkappa 1}x_1 + b_{\varkappa 2}x_2 + b_{\varkappa 3}x_3 \quad ,,$$
$$\xi''_\varkappa = c_{\varkappa 1}x_1 + c_{\varkappa 2}x_2 + c_{\varkappa 3}x_3 \quad ,,$$

auftretende simultane Invariante

$$\mathsf{H} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$+ \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ist eine bemerkenswerthe Verallgemeinerung der „harmonischen Invariante“ zweier Kegelschnitte (Rosanes, Math. Ann. Bd. 23, S. 413), in welche sie übergeht, wenn die Reciprocitäten Polarsysteme werden und zwei mit einander zusammenfallen. Indem man zu den Collineationen

$$\xi_i = m_{i1}\xi_1' + m_{i2}\xi_2' + m_{i3}\xi_3' \quad (i=1, 2, 3)$$
$$\xi_i'' = n_{i1}\xi_1' + n_{i2}\xi_2' + n_{i3}\xi_3' \quad ,,$$

übergeht, tritt an Stelle von H die Invariante

$$\mathsf{Z} = m_{22}n_{33} + m_{33}n_{22} + m_{33}n_{11} + m_{11}n_{33} + m_{11}n_{22} + m_{22}n_{11} - m_{23}n_{32}$$
$$- m_{32}n_{23} - m_{31}n_{13} - m_{13}n_{31} - m_{12}n_{21} - m_{21}n_{12}.$$

Im Folgenden soll das Verschwinden dieser Invariante geometrisch gedeutet werden.

*) Auszug aus der Inauguraldissertation des Verfassers, Giessen 1886.

Jede Collineation wird durch zwei homologe Vierecke festgelegt, zwei Collineationen können als durch drei Vierecke definirt betrachtet werden. Specielle Beschaffenheiten von Collineationen finden in einer entsprechenden eigenthümlichen Lage der zu Grunde gelegten Vierecke ihren Ausdruck. Es erwächst daraus in unserem Falle die Aufgabe, diejenige Lage der homologen Vierecke zu beschreiben, welche durch die Annahme $\mathsf{Z} = 0$ bedingt wird.

2. Herr Pasch zeigt (Ann. Bd. 26, S. 211 ff.), wie zwei Vierecke $abcd$ und $a'b'c'd'$ gelegen sein müssen, damit die entsprechende Collineation sich in eingeschriebener Dreieckslage befinde. In diesem Falle giebt es nämlich ein Vierseit $\alpha\beta\gamma\delta$, welches dem Viereck $abcd$ „verkehrt eingeschrieben" (Ann. Bd. 26, S. 212) und dem andern umschrieben ist. Die erforderliche Bedingung lautet:

$$(abd)(abc)b'cd)(a'd'c') + (adc)(abc)(bc'd)(a'b'd') \\ + (adc)(abd)(bcd')(a'b'c') = 0.$$

Um diese Lage kurz zu bezeichnen, wollen wir in Analogie zur Reye'schen Ausdrucksweise sagen, das System $a'b'c'd'$ „stütze" das System $abcd$, und dieses „ruhe" auf jenem. Von dem Vierecke $a'b'c'd'$ sagen wir dementsprechend, es stütze das Viereck $abcd$; und von diesem, es ruhe auf $a'b'c'd'$.

Es ist ferner bekannt, dass zu zwei geraden Punktreihen einer Ebene, xyz und $x'y'z'$, sich stets eine Gerade — nämlich die Verbindungslinie der Punkte $(yz', y'z)$, $(zx', z'x)$ und $(xy', x'y)$ — ergiebt als Ort der Punkte, aus denen involutorische Strahlenpaare nach den Punktepaaren xx', yy', zz' hingehen. Diese Gerade soll der Kürze wegen im Folgenden die *Involutionslinie* der beiden Punktreihen heissen.

3. Ich beweise nun zuerst den Satz: *Wenn in einer Ebene irgend zwei vollständige Vierecke $abcd$, $a'b'c'd'$ gegeben sind mit den Nebenecken*

$$e = (ad, bc), \quad f = (bd, ca), \quad g = (cd, ab),$$
$$e' = (a'd', b'c'), \quad f' = (b'd', c'a'), \quad g' = (c'd', a'b'),$$

und man construirt zu je zwei homologen Punktreihen bce und $b'c'e'$, caf und $c'a'f'$ u. s. w. die Involutionslinie, so sind die entstehenden sechs Geraden wieder die Seiten eines vollständigen Vierecks $\alpha\beta\gamma\delta$, welches wir *das Involutionsviereck* der beiden gegebenen nennen wollen.

Beweis: Unter der Voraussetzung

$$\varrho : \sigma : \tau : \omega = (bcd) : -(cda) : (dab) : -(abc)$$
$$\varrho' : \sigma' : \tau' : \omega' = (b'c'd') : -(c'd'a') : (d'a'b') : -(a'bc')$$

hat man identisch:

$$(1) \qquad \varrho a_\varkappa + \sigma b_\varkappa + \tau c_\varkappa + \omega d_\varkappa \equiv 0, \quad \varrho' a'_\varkappa + \sigma' b'_\varkappa + \tau' c'_\varkappa + \omega' d'_\varkappa \equiv 0$$
$$(\varkappa = 1, 2, 3).$$

Ferner darf man schreiben

$$\lambda e_\varkappa + \varrho a_\varkappa + \omega d_\varkappa = 0, \quad \mu f_\varkappa + \sigma b_\varkappa + \omega d_\varkappa = 0, \quad \nu g_\varkappa + \tau c_\varkappa + \omega d_\varkappa = 0$$
$$(\varkappa = 1, 2, 3)$$

u. s. w.

Nun lautet die Gleichung der Involutionslinie zweier projectivischer Punktreihen abc und $a'b'c'$, wenn gesetzt wird

$$\varrho a_\varkappa + \sigma b_\varkappa + \tau c_\varkappa = 0, \quad \varrho' a'_\varkappa + \sigma' b'_\varkappa + \tau' c'_\varkappa = 0 \quad (\varkappa = 1, 2, 3),$$

folgendermassen:

$$\sigma\tau'(bc'x) + \sigma'\tau(b'cx) = 0,$$

oder

$$\tau\varrho'(ca'x) + \tau'\varrho(c'ax) = 0,$$

oder

$$\varrho\sigma'(ab'x) + \varrho'\sigma(a'bx) = 0.$$

Bezeichnet man daher die Gleichungen der Involutionslinien von bce und $b'c'e'$, caf und $c'a'f'$, u. s. w. mit bezw. $[bc] = 0$, $[ca] = 0$, u. s. w., so ist:

$$\begin{aligned}
[bc] &= \sigma\tau'(bc'x) + \sigma'\tau(b'cx) \\
&= -[(cda)(d'a'b')(bc'x) + (c'd'a')(dab)(b'cx)], \\
[ca] &= \tau\varrho'(ca'x) + \tau'\varrho(c'ax) \\
&= (dab)(b'c'd')(ca'x) + (d'a'b')(bcd)(c'ax), \\
[ab] &= \varrho\sigma'(ab'x) + \varrho'\sigma(a'bx) \\
&= -[(bcd)(c'd'a')(ab'x) + (b'c'd')(cda)(a'bx)], \\
[ad] &= \varrho\omega'(ad'x) + \varrho'\omega(a'dx) \\
&= -[(bcd)(a'b'c')(ad'x) + (b'c'd')(abc)(a'dx)], \\
[bd] &= \sigma\omega'(bd'x) + \sigma'\omega(b'dx) \\
&= (cda)(a'b'c')(bd'x) + (c'd'a')(abc)(b'dx), \\
[cd] &= \tau\omega'(cd'x) + \tau'\omega(c'dx) \\
&= -[(dab)(a'b'c')(cd'x) + (d'a'b')(abc)(c'dx)],
\end{aligned}$$

sodass $[bc] = -[cb]$, u. s. w.

Die Identitäten (1) liefern, mit bezw. $(xa')_\varkappa$ und $(xa)_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, 3)$ componirt:

$$\varrho(a'ax) + \sigma(a'bx) + \tau(a'cx) + \omega(a'dx) \equiv 0,$$
$$\varrho'(aa'x) + \sigma'(ab'x) + \tau'(ac'x) + \omega'(ad'x) \equiv 0.$$

Durch abermaliges Componiren mit resp. ϱ', ϱ ergiebt sich

(2) $$[ab] + [ac] + [ad] \equiv 0,$$

d. h. die drei Geraden $[ab]$, $[ac]$, $[ad]$ gehen durch einen Punkt; derselbe soll α heissen. Indem man in (2) a der Reihe nach mit b, c, d vertauscht, erhält man weiter:

$$(3) \qquad [ba] + [bc] + [bd] \equiv 0,$$
$$(4) \qquad [ca] + [cb] + [cd] \equiv 0,$$
$$(5) \qquad [da] + [db] + [dc] \equiv 0,$$

d. h. die Geraden $[ba]$, $[bc]$, $[bd]$ gehen durch einen Punkt β, $[ca]$, $[cb]$, $[cd]$ durch einen Punkt γ, $[da]$, $[db]$, $[dc]$ durch einen Punkt δ, und das Viereck $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ ist das Involutionsviereck von $a\,b\,c\,d$ und $a'\,b'\,c'\,d'$; w. z. b. w.

4. Wenn drei Vierecke $abcd$, $a'b'c'd'$, $a''b''c''d''$ eine solche Lage in der Ebene haben, dass das Involutionsviereck $\alpha\beta\gamma\delta$ von $a'b'c'd'$ und $a''b''c''d''$ auf dem Vierecke $abcd$ ruht, so ist (nach 2) die Gleichung erfüllt:

$$(1) \qquad (\alpha\beta\delta)(\alpha\beta\gamma)(b\gamma\delta)(adc) + (\alpha\delta\gamma)(\alpha\beta\gamma)(\beta c\delta)(abd) \\ + (\alpha\delta\gamma)(\alpha\beta\delta)(\beta\gamma d)(abc) = 0.$$

Zufolge 3 hat man identisch:

$$(2) \quad \begin{cases} R_1(\beta\gamma x) = (c'd'a')(d''a''b'')(b'c''x) + (c''d''a'')(d'a'b')(b''c'x), \\ R_2(\gamma\alpha x) = (d'a'b')(b''c''d'')(c'a''x) + (d''a''b'')(b'c'd')(c''a'x), \\ R_3(\alpha\beta x) = (b'c'd')(c''d''a'')(a'b''x) + (b''c''d'')(c'd'a')(a''b'x), \\ R_4(\alpha\delta x) = (b'c'd')(a''b''c'')(a'd''x) + (b''c''d'')(a'b'c')(a''d'x), \\ R_5(\beta\delta x) = (c'd'a')(a''b''c')(b'd''x) + (c''d''a'')(a'b'c')(b''d'x), \\ R_6(\gamma\delta x) = (d'a'b')(a''b''c'')(c'd''x) + (d''a''b'')(a'b'c')(c''d'x), \end{cases}$$

ferner:

$$(3) \quad \begin{cases} R_3(\alpha\beta x) + R_2(\alpha\gamma x) + R_4(\alpha\delta x) \equiv 0, \\ R_3(\beta\alpha x) + R_1(\beta\gamma x) + R_5(\beta\delta x) \equiv 0, \\ R_2(\gamma\alpha x) + R_1(\gamma\beta x) + R_6(\gamma\delta x) \equiv 0, \end{cases}$$

wobei $R_1, R_2, \ldots$ von Null verschiedene constante Factoren bedeuten. Aus (3) berechnet sich

$$(\gamma\delta\alpha) = \frac{R_3}{R_4}(\alpha\beta\gamma), \quad (\delta\alpha\beta) = -\frac{R_2}{R_4}(\alpha\beta\gamma).$$

Werden diese Werthe, sowie die Ausdrücke für $(b\gamma\delta)$, $(\beta c\delta)$, $(\beta\gamma d)$, welche sich aus (2) ergeben, in Gleichung (1) eingesetzt, so kommt:

$$\frac{R_2}{R_6}(cda)\,[(d'a'b')(a''b''c'')(c'd''b) + (d''a''b'')(a'b'c')(c''d'b)]$$
$$+\ \frac{R_3}{R_5}(dab)\,[(c'd'a')(a''b''c'')(b'cd'') + (c''d''a'')(a'b'c')(b''cd')]$$
$$+\frac{R_2R_3}{R_1R_4}(abc)\,[(c'd'a')(d''a''b')(b'c''d) + (c''d''a'')(d'a'b')(b''c'd)] = 0.$$

Die Identitäten (3) liefern ausserdem

$$\frac{R_2}{R_6} = \frac{R_3}{R_5} = \frac{R_2R_3}{R_1R_4}.$$

Dies berücksichtigt, geht letztere Gleichung (nach entsprechender Anordnung) über in:

$$(4)\quad (bc'd'')(cda)(d'a'b')(a''b''c'') + (bc''d')(cda)(d''a''b'')(a'b'c') + (b'cd'')(c'd'a')(dab)(a''b''c'') + (b''cd')(c''d''a'')(dab)(a'b'c') + (b'c''d)(c'd'a')(d''a''b'')(abc) + (b''c'd)(c''d''a'')(d'a'b')(abc) = 0,$$

welche Gleichung bestehen bleibt, wenn man in ihr $abcd$ mit $a'b'c'd'$ oder $a''b''c''d''$ vertauscht; d. h.

Wenn von drei Vierecken $abcd$, $a'b'c'd'$, $a''b''c''d''$ eines das Involutionsviereck der beiden andern stützt, so gilt dies von jedem derselben.

5. Benutzt man drei Vierecke $abcd$, $a'b'c'd'$, $a''b''c''d''$, welche die in 4 beschriebene Lage haben, zur Definition zweier Collineationen $[abcd,\ a'b'c'd']$ und $[abcd,\ a''b''c''d'']$, so folgt aus Gleichung (4) der vorigen Nummer bekanntlich:

$$(bc'd'') + (bc''d') + (b'cd'') + (b''cd') + (b'c''d) + (b''c'd) = 0,$$

welches der algebraische Ausdruck für die Lage irgend eines Dreiecks bcd zu seinen homologen $b'c'd'$ und $b''c''d''$ in den beiden Collineationen ist.

Wenn man andererseits bezeichnet

$$c_i' = m_{i1}c_1 + m_{i2}c_2 + m_{i3}c_3,\quad d_i' = m_{i1}d_1 + m_{i2}d_2 + m_{i3}d_3,\quad (i=1,2,3)$$
$$c_i'' = n_{i1}c_1 + n_{i2}c_2 + n_{i3}c_3,\quad d_i'' = n_{i1}d_1 + n_{i2}d_2 + n_{i3}d_3,\quad \text{„}$$

und wenn

$$\mathsf{Z} = m_{22}n_{33} + m_{33}n_{22} + m_{33}n_{11} + m_{11}n_{33} + m_{11}n_{22} + m_{22}n_{11} - m_{23}n_{32} - m_{32}n_{23} - m_{31}n_{13} - m_{13}n_{31} - m_{12}n_{21} - m_{21}n_{12}$$

bedeutet, so besteht (wie man durch zweimalige Anwendung eines δ-Processes findet) die Identität:

$$\mathsf{Z}(bcd) = (bc'd'') + (bc''d') + (b'cd'') + (b''cd') + (b'c''d) + (b''c'd),$$

woraus für $\mathsf{Z} = 0$ ebenfalls folgt

$$(bc'd'') + (bc''d') + (b'cd'') + (b''cd') + (b'c''d) + (b''c'd) = 0;\ \text{d. h.}$$

Vermöge der durch $Z = 0$ definirten Collineationen werden jedem Vierecke $abcd$ der Ebene zwei andere $a'b'c'd'$ und $a''b''c''d''$ als entsprechende zugewiesen, derart, dass das Involutionsviereck je zweier der drei Vierecke $abcd$, $a'b'c'd'$, $a''b''c''d''$ auf dem dritten ruht.

Mainz, im October 1886.

Bemerkungen über den Beweis des Satzes von der Winkelsumme des Dreiecks.*)

Von

Julius Petersen in Kopenhagen.

1. Der Grund für die häufig angetroffene Unklarheit in der Auffassung der ersten Principien der Mathematik liegt nach meiner Ueberzeugung zum grossen Theile darin, dass man die Mathematik, welche eine rein logische Wissenschaft darstellt, mit der Physik, die im wesentlichen eine Erfahrungswissenschaft ist, verwechselt. *Die Mathematik wählt ihre Voraussetzungen willkürlich* und leitet aus denselben ab, was sich auf logischem Wege ableiten lässt. Dass aus praktischen Gründen die Voraussetzungen mit Rücksicht auf das gewählt werden, was in der Natur vorkommt, hat in wissenschaftlicher Beziehung wenig Bedeutung.

2. In der Algebra kommt es besonders darauf an, dass der Begriff „Gleichheit" richtig aufgefasst wird. $a = b$ drückt nur aus, dass a und b Dinge bezeichnen sollen, welche in *einer gewissen Beziehung*, die ich vor Augen habe, an die Stelle von einander gesetzt werden können. Wenn ich einen Zwanzigmarkschein gleich 20 Reichsmark in Silber setze, so geschieht das, weil ich an eine Anwendung derselben denke, bei der beide Theile gleich gut sind. Wenn ich $a + b = b + a$ setze, so erhalte ich dadurch keinen Satz, den ich beweisen kann, denn es giebt viele Fälle, wo $a + b$ nicht gleich $b + a$ ist; aber ich erhalte dadurch eine Grundlage für die weitere Entwickelung, und diese wähle ich, weil die Erfahrung mich gelehrt hat, dass man oft auf solche Fälle trifft, in denen diese Gleichung gültig ist. a und b sind einfache Zeichen, die in der reinen Mathematik nichts bedeuten. Erst wenn ich die in der Mathematik gewonnenen Resultate auf praktische Verhältnisse anwenden will, gebe ich a und b bestimmte Bedeutungen, und ich muss dann jedesmal besonders untersuchen, ob diese so beschaffen sind, dass die Grundgleichung $a + b = b + a$ und die übrigen Grundgleichungen, welche ich eingeführt habe, Gültigkeit

*) Uebersetzt aus der Tidsskrift for Mathematik, 1883, V. Reihe, 1. Jahrgang, S. 3—11, durch Hrn. R. v. Fischer-Benzon.

behalten. Die Zeichen $>$ und $<$ haben weniger Bedeutung in der Mathematik, da sie nur auf ein sehr begrenztes Gebiet (positive und negative Zahlen) Anwendung finden. Man sieht, dass es nach dieser Auffassung in der Algebra keine Axiome mehr giebt, da alle Sätze, welche unter dem Namen „Axiome" gehen, sich leicht beweisen lassen. Aus $a = b$, $b = c$ folgt $a = c$, da die erste Gleichung ausdrückt, dass ich überall da, wo ich b habe, a an die Stelle setzen kann.

Wenn dieser Satz Schwierigkeiten gemacht hat, so hat das seinen Grund darin, dass man den mathematischen Satz mit einem gleichlautenden physikalischen verwechselt hat. Habe ich zwei Stäbe gemessen und gleich lang gefunden, so lehrt mich die Erfahrung, dass die Endpunkte derselben nahezu zusammenfallen, wenn ich sie neben einander lege. Ich sage „nahezu", denn der Satz ist nur näherungsweise richtig, da Temperatur, Feuchtigkeit u. s. w. Einfluss auf die Länge haben. Dieser Satz ist deshalb ein reiner Erfahrungssatz über die Eigenschaften des Raumes und der Materie. Er sagt aus, dass blosse Ortsveränderung keinen Einfluss auf die Dimensionen eines Körpers hat, wenn alles übrige unverändert bleibt. In diesem Sinne ist der Satz dem Gesetz der Beharrung ganz analog.

Wenn ich oben gesagt habe, dass die Mathematik ihre Voraussetzungen beliebig wählen kann, so mag es vielleicht richtig sein hinzuzufügen, dass die Voraussetzungen sich nicht widerstreiten dürfen. Jedoch ist dieser Zusatz nicht so nothwendig, wie es beim ersten Blick erscheint. Der Widerstreit muss sich nämlich dadurch zeigen, dass Zeichen, welche von vornherein nach unserer Annahme verschiedene Dinge darstellten, nunmehr in Folge der Voraussetzungen dasselbe Ding darstellen müssen. Dies braucht nicht als absolut falsch aufgefasst zu werden, wohl aber kann es das Gebiet, für welches die bewiesenen Sätze passen, so sehr einschränken, dass die ganze Entwicklung ihre Bedeutung verliert. Bezeichnet a ein beliebiges von den Dingen, welche ich behandle, so beschränkt die Voraussetzung $a + 5 = 7$ das ganze Gebiet auf die Zahl 2. Wir wollen deshalb festsetzen, dass wir von vornherein eine Gruppe von verschiedenen Dingen behandeln, und dass jede Voraussetzung, welche die Gruppe verkleinert, als allgemeine Voraussetzung unzulässig ist.

3. Nach diesen allgemeinen Betrachtungen wende ich mich zu einer genaueren Untersuchung der Grundbegriffe der Geometrie. Die Untersuchung wird hier dadurch erschwert, dass man nicht alle Grundbestimmungen sofort aufzustellen pflegt, sondern dass man immer neue, von der Anschauung entnommene, hinzufügt, je nachdem man Verwendung für dieselben hat. Wie bekannt hat Lobatschewsky eine Geometrie construirt, in der die Summe der Winkel eines Dreiecks

nicht zwei Rechte beträgt. Er hätte ebenso gut viele andere Arten von Geometrie dadurch construiren können, dass er andere Bestimmungen ausschloss, welche keine nothwendige Folge von seiner Definition der Geraden und der Ebene sind, und solcher Bestimmungen giebt es mehrere. Was heisst „innerhalb", was „ausserhalb" eines Dreiecks? Weshalb muss eine Gerade, die eine geschlossene Contur einmal schneidet, hinreichend verlängert dieselbe wenigstens noch einmal schneiden? Weshalb liegen die Medianen eines Dreiecks innerhalb des Dreiecks? Woher weiss man, dass ein Dreieck keinen Winkel haben kann, der grösser ist als 2 Rechte? u. s. w. Obgleich keine von diesen Fragen beantwortet ist, werden alle durch dieselben ausgedrückten Sätze in der sogenannten absoluten Geometrie (Bolyai 1872) angewandt. Es sind also neue, durch die Anschauung gewonnene Bestimmungen, welche nach und nach hinzugezogen werden.

Es liegt nicht in meiner Absicht hier eine vollständige Grundlage der Geometrie zu geben, sondern ich will nur durch Analyse der Grundbegriffe den Grund für die wichtigsten Schwierigkeiten nachzuweisen versuchen, welche die Geometrie jetzt darbietet. Hierbei kommt es darauf an, an jedem Punkte den Begriff, welchen die Anschauung uns gegeben hat, mit dem Begriffe zu vergleichen, den unsere Definitionen bestimmen, um dadurch zu sehen, wieweit der erstere, den wir zu behandeln die Absicht haben, mit dem letzteren, den wir wirklich behandeln, übereinstimmt.

Man sieht nun leicht, dass die angeschauten Raumgrössen nicht mit den definirten übereinstimmen, sondern nur specielle Fälle derselben sind. So ist das Fehlen der Grösse eine wesentliche Eigenschaft des angeschauten Punktes, während wir denselben in der Geometrie nur als das einzelne, als Individuum benutzen.

Um mathematisch zu sprechen, können wir sagen, dass der Punkt etwas ist, das durch drei Parameter bestimmt wird, welche von $-\infty$ bis $+\infty$ so variiren können, dass verschiedenen Werthsystemen verschiedene Punkte entsprechen. Der Inbegriff aller möglichen Punkte ist der Raum, der Inbegriff aller Punkte, deren Parameter einer gewissen Bedingung genügen, eine Fläche u. s. w.*)

Des Beispiels wegen will ich eine Gerade, die durch einen festen Punkt geht, einen „Punkt" nennen. Der Inbegriff aller (∞^2) Geraden des Raumes, welche durch den festen Punkt gehen, ist eine „Ebene". Der Inbegriff der unendlich vielen (∞) Geraden, die durch den festen

*) Grassmann ist vielleicht der erste, welcher versucht hat eine Geometrie aufzubauen ohne die Anschauung zu benutzen (Die lineale Ausdehnungslehre 1844). Später hat F. Klein (Math. Ann. Bd. IV und VI) gezeigt, wie man auf der Grundlage von Cayleys projectivischer Massbestimmung die ganze absolute Geometrie aufbauen kann.

Punkt gehen und in derselben Ebene liegen, ist eine „Gerade". Man sieht, dass die gewöhnlichen Definitionen ebenso gut auf diese „Punkte" und „Geraden" passen wie auf diejenigen, welche wir anschauen. Eine „Gerade" ist bestimmt durch zwei „Punkte"; zwei „Geraden" schneiden sich in einem „Punkte"; drei „Geraden" bilden ein Dreieck (eine dreiseitige Ecke); die „Ebene" lässt sich so bewegen, dass sie sich fortwährend selbst deckt; eine „Gerade" lässt sich in congruente Theile theilen, kurz, so lange wir nur die Definitionen und nicht die Anschauung benutzen, passen die allgemeinen Entwicklungen der Geometrie auch hier. In den neuen Dreiecken beträgt indessen die Summe der Winkel nicht 2 Rechte. Es ist also klar, dass man den Satz über die Winkelsumme nicht aus den aufgestellten Voraussetzungen beweisen kann*).

Selbst wenn wir uns an den Punkt, wie wir ihn durch Anschauung haben, halten, so sieht man leicht, dass die Bestimmung der Geraden als derjenigen Linie, welche durch zwei Punkte bestimmt ist, viel zu weit ist. Dieselbe gilt z. B. auch für Kegelschnitte, die schon durch drei feste Punkte gehen. Fügen wir die Bestimmung hinzu, dass die Gerade sich in sich selbst verschieben lassen soll, so passt die Definition auf Kreise, die schon durch einen festen Punkt gehen. Die Definition der Ebene passt ebenso gut auf eine Kugel, die durch einen festen Punkt geht u. s. w. Geraden in einer Ebene können Kreise auf einer Kugel sein, die durch einen festen Punkt gehen, oder Hauptkreise einer Kugel. Ein beachtenswerther Unterschied existirt zwischen diesen beiden Arten von Geraden. Diejenigen der ersten Art schneiden sich in einem Punkte (der feste Punkt kann ausser Acht gelassen werden), während die Hauptkreise sich in zwei Punkten schneiden; zugleich zeigt die Bestimmung durch zwei Punkte einen Ausnahmefall, wenn nämlich die beiden Punkte diametral entgegengesetzt sind. Ein ähnlicher Fall tritt ein, wenn man als Geraden Curven dritter Ordnung nimmt, welche durch sieben feste Punkte gehen; hier sind die Geraden aber nicht congruent in der gewöhnlichen Bedeutung des Wortes. Versteht man dagegen unter congruenten Linien solche, welche sich zur Deckung bringen lassen, wenn man sie so bewegt (verändert), dass sie fortfahren den durch Definition aufgestellten Bedingungen zu genügen, so werden zwei Geraden auch hier congruent, so dass man Sätze über solche Curven dritter Ordnung aus Sätzen, die der sphärischen Geometrie entnommen sind, muss ableiten können.

Man sieht, dass nach der hier entwickelten Auffassung eine

---

*) F. Klein benutzt Math. Ann. Bd. IV dasselbe Beispiel als das einfachste Beispiel für die von ihm sogenannte elliptische Geometrie.

Geometrie mit vier Dimensionen ebenso berechtigt ist wie eine mit drei Dimensionen. Jedoch giebt es einen Unterschied. Wenn man seine Grundbestimmungen wählt, so müssen diese von einander unabhängig sein und sich nicht widerstreiten. Während man nun wohl beweisen kann, dass eine Bestimmung sich aus anderen ableiten lässt, kann man dagegen nicht beweisen, dass eine Bestimmung sich aus gewissen anderen nicht ableiten lässt. Einen solchen Beweis hat man erst, wenn die Erfahrung uns Gebiete gezeigt hat, auf denen die Bestimmungen getrennt vorkommen. Dass Lobatschewsky in seiner Geometrie keine Widersprüche findet, ist kein Beweis dafür, dass solche nicht von anderen gefunden werden können; erst wenn man ein Gebiet nachgewiesen hat, wo die Winkelsumme nicht 2 Rechte beträgt, während die übrigen Voraussetzungen erfüllt sind, ist der Beweis erbracht, dass die Voraussetzungen von einander unabhängig sind. Ein solches Gebiet habe ich oben bei der dreiseitigen Ecke nachgewiesen, wo die Winkelsumme grösser als 2 Rechte war.

Hier scheint ein Widerspruch vorzuliegen, da Legendre einen als exact betrachteten Beweis dafür geliefert hat, dass die Winkelsumme gleich zwei Rechten oder kleiner ist. Die Erklärung ergiebt sich leicht bei einer genaueren Untersuchung von Legendre's Beweis. A sei der kleinste Winkel im Dreieck ABC. Die Mediane AM wird um sich selbst bis N verlängert und NB wird gezogen. Dann hat das Dreieck ANB dieselbe Winkelsumme wie das gegebene Dreieck, und einer von seinen Winkeln ist höchstens gleich $\frac{1}{2} A$. Fährt man auf dieselbe Weise fort, so erhält man ein Dreieck, in dem die Summe von zwei Winkeln so klein werden kann, wie man will. Die Winkelsumme kann deshalb nicht grösser werden als der grösste Werth, den ein einzelner Winkel des Dreiecks haben kann.

Die Voraussetzung, welche hier stillschweigend gemacht wird, ist die, dass der Winkel ABN, den man betrachtet, immer einer der inneren Winkel des Dreiecks ABN ist. Diese Voraussetzung hat keine Gültigkeit für die dreiseitige Ecke, dieselbe als Dreieck aufgefasst, und dadurch zeigt sich, dass sie von den übrigen Voraussetzungen unabhängig ist*).

Wenn wir gesehen haben, dass der Grund, weshalb wir genöthigt sind in der Geometrie mitten in der Entwicklung Axiome aufzustellen, darin liegt, dass man in Wirklichkeit ein umfassenderes Gebiet be-

*) Legendre und Lobatschewsky haben in Wirklichkeit nur die Geometrie behandelt, welche F. Klein die hyperbolische nennt. Der Grund dafür liegt in den oben genannten stillschweigenden Voraussetzungen, welche nach Klein's Darstellung mit der Voraussetzung von der unendlichen Länge der Geraden zusammenfallen. Das weiter unten von Poincaré entlehnte Beispiel ist ein specieller Fall aus der hyperbolischen Geometrie.

handelt als das ist, welches man eigentlich vor Augen hat, so ist leicht zu erkennen, wie man dem Mangel abhelfen muss. Es kommt darauf an, das Gebiet durch neue, von den früheren unabhängige Bestimmungen einzuschränken. Indessen muss man hier die Forderung stellen, dass die nähere Bestimmung sich direct auf die Gerade und die Ebene beziehen muss und keine anderen, für die Auffassung dieser Gebilde unnöthigen Begriffe voraussetzen darf, wie z. B. den Winkelbegriff. Um die fehlende Bestimmung zu erhalten, sucht man eine solche Eigenschaft der Ebene und der Geraden, welche sich nicht bei Kugel und Hauptkreis findet.

Unter Verschiebung einer Ebene will ich eine solche Bewegung einer Ebene in sich selbst verstehen, bei der eine Gerade in der Ebene längs sich selbst verschoben wird. Die Bestimmung der Ebene, die ich hinzufügen will, ist dann folgende:

Wenn ein Punkt nach mehreren Verschiebungen einer Ebene in seine ursprüngliche Lage zurückkehrt, so befindet sich die ganze Ebene in ihrer ursprünglichen Lage.

Nun sei $ABCD\ldots$ ein Polygon. Eine bewegliche Ebene wird nach einander um die Strecken AB, BC, $CD\ldots$ verschoben. Indem nun A nach und nach die Lagen A, B, C, $D\ldots$ einnimmt, trägt man in der beweglichen Ebene die Nebenwinkel der Polygonwinkel A, B, $C\ldots$ ab, die also alle neben einander abgetragen werden und den Scheitelpunkt gemeinsam haben. Wenn A nach A zurückgekehrt ist, befindet sich die bewegliche Ebene in ihrer ursprünglichen Lage, so dass der letzte Winkelschenkel, der abgetragen wird, mit dem ersten zusammenfällt. Die Summe der Nebenwinkel (Aussenwinkel) beträgt also 4 Rechte.

Acceptirt man Legendre's Beweis, so lässt sich nachweisen, dass, wenn ein Dreieck eine Winkelsumme von 2 Rechten hat, alle Dreiecke eine solche haben; dann kann man die oben angeführte Bestimmung darauf beschränken, dass die Ebene in ihre ursprüngliche Lage zurückkehrt, wenn sie längs den Seiten *eines* Dreiecks verschoben worden ist.

Die hinzugefügte Bestimmung gilt nicht für Kugeln und Hauptkreise, wohl aber für Kugeln, auf denen Kreise, die durch einen festen Punkt gehen, die Geraden darstellen. Hier gilt deshalb der Satz von der Winkelsumme, während die Congruenzsätze im gewöhnlichen Sinne keine Gültigkeit haben. Man kann also *eine* Geometrie erhalten mit Congruenz und ohne die constante Winkelsumme, eine *andere* mit der Winkelsumme, aber ohne Congruenzsätze.

Merkwürdig ist es, dass der Satz über die Winkelsumme auf der Kugel sich ohne die oben genannte Voraussetzung beweisen lässt. Die beiden Winkel, welche zwei Kreise mit einander bilden, sind gleich

gross; denn legt man eine Ebene durch die Mittelpunkte der Kugel und der beiden Kreise, so zeichnet sich die eine Seite der Ebene durch nichts vor der anderen aus. Legt man nun drei Kreise durch einen Punkt A, so findet man, dass die Winkel des von ihnen gebildeten Dreiecks auch bei A liegen, und hieraus ergiebt deren Summe sich zu 2 Rechten.

Auch verdient es Beachtung, dass meine ergänzende Definition der Ebene nicht verlangt, dass eine Verschiebung im Allgemeinen keine Drehung mit sich bringen dürfe, sondern nur, dass die Summe der Drehungen, welche bei den Verschiebungen AB, BC, CA... ausgeführt wird, gleich Null sein soll. Bei den Kreisen ist in Wirklichkeit jede der einzelnen Verschiebungen identisch mit einer Drehung, aber die Summe der drei Drehungen, welche bei Verschiebungen längs den Seiten eines Dreiecks ausgeführt wird, ist gleich Null.

4. Zu den bereits gegebenen Beispielen will ich ein neues hinzufügen, welches der im ersten Hefte der „*Acta mathematica*" begonnenen Abhandlung von Poincaré entnommen ist, welches wirklich ein Gebiet darstellt, auf dem Lobatschewsky's Geometrie gilt, und welches die gewöhnliche Geometrie als speciellen Fall enthält.

Die Ebene ist hier ein Theil unserer gewöhnlichen Ebene, welcher auf der einen Seite einer beliebigen geraden Linie, der Axe, liegt, während die Geraden durch Halbkreise dargestellt werden, deren Mittelpunkte auf der Axe liegen.

Die Bewegung in der Ebene ist nicht diejenige, welche wir aus der Anschauung kennen, sondern sie wird auf folgende Weise bestimmt. Es sei z ein beliebiger Punkt, der auf gewöhnliche Weise durch eine complexe Zahl bestimmt ist; bestimmt man hierdurch einen neuen Punkt

$$t = \frac{az + b}{cz + d},$$

worin a, b, c und d reell und $ad - bc = +1$, und lässt man z eine gewisse Figur durchlaufen, so durchläuft t eine andere Figur, die wir der ersten congruent nennen wollen; die eine Figur bewegt sich hinüber auf die andere, wenn a, b, c und d sich continuirlich ändern bis $a = d = 1$, $b = c = 0$.

Man sieht leicht, dass die hierdurch bestimmten Transformationen zusammengesetzt sind aus Parallelverschiebung ($t = z + a$), Multiplication ($t = az$) und Inversion verbunden mit Drehung um eine Axe ($t = a : z$). Congruente Figuren erhalten also gleiche Winkel, indem der Winkelbegriff der gewöhnliche ist. Congruente gerade oder krumme Linien werden gleich lang, wenn man unter der Länge die Summe der Bogenelemente versteht, von denen jedes durch seine Entfernung von der Axe dividirt ist, da sich zeigen lässt, dass diese

Summe bei der Transformation unverändert bleibt. Durch eine ähnliche veränderte Auffassung des Begriffes „Fläche“ erhalten congruente Figuren auch denselben Flächeninhalt.

Es könnte den Anschein haben, als ob man eine Beschränkung der Beweglichkeit der Ebene dadurch vorgenommen habe, dass man nur einen Theil der gewöhnlichen Ebene betrachtet. Das ist indessen nicht der Fall, denn die Transformation (Bewegung) lässt die Punkte immer auf derselben Seite der Axe bleiben, und lässt die Punkte der Axe (die reellen z entsprechen) auf der Axe bleiben, welche der unendlich fernen Geraden der gewöhnlichen Geometrie entspricht. In der That geht die hier entwickelte Geometrie in die gewöhnliche über, wenn die Axe sich bis in's unendliche entfernt.

Gleichfalls könnte es scheinen, als ob der Geraden hier die Eigenschaft fehlte, nach beiden Seiten bis in's unendliche verlängert werden zu können und dadurch die Ebene in zwei getrennte Theile zu theilen. Trägt man jedoch eine beliebige Strecke auf einer Geraden (Halbkreis) ab, und darauf beiderseits congruente Strecken (in der Bedeutung, welche das Wort hier hat), so wird man sich den Endpunkten des Halbkreises mehr und mehr nähern ohne sie erreichen zu können, da die Länge eines Bogenstückes, welches an die Axe stösst, nach der Definition unendlich ist. Besonders hierdurch zeichnet dieses Beispiel sich vor dem früher angeführten (der dreiseitigen Ecke) aus, bei welchem die Gerade durch Verlängerung in sich selbst zurückkehrte und dadurch Legendre's Beweis unbrauchbar machte.

Wenn ich oben die Axe die unendlich ferne Gerade der Ebene nannte, so war das nicht vollständig correct, da dieselbe wohl so aufgefasst werden kann, als ob sie die unendlich fernen Punkte der Ebene enthalte, aber nicht als eine Gerade. Die Sache ist die, dass die Auffassung, als ob die unendlich fernen Punkte einer Ebene auf einer Geraden lägen, keine nothwendige Folge der Eigenschaften von Ebene und Gerade ist, sondern mit der Benutzung eines bestimmten Coordinatensystems zusammenhängt. Hier erhält die Gerade zwei unendlich ferne Punkte, und parallel werden solche Geraden, welche den einen unendlich fernen Punkt gemeinsam haben.

Kopenhagen, 1886.

Sur l'équation différentielle de la série hypergéométrique.

(Seconde note.*))

Par

André Markoff à St. Pétersbourg.

Cette note a pour but la recherche de tous les cas, où l'équation différentielle

$$(1)\qquad x(1-x)y'' + (\gamma-(\alpha+\beta+1)x)y' - \alpha\beta y = 0$$

de la série hypergéométrique admet l'intégrale de la forme suivante

$$(2)\qquad Xy' + Yy = 0,$$

ou bien

$$(3)\qquad Xy'y' + Yy'y + Zyy = 0,$$

X, Y, Z étant des fonctions rationnelles de x.

Dans la discussion de notre question on peut poser, que X, Y, Z sont des fonctions entières de x.

On peut poser de même que ces fonctions n'ont point de diviseur commun.

Ayant admis ça, nous obtenons de certaines conditions, par lesquelles la question de cette note se réduit á celle de la note précédente.

Nous n'allons cependant pas prendre en égard toutes ces conditions, de sorte que parmi les fonctions X, Y, Z il y en aura des fonctions fractionnaires.**)

§ 1.

Proposons nous d'abord la recherche des cas, où l'équation (1) admet l'intégrale de la forme (2) et soit

$$(4)\qquad Xy' + Yy = \Omega.$$

En différentiant cette expression, nous obtenons en vertu de l'équation (1)

$$p\Omega' = (p(X'+Y) - qX)y' + (pY' - rX)y,$$

---

*) Voir la première note au tome 28 des Annalen, pag. 586 ff.

**) Quant à la question du § 1, elle a été traitée déjà complètement par Mr. Schwarz, voir le tome 75 du Journal für die reine und angewandte Mathematik.

où l'on a

$$p = x(1-x),\quad q = \gamma - (\alpha+\beta+1)x,\quad r = -\alpha\beta.$$

Lorsque Ω est égal à zéro, Ω' l'est aussi.

Il en résulte, que dans ce cas les équations

$$\Omega = 0 \quad \text{et} \quad \Omega' = 0$$

doivent être identiques l'une à l'autre et par suite

(5)
$$\frac{p(X'+Y)-qX}{X} = \frac{pY'-rX}{Y} = \omega.$$

Et il est facile de voir, que ω doit être une fonction entière du premier degré par rapport à x:

(6)
$$\omega = \lambda_0 + \lambda_1 x.$$

D'autre part, les conditions (5) et (6) étant satisfaites, on a

$$\frac{\Omega'}{\Omega} = \frac{l}{x} - \frac{l'}{1-x}$$

et

(7)
$$\Omega = Cx^l(1-x)^{l'},$$

ayant

$$l = \lambda_0,\ l' = -(\lambda_0+\lambda_1)$$

et C étant une constante arbitraire.

En posant ensuite

$$C = 0$$

nous obtenons l'équation (2)

(2)
$$Xy' + Yy = 0.$$

Tout revient donc à la résolution des équations (8)

(8)
$$\begin{cases} p(X'+Y) = (\omega+q)X, \\ p\ Y' - rX = \omega Y. \end{cases}$$

Remarquons, que X ne peut pas avoir pour diviseur ni x^2 ni $(1-x)^2$, car dans le cas contraire X et Y auraient x ou $(1-x)$ pour diviseur commun.

Par rapport à X nous pouvons donc distinguer quatre cas suivants:

1) X et p n'ont pas de diviseur commun,

2) le plus grand diviseur commun de X et p est égal à x,

3) le plus grand diviseur commun de X et p est égal à $1-x$,

4) X est divisible par p.

Nous allons discuter chacun de ces quatre cas séparément.

1) X *et* p *n'ont point de diviseur commun.*

Dans ce cas

$$\omega = -q,\ Y = -X',$$
$$pX'' + qX' + rX = 0.$$

Cette dernière équation est tout a fait identique à l'équation (1) et n'admet une intégrale suivante

$$X = \text{fonction entière de } x$$

qu'à condition, qu'il soit

$$\alpha = -n \text{ ou bien } \beta = -n,$$

n désignant un nombre entier positif arbitraire.

2) *Le plus grand diviseur commun de X et p est égal à x.*

Dans ce cas

$$\omega + q \text{ doit être divisible par } 1 - x$$

et

$$\omega \text{ doit être divisible par } x.$$

En posant

$$X = x X_0,$$

nous déduisons

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_1 = \alpha + \beta + 1 - \gamma,$$

$$Y = -x X_0' + (\gamma - 1) X_0, \quad Y' = -x X_0'' + (\gamma - 2) X_0'$$

et enfin

$$x(1-x) X_0'' + (2 - \gamma - (\alpha + \beta - 2\gamma + 3) x) X_0'$$
$$- (\alpha - \gamma + 1)(\beta - \gamma + 1) X_0 = 0.$$

Il est facile de voir, que cette dernière équation n'admet une intégrale suivante

$$X_0 = \text{fonction entière de } x$$

qu'à condition qu'il soit

$$\alpha - \gamma + 1 = -n \text{ ou bien } \beta - \gamma + 1 = -n,$$

n étant un nombre entier positif arbitraire

3) *Le plus grand diviseur commun de X et p est égal à* $1 - x$.

Dans ce cas

$$\omega + q \text{ doit être divisible par } x$$

et

$$\omega \text{ doit être divisible par } 1 - x.$$

En posant

$$X = (1-x) X_0,$$

nous déduisons

$$\lambda_0 = -\gamma, \quad \lambda_1 = \gamma,$$

$$Y = -(1-x) X_0' + (\gamma - \alpha - \beta) X_0,$$
$$Y' = -(1-x) X_0'' + (\gamma - \alpha - \beta + 1) X_0'$$

et enfin

$$x(1-x) X_0'' + (\gamma - (2\gamma - \alpha - \beta + 1) x) X_0'$$
$$- (\gamma - \alpha)(\gamma - \beta) X_0 = 0.$$

Cette dernière équation n'admet une intégrale de la forme

$$X_0 = \text{fonction entière de } x$$

qu'à condition qu'il soit

$$\alpha - \gamma = + n \quad \text{ou bien} \quad \beta - \gamma = + n,$$

n désignant un nombre entier positif.

4) X *est divisible par* p.

En posant

$$X = pX_0,$$

nous déduisons

$$\omega = 0,$$

$$Y = -pX_0' + (q-p')X_0, \quad Y' = -pX_0'' + (q-2p')X_0' + (q'-p'')X_0,$$

$$x(1-x)X_0'' + \big(2-\gamma-(3-\alpha-\beta)x\big)X_0' - (1-\alpha)(1-\beta)X_0 = 0.$$

Cette dernière équation n'admet l'intégrale

$$X_0 = \text{fonction entière de } x$$

qu'à condition qu'il soit

$$\alpha - 1 = + n \quad \text{ou bien} \quad \beta - 1 = + n,$$

n désignant un nombre entier positif.

Donc l'équation (1) *a une intégrale de la forme* (2) *seulement lorsque une des expressions*

$$\alpha,\ \beta,\ \alpha - \gamma,\ \beta - \gamma$$

est un nombre entier.

§ 2.

Proposons nous maintenant la recherche des cas, où l'équation (1) admet l'intégrale de la forme (3), et soit

$$Xy'y' + Yy'y + Zyy = \Omega. \tag{9}$$

L'équation (1) nous donne

$$p\Omega' = \{p(X'+Y) - 2qX\}\, y'y' + \{p(Y'+2Z) - 2rX - qY\}\, y'y$$
$$+ (pZ' - rY)\, yy.$$

Lorsque Ω est égal à zéro, Ω' l'est aussi et nous avons deux équations

$$\Omega = 0 \quad \text{et} \quad \Omega' = 0.$$

Ces équations sont identiques l'une à l'autre lorsque

$$\frac{p(X'+Y) - 2qX}{X} = \frac{p(Y'+2Z) - 2rX - qY}{Y} = \frac{pZ' - rY}{Z} = \omega. \tag{10}$$

Alors ω est une fonction entière du premier degré par rapport à x

$$\omega = \lambda_0 + \lambda_1 x. \tag{11}$$

Mais si les équations

$$\Omega = 0 \quad \text{et} \quad \Omega' = 0$$

ne sont pas identiques, alors on peut en déduire une équation de la forme (2) et notre question se réduit à la précédente. D'autre part, les conditions (10) et (11) étant satisfaites, l'on aura

$$\frac{\Omega'}{\Omega} = \frac{l}{x} - \frac{l'}{1-x}$$

et

$$\Omega = Cx^l(1-x)^{l'},$$

ayant

$$l = \lambda_0, \quad l' = -(\lambda_0 + \lambda_1)$$

et C étant une constante arbitraire.

Nous obtenons ainsi l'integrale générale du premier ordre de l'équation (1).

Posant ensuite $C = 0$ nous reçevons l'équation de la forme (3).

Tout revient donc à la résolution des équations

$$(12) \quad \begin{cases} p(X' + Y) = (\omega + 2q)\, X, \\ p(Y' + 2Z) - 2rX = (\omega + q)\, Y, \\ pZ' - rY = \omega\, Z. \end{cases}$$

Soit le degré de X égal à n, alors il est facile de voir, que le degré de Y est égal à $n-1$ et celui de Z est égal à $n-2$.

On peut poser

$$\begin{aligned} X &= E_n x^n + E_{n-1}x^{n-1} + E_{n-2}x^{n-2} + \cdots + E_1 x + E_0, \\ Y &= F_{n-1}x^{n-1} + F_{n-2}x^{n-2} + \cdots + F_1 x + F_0, \\ Z &= G_{n-2}x^{n-2} + \cdots + G_1 x + G_0, \end{aligned}$$

où E, F, G sont quelques constantes et E_n diffère de zéro. Remarquons maintenant que X n'est divisible ni par x^3 ni par $(1-x)^3$; car dans le cas contraire Y serait divisible par x^2 ou bien par $(1-x)^2$ et Z le serait par x ou bien par $1-x$.

Nous avons donc par rapport à X six cas suivants:

1) X et p^2 n'ont point de diviseur commun,
2) le plus grand commun diviseur de X et p^2 est égal à x ou à $1-x$,
3) le plus grand commun diviseur de X et p^2 est égal à p,
4) le plus grand commun diviseur de X et p^2 est égal à x^2 ou à $(1-x)^2$,
5) le plus grand commun diviseur de X et p^2 est égal à px ou à $p(1-x)$,
6) X est divisible par p^2.

§ 3.

Pour simplifier les considérations suivantes nous rappelerons les transformations connues de l'équation différentielle (1).

Transformation première.

Posant

$$y = x^{1-\gamma}u$$

on obtient

$$y' = x^{1-\gamma}u' + (1-\gamma)x^{-\gamma}u,$$
$$y'' = x^{1-\gamma}u'' + 2(1-\gamma)x^{-\gamma}u' - \gamma(1-\gamma)x^{-\gamma-1}u,$$
$$x(1-x)\,u'' + (2-\gamma-(\alpha+\beta-2\gamma+3)x)u'$$
$$-(\alpha-\gamma+1)(\beta-\gamma+1)u = 0,$$
$$\Omega = x^{-2\gamma}\{Xx^2u'u' + (2(1-\gamma)X + Yx)\,xu'u$$
$$+ ((1-\gamma)^2X + (1-\gamma)\,Yx + Zx^2)\,u\,u\}.$$

Nous aurons recours à cette transformation dans les cas, où X n'est pas divisible par x^2.

Si X n'est pas divisible par x et γ n'est pas égal à l'unité, alors après la transformation précedente au lieu de Ω nous obtenons l'expression suivante

$$Xx^2u'u' + (2(1-\gamma)X + Yx)\,x\,u'u$$
$$+ ((1-\gamma)^2X + (1-\gamma)\,Yx + Zx^2)\,u\,u.$$

Dans cette expression le multiplicateur Xx^2 de $u'\,u'$ est divisible par x^2.

Et dans le cas, que X est divisible par x mais ne l'est point par x^2, après notre transformation au lieu de Ω nous obtenons l'expression

$$Xxu'u' + (2(1-\gamma)X + Yx)u'u + \left((1-\gamma)^2\frac{X}{x} + (1-\gamma)\,Y + Zx\right)u\,u,$$

si

$$1-\gamma \quad \text{et} \quad (1-\gamma)\,E_1 + F_0$$

sont différents de zéro.

Alors Xx aussi est divisible par x^2.

Or chaque fois, que

$$1-\gamma \quad \text{ou} \quad (1-\gamma)E_1 + F_0$$

est égal à zéro, nous avons

$$\lambda_0 + \gamma = 0;$$

car les équations (12) nous donnent

$$F_0 = (\lambda_0 + 2\gamma - 1)\,E_1,$$
$$(\lambda_0 + \gamma)\,F_0 = 0,$$

et ensuite

$$(1-\gamma)E_1 + F_0 = (\lambda_0+\gamma)\,E_1,\ (\lambda_0+\gamma)(\lambda_0+2\gamma-1)\,E_1 = 0.$$

Transformation seconde.

Si au lieu de x l'on pose $1-x$, α et β ne changent pas et γ se transforme en $\alpha+\beta+1-\gamma$.

Après cette transformation nous aurons au lieu de ω l'expression suivante

$$-\lambda_0 - \lambda_1(1-x) = -(\lambda_0+\lambda_1) + \lambda_1 x.$$

Transformation troisième.

En posant

$$x = \frac{1}{\xi}, \quad y = \xi^{\alpha}\eta,$$

on obtient

$$\frac{dy}{dx} = -\xi^{\alpha+2}\frac{d\eta}{d\xi} - \alpha\xi^{\alpha+1}\eta,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \xi^{\alpha+4}\frac{d^2\eta}{d\xi^2} + 2(\alpha+1)\xi^{\alpha+3}\frac{d\eta}{d\xi} + \alpha(\alpha+1)\xi^{\alpha+2}\eta,$$

$$\xi(1-\xi)\frac{d^2\eta}{d\xi^2} + (\alpha-\beta+1-(2\alpha-\gamma+2)\xi)\frac{d\eta}{d\xi} - \alpha(\alpha-\gamma+1)\eta = 0,$$

$$\Omega = \xi^{2\alpha-n+2}\Big\{X\xi^{n+2}\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2 + (2\alpha X\xi^n - Y\xi^{n-1})\xi\frac{d\eta}{d\xi}\eta$$
$$+ (\alpha^2 X\xi^n - \alpha Y\xi^{n-1} + Z\xi^{n-2})\eta^2\Big\}.$$

Les expressions

$$X\xi^{n+2}, \; (2\alpha X\xi^n - Y\xi^{n-1})\xi, \; \alpha^2 X\xi^n - \alpha Y\xi^{n-1} + Z\xi^{n-2}$$

sont des fonctions entières de ξ; la première d'elles est divisible par ξ^2, la seconde l'est par ξ; la dernière pour $\xi = 0$ se réduit à

$$E_n\alpha^2 - F_{n-1}\alpha + G_{n-2}.$$

Remarquons que l'on peut remplacer α par β.

A l'aide de notre transformation nous pouvons toujours parvenir au cas, où X est divisible par x^2, si seulement les deux égalités suivantes

$$E_n\alpha^2 - F_{n-1}\alpha + G_{n-2} = 0,$$
$$E_n\beta^2 - F_{n-1}\beta + G_{n-2} = 0$$

ne sont pas satisfaites l'une et l'autre en même temps.

Mais dans le cas que l'on a

$$E_n\alpha^2 - F_{n-1}\alpha + G_{n-2} = 0 \quad \text{et} \quad E_n\beta^2 - F_{n-1}\beta + G_{n-2} = 0$$

nous obtenons

$$F_{n-1} = (\alpha+\beta)E_n \quad \text{et} \quad G_{n-2} = \alpha\beta E_n$$

ou bien

$$\alpha = \beta.$$

Or les équations (12) nous donnent

$$F_{n-1} = (2\alpha+2\beta-n-\lambda_1+2)E_n,$$
$$2G_{n-2} = \{(\alpha+\beta+2-n-\lambda_1)(2\alpha+2\beta-n-\lambda_1+2)+2\alpha\beta\}E_n,$$
$$(\alpha+\beta-n-\lambda_1+2)(2\alpha-n-\lambda_1+2)(2\beta-n-\lambda_1+2) = 0.$$

En comparant ces égalités avec les précédentes nous obtenons

$$\alpha+\beta-n-\lambda_1+2 = 0.$$

§ 4.

Revenons à la discussion des six cas précédents.

1) *X n'a aucun diviseur commun avec p^2.*

Alors

$$\omega + 2q = 0, \qquad \omega = -2q,$$
$$X' + Y = 0, \qquad Y = -X',$$
$$-\ qY = p(Y' + 2Z) - 2rX,$$
$$-2qZ = pZ' - rY,$$

d'où nous déduisons

$$2pZ = pX'' + qX' + 2rX,$$
$$2pZ' + 2p'Z = pX''' + (p' + q)X'' + (q' + 2r)X',$$
$$2p^2Z' = p^2X''' + pqX'' + (pq' - qp' + 2rp)X' - 2rp'X$$

et enfin

$$p^2X''' + 3pqX'' + (2q^2 + pq' - qp' + 4rp)X' + 2r(2q - p')X = 0.$$

Cette équation est identique à l'équation (4) de notre première note.

Excluant les hypothèses, pour lesquelles l'équation (1) admet l'intégrale de la forme (2), nous pouvons donc assurer, que le cas premier n'a lieu que pour

$$\alpha + \beta = -n, \ \gamma = +\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{3}{2}, \cdots, -n + \tfrac{1}{2}.$$

2) *Le plus grand commun diviseur de X et p^2 est égal à x ou bien à $1 - x$.*

Ayant égard à la transformation seconde on peut prendre x pour le plus commun diviseur de X et p^2.

Alors $\omega + 2q$ doit être divisible par $1 - x$.

D'ailleurs au moyen de la troisième ou de la première transformation nous pouvons réduire ce cas aux cas suivants, si

$$\alpha + \beta - n - \lambda_1 + 2 \quad \text{ou} \quad \gamma + \lambda_0$$

n'est pas égal à zéro.

Nous pouvons aussi réduire notre cas aux cas suivants chaque fois, que

$$\gamma \text{ n'est pas égal à } \alpha + \beta:$$

il ne faut pour ce but que faire d'abord la transformation seconde et ensuite la transformation première.

Donc en excluant les hypothèses, pour lesquelles le cas second se réduit aux cas suivants, nous devons poser:

$$\lambda_0 + \lambda_1 = 2(\alpha + \beta - \gamma + 1),$$
$$\lambda_1 = \alpha + \beta - n + 2,$$
$$\lambda_0 = -\gamma = -\alpha - \beta,$$

d'où il suit

$$n = 0.$$

Mais la condition

$$n = 0$$

est impossible, car X est divisible par x.

Donc le cas second se réduit aux cas suivants.

3) *Le plus grand diviseur commun de X et p^2 est égal à p.*

Ce cas se réduit aussi aux cas suivants.

En effet il se réduit aux suivants au moyen de la troisième ou de la première transformation si l'une des expressions

$$\alpha + \beta - n - \lambda_1 + 2, \quad \gamma + \lambda_0$$

n'est pas égal à zéro.

D'ailleurs nous pouvons d'abord faire la transformation seconde et ensuite la troisième ou la première.

Le cas considéré se réduit de cette manière aux cas suivants, si

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \gamma - \alpha - \beta - 1$$

diffère de zéro.

Or les conditions

$$\alpha + \beta - n - \lambda_1 + 2 = 0,$$
$$\gamma + \lambda_0 = 0,$$
$$\lambda_0 + \lambda_1 + \gamma - \alpha - \beta - 1 = 0$$

nous donnent

$$n = 1,$$

tandisque n doit être au moins égal à 2.

Donc le troisième cas se réduit aux cas suivants.

4) *Le plus grand commun diviseur de X et p^2 est égal à x^2 ou bien à* $(1-x)^2$.

Ayant égard à la transformation seconde on peut prendre x^2 pour le plus grand diviseur commun de X et p^2.

Alors

$$\omega + 2q \text{ doit être divisible par } (1-x),$$
$$Y \text{ doit être divisible par } x,$$

et

$$\omega \text{ doit être divisible par } x.$$

En posant

$$X = x^2 U, \quad Y = xV$$

nous déduisons:

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_1 = 2(\alpha+\beta+1-\gamma),$$
$$V = -xU' + (2\gamma-2)U, \quad V' = -xU'' + (2\gamma-3)U',$$
$$2(1-x)Z = (1-x)x^2U'' + \{4-3\gamma+(4\gamma-\alpha-\beta-5)x\}xU'$$
$$+ 2\{(\gamma-1)^2 + ((\gamma-1)(\alpha+\beta+2-2\gamma)-\alpha\beta)x\}U$$

et enfin

$$p^2 U''' + 3pq_1 U'' + (2q_1^2 + pq_1' - q_1 p' + 4pr_1) U' + 2r_1(2q_1 - p') U = 0,$$

où

$$q_1 = 2 - \gamma - (\alpha + \beta - 2\gamma + 3)x$$

et

$$r_1 = -(\alpha - \gamma + 1)(\beta - \gamma + 1).$$

Excluant les hypothèses, pour lesquelles l'équation (1) admet l'intégrale de la forme (2), nous pouvons donc assurer, que le cas quatrième n'a lieu que pour

$$\alpha + \beta - 2\gamma = -n, \quad \gamma = +\frac{3}{2}, +\frac{5}{2}, \cdots, n - \frac{1}{2}.$$

5) *Le plus grand diviseur commun de X et p^2 est égal à px ou à $p(1-x)$.*

Ayant égard à la transformation seconde on peut prendre px pour le plus grand diviseur commun de X et p^2.

Pour que l'on ne puisse pas réduire ce cas au cas dernier à l'aide des transformations précédentes il est indispensable de poser

$$\alpha + \beta - \lambda_1 - n + 2 = 0, \quad -\lambda_0 - \lambda_1 + \alpha + \beta + 1 - \gamma = 0.$$

Il suit encore des équations (12), que Y et ω doivent être divisibles par x.

Posant

$$X = x^2(1-x)U, \qquad Y = xV$$

nous obtenons

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_1 = \alpha + \beta - n + 2, \quad \gamma = \alpha + \beta + 1 - \lambda_1 = n - 1,$$

$$V = -x(1-x)U' + \{2(n-2) - (\alpha+\beta+n-3)x\} U,$$

$$V' = -x(1-x)U'' + (2n - 5 - (\alpha+\beta+n-5)x) U' - (\alpha+\beta+n-3) U,$$

$$2Z = x^2(1-x)U'' + (7 - 3n + (\alpha+\beta+2n-7)x) x U' + \big(2(n-2)^2 + (2r - (n-3)(\alpha+\beta+n-3))x\big) U$$

et enfin pour déterminer l'inconnue U nous aurons une équation de la forme

$$p^2 U''' + p(a'x + b') U'' + (c'x^2 + d'x + e') U' + (f'x + g') U = 0.$$

N'ayant pas recours aux calculs il est facile de se convaincre, que les coefficients

$$a', b', c', d', e', f', g'$$

contiennent r au premier degré.

Nous en déduisons que r doit être obtenu d'une équation algébrique du degré $n - 2$.

Il est aussi facile de donner toutes les racines de cette équation:

$$r = -(n-2)(\alpha+\beta-n+2), \; -(n-3)(\alpha+\beta-n+3), \cdots, -2(\alpha+\beta-2), \; -1.(\alpha+\beta-1).$$

En effet, lorsqu'on a

$$r = -(n-m)(\alpha+\beta-n+m),$$

nous pouvons prendre

$$\alpha = n - m.$$

Alors comme nous l'avons démontré dans le § 1, l'équation (1) admet deux intégrales particulières du premier ordre

$$\Omega_0 = X_0 y' + Y_0 y = 0 \quad \text{et} \quad X_1 y' + Y_1 y = \Omega_1 = 0,$$

X_0 étant une fonction entière de x du degré $n-m+1$ et divisible par p, X_1 étant une fonction entière de x du degré $m-1$ et divisible par x, Y_0 et Y_1 étant aussi des fonctions entières de x.

Et pour toutes les valeurs de y satisfaisantes à l'équation (1) on a

$$\frac{p\Omega_0'}{\Omega_0} = 0, \quad \frac{p\Omega_1'}{\Omega_1} = (\alpha+\beta-n+2)x.$$

En multipliant Ω_0 par Ω_1 nous obtenons une expression

$$\Omega = \Omega_0 \Omega_1$$

satisfaisante parfaitement à toutes nos demandes.

Nous voyons donc, que le cinquième cas se réduit au cas dernier ou bien ne présente rien de nouveau.

6) *X est divisible par p^2.*

Dans ce cas Y est divisible par p et ω doit se réduire à zéro.

Posant

$$X = p^2 U, \quad Y = pV,$$

nous obtenons

$$V = -pU' + 2(q-p')U,$$

$$V' = -pU'' + (2q-3p')U' + 2(q'-p'')U,$$

$$2Z = p^2 U'' + p(4p'-3q)U' + (2(q-p')^2 - 2p(q'-p'') + 2rp)U$$

et enfin

$$p^2U''' + 3pq_1U'' + (2q_1^2 + pq_1' - q_1p' + 4pr_1)U' + 2r_1(2q_1-p')U = 0,$$

où l'on a

$$q_1 = 2 - \gamma - (3-\alpha-\beta)x, \quad r_1 = -(1-\alpha)(1-\beta).$$

Excluant les hypothèses, pour lesquelles l'équation (1) admet l'intégrale de la forme (2), nous pouvons donc assurer que le cas dernier n'a lieu que pour

$$\alpha+\beta = n-2, \quad \gamma = +\tfrac{3}{2}, +\tfrac{5}{2}, \cdots, n-\tfrac{5}{2}.$$

§ 5.

Conclusion.

Concevant nos résultats et ayant en vue les transformations du § 2 il est facile de se convaincre, *que l'équation différentielle* (1) *admet une intégrale de la forme* (3) *dans les cas suivants*

1) $\alpha+\beta=-n, \quad \gamma=\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \cdots, -n+\frac{1}{2},$

2) $\alpha+\beta=+n, \quad \gamma=\frac{3}{2}, \quad \frac{5}{2}, \cdots\cdots, \quad n-\frac{1}{2},$

3) $\alpha+\beta-2\gamma=-n, \quad \gamma=\frac{3}{2}, \quad \frac{5}{2}, \cdots\cdots, \quad n-\frac{1}{2},$

4) $\alpha+\beta-2\gamma=+n, \quad \gamma=\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \cdots, -n+\frac{1}{2},$

5) $\left.\begin{matrix} 2\alpha-\gamma \\ \text{ou} \\ 2\beta-\gamma \end{matrix}\right\} = -n, \quad \alpha+\beta-\gamma = -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \cdots, -n+\frac{1}{2},$

6) $\left.\begin{matrix} 2\alpha-\gamma \\ \text{ou} \\ 2\beta-\gamma \end{matrix}\right\} = +n, \quad \alpha+\beta-\gamma = \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{2}, \cdots, \quad n-\frac{1}{2},$

7) $\left.\begin{matrix} \alpha-\beta+\gamma \\ \text{ou} \\ \beta-\alpha+\gamma \end{matrix}\right\} = -n, \quad \gamma=\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \cdots, -n+\frac{1}{2},$

8) $\left.\begin{matrix} \alpha-\beta+\gamma \\ \text{ou} \\ \beta-\alpha+\gamma \end{matrix}\right\} = +n, \quad \gamma=\frac{3}{2}, \quad \frac{5}{2}, \cdots\cdots, \quad n-\frac{1}{2}.$

Nous n'avons pas signalé ici les cas, dans lesquels l'équation (1) admet une intégrale de la forme (2) par ce que ces cas ci ont été énumérés plus haut.

Addition.

En suivant la méthode de Liouville*) il est facile de démontrer la proposition enoncée ci-dessous:

Lorsque l'équation (1) *peut être intégrée à l'aide d'un nombre limité de signes algébriques, exponentiels et logarithmiques et de signes d'intégrations indéfinies relatives à la variable indépendante x, elle doit admettre l'intégrale de la forme* (3) *ou le rapport de deux valeurs de y satisfaisantes à cette équation doit être une fonction algébrique de x.*

Ma note a pour but la recherche de tous les cas de la première catégorie, tandisque les cas, où le rapport mentionné est une fonction algébrique de x, sont déjà analysés par M. Schwarz.**)

Ainsi la question de l'intégration de l'équation différentielle (1) en quantités explicites finies est complétement résolue.

St. Pétersbourg, November 1886.

---

*) Journal de Liouville, 1e série, tome IV.

**) Borchardt's Journal, Bd. 75.

Zur Theorie der Abel'schen Functionen.

Von

Georg Pick in Prag.

Die nachfolgenden Entwickelungen beschäftigen sich mit der allgemeinen Aufgabe, die von Herrn Klein*) in der Theorie der hyperelliptischen Functionen (insbesondere vom Geschlecht 2) begründeten Fortschritte auf Abel'sche Functionen zu übertragen. Sie unterliegen dabei aber verschiedenen Beschränkungen und betrachten überhaupt nur diejenigen Abel'schen Functionen, welche zu einer ebenen algebraischen Curve ohne Doppel- und Rückkehrpunkte gehören. Eine solche Curve

$$a_x^n = 0$$

von der Ordnung n und dem Geschlecht

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

ist also allen folgenden Erörterungen zu Grunde gelegt.

Wir bedürfen, um unser Ziel zu erreichen, umsomehr eines ausgeführten Specialfalls als Vorbild für analoge Bildungen im allgemeinen Falle, als hier von allen transcendenten Behelfen zunächst ganz abgesehn werden musste, alle Ueberlegungen sich also einzig auf algebraische Analogien stützen. Ein solcher Specialfall nun liegt vor in der Curve dritter Ordnung und den zu ihr gehörigen elliptischen Functionen.**)

Ein Theil der nachfolgend entwickelten Resultate ist in zwei Noten in den Sitzungsberichten der Wiener Akademie***) bereits publicirt werden. Gleichwohl war es nöthig, diese Resultate hier

---

*) Vgl. F. Klein, „Ueber hyperelliptische Sigmafunctionen", Math. Ann. Bd. XXVII.

**) Vgl. „Zur Theorie der elliptischen Functionen" Math. Ann. Bd. XXVIII, pag. 309 ff.

***) „Ueber die Abel'schen Integrale etc." Juli-Heft und „Ueber die etc. ϑ-Functionen" Oct.-Heft 1886.

nochmals und in sehr veränderter Weise herzuleiten, da die dort gegebenen Ableitungen zwar richtig, aber für die klare Einsicht in die verwendeten Grössen nicht genügend sind.

§ 1.

Jacobi'sche Functionen und Integrale dritter Gattung.

Den Ausgangspunkt unserer Entwickelungen bildet die Gleichung*)

$$\text{(1)}\qquad \log \frac{\vartheta\left(\int_z^x - \sum_{i=1}^p \int_{z^i}^{x^i}\right) \vartheta\left(\int_z^y - \sum_{i=1}^p \int_{z^i}^{x^i}\right)}{\vartheta\left(\int_z^x - \sum_{i=1}^p \int_{z^i}^{y^i}\right) \vartheta\left(\int_z^y - \sum_{i=1}^p \int_{z^i}^{x^i}\right)} = \sum_{i=1}^p \Pi_{xy}^{x^i y^i}.$$

Es soll hierin ϑ irgend eine zur Curve

$$a_x^n = 0$$

gehörige ϑ-Function bedeuten, die wir übrigens stets als von geradem Charakter annehmen werden; x, x^i, y, y^i sind $(2p+2)$ beliebige Punkte der Curve; z und die hiedurch bestimmten z^i sowie endlich das Normalintegral dritter Gattung Π sind die bekannten von Clebsch und Gordan bei dem Umkehrungsproblem verwendeten Grössen.**)

Gleichung (1) darf als Definitionsgleichung der ϑ-Function gelten. Einer ähnlichen Gleichung genügt aber überhaupt jede „Jacobi'sche Function ersten Grades“ durch Vermittelung des zu ihr gehörigen Integrales dritter Gattung. Wir werden also geradezu Jacobi'sche Functionen dadurch definiren, dass wir Gleichungen von der Form (1) anschreiben, in denen ϑ eine neue Function, Π das zu ihr gehörige Integral dritter Gattung bedeutet.

Sowie nun im Gebiete der elliptischen Functionen das Integral dritter Gattung

$$\int_v^u \int_{v'}^{u'} \wp(\varphi - \varphi')\, d\varphi\, d\varphi'$$

vor allen anderen ausgezeichnet ist, und die demselben entsprechenden Jacobi'schen Functionen insbesondere als σ-Functionen bezeichnet werden, so wollen wir auch bei allgemeinen algebraischen Curven ein ausgezeichnetes Normalintegral und von diesem aus Abel'sche σ-Functionen zu construiren suchen. Das erwähnte elliptische Normalintegral

*) Vgl. F. Klein, a. a. O., § 8.

**) Vgl. Cl.-G., Abel'sche Functionen, etwa S. 198.

dritter Gattung geht aber, wenn wir an Stelle der Integrationsvariablen φ, φ' zwei Punkte ζ, ζ' der Curve

$$a_x^3 = 0$$

vermöge der Relationen einführen

$$\varphi = \int_{\zeta^0}^{\zeta} \frac{(k \zeta d\zeta)}{a_k\, a_\zeta^2}, \qquad \varphi' = \int_{\zeta^0}^{\zeta'} \frac{(k' \zeta' d\zeta)}{a_{k'}\, a_{\zeta'}^2},$$

über in

$$Q_{xy}^{x'y'} = \int_y^x \int_{y'}^{x'} \frac{(a_h a_\zeta a_{\zeta'})^2 + 2 a_h a_\zeta^2 \cdot a_h a_{\zeta'}^2 - a_h^2 a_\zeta \cdot a_\zeta a_{\zeta'}^2 - a_h^2 a_{\zeta'} \cdot a_\zeta^2 a_{\zeta'}}{3 (h \zeta \zeta')^2}$$

$$\cdot \frac{(k \zeta d\zeta)}{a_k a_\zeta^2} \cdot \frac{(k' \zeta' d\zeta')}{a_{k'} a_{\zeta'}^2},$$

wobei x, y, x', y' willkürliche Punkte der Curve sind, welche in folgender Weise mit den früheren Grenzen des Integrals zusammenhängen:

$$u = \int_{\zeta^0}^{x}, \quad v = \int_{\zeta^0}^{y}, \quad u' = \int_{\zeta^0}^{x'}, \quad v' = \int_{\zeta^0}^{y'} \text{*)}.$$

Nach Analogie dieser Grösse kann nun in der That für die Grundcurve n^{ter} Ordnung ein Normalintegral dritter Gattung mit den Grenzen x, y und den Unstetigkeitspunkten x', y'

$$Q_{xy}^{x'y'} = \int_y^x \int_{y'}^{x'} \frac{\Phi(h, \zeta, \zeta')}{(h, \zeta, \zeta')^2} \cdot \frac{(k \zeta d\zeta)}{a_k a_\zeta^2} \cdot \frac{(k' \zeta' d\zeta')}{a_{k'} a_{\zeta'}^2}$$

hergestellt werden, indem man $\Phi(h, \zeta, \zeta')$ folgende Bedingungen gemäss bestimmt:

$\Phi(h, \zeta, \zeta')$ *ist eine ganze Covariante der Form* a_x^n, *vom zweiten Grade in den Coefficienten dieser Form, vom zweiten Grade in* h, *je vom* $(n-1)^{ten}$ *Grade in* ζ *und* ζ'; $\frac{\Phi(h, \zeta, \zeta')}{(h \zeta \zeta')^2}$ *ist von* h *völlig unabhängig; die Coefficienten der logarithmischen Unstetigkeiten sind bezw.* ± 1.

Diesen Bedingungen genügt eine einzige Function Φ, wie leicht in folgender Weise erkannt wird. Zunächst folgt aus der Covarianteneigenschaft von Φ einerseits und den angegebenen Graden in den Coefficienten und Variablen andererseits, dass Φ mittelst numerischer Coefficienten aus Termen sich zusammensetzt, welche Producte je zweier Polaren der Grundform sind. Indem man alle möglichen solchen Terme bildet, erhält man

---

*) Vgl. „Zur Theorie der elliptischen Functionen", a. a. O.

$$\Phi = \sum_{\nu=1}^{n} M_\nu a_h a_\zeta^{\nu-1} a_{\zeta'}^{n-\nu} \cdot a_h a_\zeta^{n-\nu} a_{\zeta'}^{\nu-1} + \sum_{\nu=1}^{n-1} N_\nu a_h^2 a_\zeta^{\nu-1} a_{\zeta'}^{n-\nu-1} \cdot a_\zeta^{n-\nu} a_{\zeta'}^{\nu}.$$

Damit jetzt $\frac{\Phi}{(h\zeta\zeta')^2}$ von h unabhängig werde, ist es nothwendig, der Curve zweiter Ordnung

$$\Phi = 0$$

(indem wir h als variablen Punkt auffassen) bei $h = \zeta$ sowohl als bei $h = \zeta'$ je einen Doppelpunkt zu ertheilen, worauf dieselbe gleich wie

$$(h\zeta\zeta')^2 = 0$$

die doppelt gezählte Verbindungslinie von ζ und ζ' darstellt. Hiedurch aber bestimmen sich die Verhältnisse der unbestimmten Coefficienten M, N in folgender Weise:

$$M_1 = M_2 = \cdots = -N_1 = -N_2 = \cdots (= M).$$

Endlich giebt die Festsetzung hinsichtlich der logarithmischen Residua

$$M = \frac{1}{n}.$$

Somit erhalten wir

$$(2)\quad Q_{xy}^{x'y'} = \int_y^x \int_{y'}^{x'} \frac{\sum_{\nu=1}^{n} a_h a_\zeta^{\nu-1} a_{\zeta'}^{n-\nu} \cdot a_h a_\zeta^{n-\nu} a_{\zeta'}^{\nu-1} - \sum_{\nu=1}^{n-1} a_h^2 a_\zeta^{\nu-1} a_{\zeta'}^{n-\nu-1} \cdot a_\zeta^{n-\nu} a_{\zeta'}^{\nu}}{n(h\zeta\zeta')^2}$$

$$\times \frac{(k\zeta d\zeta)}{a_k a_\zeta^2} \cdot \frac{(k'\zeta' d\zeta')}{a_{k'} a_{\zeta'}^2}.$$

Es ist klar, dass $Q_{xy}^{x'y'}$ die Eigenschaft der directen Vertauschbarkeit von Parameter und Argument besitzt:

$$Q_{x'y'}^{xy} = Q_{xy}^{x'y'}.\text{*)}$$

Bedenkt man, dass jedes zur gegebenen Grundcurve gehörige Integral dritter Gattung als Doppelintegral darstellbar ist, dessen Integrand den Nenner $(k\zeta\zeta')^2$ besitzt**), so folgt, *dass* $Q_{xy}^{x'y'}$ *vor allen anderen Integralen dritter Gattung dadurch ausgezeichnet ist, dass der Zähler* Φ *des Integranden eine ganze Covariante der Grundform ist;* denn die Bestimmung von $Q_{xy}^{x'y'}$ durch diese Bedingung ist, wie wir gesehen haben, *vollkommen eindeutig.*

---

*) In der früheren Darstellung (Wr. Ber. Juli 1886) ist diese Eigenschaft überflüssiger Weise von vornherein als Bedingung eingeführt.

**) Vergl. M. Noether, „Ueber die algebraischen Differentialausdrücke", 2te Note (Sitzb. der phys.-med. Societät zu Erlangen, 14. Januar 1884.)

Nun definiren wir eine gerade σ-Function durch die Gleichung

$$(3)\qquad \log \frac{\sigma\left(\int_s^x - \sum_{i=1}^p \int_{s^i}^{x^i}\right)\cdot\sigma\left(\int_s^y - \sum_{i=1}^p \int_{s^i}^{y^i}\right)}{\sigma\left(\int_s^x - \sum_{i=1}^p \int_{s^i}^{y^i}\right)\cdot\sigma\left(\int_s^y - \sum_{i=1}^p \int_{s^i}^{x^i}\right)} = \sum_{i=1}^p Q_{xy}^{x^i y^i}$$

und die Festsetzung, dass sie gleich Eins werde, sobald ihre sämmtlichen Argumente verschwinden.

§ 2.

Berechnung der Jacobi'schen Functionen eingliedriger Argumente.*)

Die in Gleichung (1) (resp. (3)) enthaltenen willkürlichen Punkte x^i und y^i seien nun durch die Festsetzungen bestimmt:

$$(5)\qquad \sum_{i=1}^p \int_{s^i}^{x^i} = \int_s^x, \qquad \sum_{i=1}^p \int_{s^i}^{y^i} = \int_s^y,$$

welche Geltung haben sollen für sämmtliche Integrale erster Gattung. Es ist leicht zu sehen, in welcher Weise man diese Bedingungen befriedigt. Durch s und x werde die Gerade $\widehat{sx}$ gelegt, deren weitere Schnittpunkte mit der Curve $u^1, u^2, \ldots, u^{n-2}$ heissen mögen. Durch diese letzteren und die p Punkte s^i ist eine Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung bestimmt, deren weitere p Schnittpunkte mit der Grundcurve eben die x^i der Gleichungen (4) sind. In ähnlicher Weise leitet man aus y die Punkte $v^1, v^2, \ldots, v^{n-2}$, und dann die y^i ab. Aus (1) wird nun

$$(5)\qquad \log \frac{\vartheta\left(\int_y^x\right)^2}{\vartheta^4} = -\sum_{i=1}^p \Pi_{xy}^{x^i y^i},$$

wo mit ϑ der Werth der ϑ-Function bezeichnet ist, wenn sämmtliche Argumente verschwinden.

Die rechts stehende Summe von Integralen lässt sich mit Hilfe des Abel'schen Theorems umgestalten. Denn offenbar sind die Punkte x^i zusammen mit den u^r der aus den y^i und der v^r bestehenden Punktgruppe corresidual, weil jede der beiden Gruppen mit den s^i ein volles Schnittpunktsystem bildet. Daher wird

*) Die nun (§§ 2, 3) folgende Darstellung weicht aus den in der Einleitung angegebenen Gründen von der früheren (Wr. Ber., Oct. 1886) ganz und gar ab.

$$\sum_{i=1}^{p} \Pi_{xy}^{x^i y^i} + \sum_{r=1}^{n-2} \Pi_{xy}^{u^r v^r} = -\log \Phi$$

wo Φ eine *algebraische Function* der auftretenden Punkte bedeutet, deren specielle Form uns hier nicht näher interessiren soll. Wir erhalten jetzt

$$(6) \qquad \log \frac{\vartheta\left(\int_y^x\right)^2}{\vartheta^2} = \log \Phi + \sum_{r=1}^{n-2} \Pi_{xy}^{u^r v^r}.$$

Das Abel'sche Theorem ist nun auf die neue Integralsumme nicht direct anwendbar. Denn die Punkte u^r mit x zusammen sind zwar den v^r mit y zusammen corresidual, x und y aber sind gerade die Unstetigkeitspunkte unserer Integrale. In folgender Weise kann man die hier sich einstellende Schwierigkeit umgehen. Man wähle einen Punkt h beliebig in der Ebene, nur nicht auf einer der Geraden $\widehat{zx}$, $\widehat{zy}$ oder $\widehat{xy}$. Der Ausdruck

$$\log \frac{(hxx')(hyy')}{(hxy')(hyx')}$$

besitzt dann, als Function von x' resp. y' angesehen, in den Punkten x und y genau dieselben Unstetigkeiten wie $\Pi_{xy}^{x'y'}$, aber ausserdem noch gleichgeartete Unstetigkeiten in den weiteren Schnittpunkten der Geraden $\widehat{hx}$ und $\widehat{hy}$ mit der Grundcurve. Es ist also

$$\mathrm{H}_{xy}^{x'y'} = \log \frac{(hxx')(hyy')}{(hxy')(hyx')} - \Pi_{xy}^{x'y'}$$

ein Integral, welches Unstetigkeiten nur mehr in den von x resp. y verschiedenen Schnittpunkten der Geraden $\widehat{hx}$ und $\widehat{hy}$ mit der Curve besitzt. Genauer ausgedrückt: $\mathrm{H}_{xy}^{x'y'}$ *wird logarithmisch unendlich mit dem Coefficienten* $+1$, *wenn* x *und* x', *sowie wenn* y *und* y' *mit* h *auf gerader Linie liegen; hingegen mit dem Coefficienten* -1, *wenn das Gleiche mit* x *und* y', *oder mit* y *und* x' *der Fall ist.* Bemerkt muss ferner werden, dass $\mathrm{H}_{xy}^{x'y'}$ Vertauschung von Parameter und Argument zulässt, insofern dieselbe bei $\Pi_{xy}^{x'y'}$ gestattet ist.

Gleichung (6) erhält jetzt die Form

$$(8) \qquad \log \frac{\vartheta\left(\int_y^x\right)^2}{\vartheta^2} = \log \Phi - \sum_{r=1}^{n-2} \mathrm{H}_{xy}^{u^r v^r} + \log\left[\prod_{r=1}^{n-2} \frac{(hxu^r)(hyv^r)}{(hxv^r)(hyu^r)}\right],$$

und nun lässt sich die Integralsumme leicht auswerthen. Es ist nämlich nach dem Abel'schen Theorem

$$\mathsf{H}_{xy}^{xy}+\sum_{r=1}^{n-2}\mathsf{H}_{xy}^{u^r v^r}=\log\left[\prod_{r=1}^{n-1}\frac{(zx\xi^s)(zy\eta^s)}{(zx\eta^s)(zy\xi^s)}\right],$$

wobei ξ^s resp. η^s die Schnittpunkte von $\widehat{hx}$ resp. $\widehat{hy}$ mit der Grundcurve bedeuten, x resp. y selbst ausgenommen. Wir bezeichnen H_{xy}^{xy} kürzer mit $\mathsf{H}(x, y)$; es verwandelt sich jetzt (8) in

$$\text{(9)}\qquad \log\frac{\vartheta\left(\int_y^x\right)^2}{\vartheta^2}=\log\Phi+\mathsf{H}(x,y)$$

$$-\log\left[\prod_{s=1}^{n-1}\frac{(zx\xi^s)(zy\eta^s)}{(zx\eta^s)(zy\xi^s)}:\prod_{r=1}^{n-2}\frac{(hxu^r)(hyv^r)}{(hxv^r)(hyu^r)}\right].$$

§ 3.

Auswerthung der Producte $\prod\limits_{s=1}^{n-1}\frac{(zx\xi^s)\,(zy\eta^s)}{(zx\eta^s)\,(zy\xi^s)}$ und $\prod\limits_{r=1}^{n-2}\frac{(hxu^r)\,(hyv^r)}{(hxv^r)\,(hyu^r)}$.

Um die Art der Abhängigkeit der gewonnenen Ausdrücke von dem Hilfspunkt h in Evidenz zu setzen, ist es nöthig, die beiden Producte umzugestalten, welche in (9) das Argument des Logarithmus constituiren.

Die Punkte ξ^s und η^s werden in folgender Weise gefunden. Wir setzen in die Gleichung der Grundcurve

$$a_x^n=0$$

für x einmal $\xi=x+\lambda h$, das andere Mal $\eta=y+\mu h$ ein. Es resultiren zwei Gleichungen mit den Unbekannten λ resp. μ, von denen jede eine Wurzel $=0$ besitzt, weil x und y Punkte der Curve sind. Die übrigen mit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ resp. $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}$ zu bezeichnenden Wurzeln sind dann die Parameter der Punkte ξ^s resp. η^s. Wir verzeichnen die Identitäten

$$\text{(10)}\qquad \begin{cases} a_h^n\cdot\lambda\prod\limits_{s=1}^{n-1}(\lambda-\lambda_s)=(a_x+\lambda a_h)^n,\\[2ex] a_h^n\cdot\mu\prod\limits_{\mu=1}^{n-1}(\mu-\mu_s)=(a_y+\mu a_h)^n.\end{cases}$$

Es wird jetzt vermöge

$$\xi^s = x + \lambda_s h, \quad \eta^s = y + \mu_s h$$

$$\prod_{s=1}^{n-1} \frac{(zx\xi^s)(zy\eta^s)}{(zx\eta^s)(zy\xi^s)}$$

$$= (zxh)^{n-1}(zyh)^{n-1} \cdot \prod_{s=1}^{n-1} \frac{\lambda_s \cdot \mu_s}{[(zxy) + \mu_s(zxh)] \cdot [(zyx) + \lambda_s(zyh)]}$$

$$= \prod_{s=1}^{n-1} \frac{\lambda_s \cdot \mu_s}{\left\{\frac{(zxy)}{(zxh)} + \mu_s\right\}\left\{-\frac{(zxy)}{(zyh)} + \lambda_s\right\}}.$$

Wird nun in der ersten der Gleichungen (10) für λ die Grösse $\frac{(zxy)}{(zyh)}$ eingesetzt, und anderseits derselben das Product $\prod_{s=1}^{n-1}(-\lambda_s)$ in bekannter Weise entnommen, so ergiebt sich leicht

$$\prod_{s=1}^{n-1} \frac{\lambda_s}{-\frac{(zxy)}{(zyh)} + \lambda_s} = \frac{n(zxy)(zyh)^{n-1} \cdot a_h a_x^{n-1}}{\{a_x(zyh) + a_h(zxy)\}^n}.$$

In ähnlicher Weise folgt aus der zweiten der Gleichungen (10)

$$\prod_{s=1}^{n-1} \frac{\mu_s}{\frac{(zxy)}{(zxh)} + \mu_s} = -\frac{n \cdot (zxy)(zxh)^{n-1} \cdot a_h a_y^{n-1}}{\{a_y(zxh) - a_h(zxy)\}^n}.$$

Also wird endlich

$$(11) \quad \prod_{s=1}^{n-1} \frac{(zx\xi^s)(zy\eta^s)}{(zx\eta^s)(zy\xi^s)} = -\frac{n^2(zxy)^2(zxh)^{n-1}(zyh)^{n-1} \cdot a_h a_x^{n-1} \cdot a_h a_y^{n-1}}{\{a_x(zyh) + a_h(zxy)\}^n \cdot \{a_y(zxh) - a_h(zxy)\}^n}$$

Es ist nun in analoger Weise zum Zwecke der Auswerthung des anderen Products zu verfahren. Der einzige Unterschied besteht darin, dass an Stelle der Gleichungen (10) nun Gleichungen von einem um Eins niedrigeren Grade für die Parameter der Punkte u^r, v^r auf den Geraden $\widehat{zx}$, $\widehat{zy}$ treten.

Man erhält

$$(12) \quad \prod_{r=1}^{n-2} \frac{(hxu^r)(hyv^r)}{(hxv^r)(hyu^r)} = -\frac{n^2(hxy)^2(hxz)^{n-1}(hyz)^{n-1} \cdot a_z a_x^{n-1} \cdot a_z a_y^{n-1}}{\{a_x(hyz) + a_z(hxy)\}^n \cdot \{a_y(hxz) - a_z(hxy)\}^n}.$$

Es ist nun wohl zu beachten, dass die Nenner der erhaltenen Ausdrücke auf der rechten Seite der Gleichungen (11) und (12) mit einander völlig übereinstimmen auf Grund der bekannten Identität

$$a_h(zxy) - a_z(hxy) + a_x(hzy) - a_y(hzx) = 0.^{*)}$$

*) Vgl. etwa Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie, pag. 283. Gl. (I), mit welcher die im Text stehende Relation im Wesentlichen identisch ist.

§ 4.

Endformeln für die Jacobi'schen Functionen und die σ-Functionen insbesondere.

Die Ergebnisse des vorigen Paragraphen gestatten jetzt, Gleichung (9) des § 2 in folgende Form zu setzen:

$$\log \frac{\vartheta\left(\int_z^x\right)^2}{\vartheta^2} = \log \Phi + \mathsf{H}(x,\, y) + \log \frac{(hxy)^2 \cdot a_z\, a_x^{n-1} \cdot a_z a_y^{n-1}}{(zxy)^2 \cdot a_h a_x^{n-1} \cdot a_h a_y^{n-1}}\,.$$

Die h gar nicht mehr enthaltende Grösse

$$\log \frac{a_z a_x^{n-1} \cdot a_z\, a_y^{n-1}}{(zxy)^2}$$

können wir mit $\log \Phi$ zu einer einzigen Grösse $\log \Psi$ zusammenziehen, wo dann Ψ eine algebraische*) Form der Coordinaten der in Betracht kommenden Punkte bedeutet. Gehen wir endlich von den Logarithmen zu den Zahlen über, so ergiebt sich

$$(13) \qquad \frac{\vartheta\left(\int_y^x\right)^2}{\vartheta^2} = \Psi \cdot \frac{(hxy)^2}{a_h\, a_x^{n-1} \cdot a_h\, a_y^{n-1}} \cdot e^{\mathsf{H}(x,y)}\,.$$

Wir orientiren uns zunächst darüber, wie die Hilfspunkte h und z, von denen beiden unser gesammter Ausdruck unabhängig ist, formal in demselben enthalten sind. Was zunächst h anlangt, so kommt dieser Punkt in Ψ überhaupt nicht vor: *es ist also*

$$\frac{(hxy)^2}{a_h\, a_x^{n-1} \cdot a_h\, a_y^{n-1}} \cdot e^{\mathsf{H}(x,y)}$$

eine von h völlig unabhängige Grösse. Andererseits enthält dieser Ausdruck z überhaupt nicht, weshalb auch Ψ in Wahrheit von z unabhängig ist.

Wir untersuchen ferner die Form

$$\frac{(hxy)^2}{a_h\, a_x^{n-1} \cdot a_h\, a_y^{n-1}} \cdot e^{\mathsf{H}(x,y)}$$

bezüglich ihrer Null- und Unendlichkeitsstellen. Zunächst ist von vornherein klar, dass dieselben von der Lage des Punktes h unabhängig sein müssen. Dies erkennen wir nun leicht auch direct. Aus den für $\mathsf{H}_{xy}^{x'y'}$ in § 2 gemachten Angaben folgt sofort, dass $\mathsf{H}(x, y)$

*) Irrationale.

logarithmisch unendlich wird mit dem Coefficienten $+1$, sobald x oder y in den Berührungspunkt irgend einer der von h an die Curve gehenden $n(n-1)$ Tangenten fällt. Anderseits wird $\mathsf{H}(x, y)$ logarithmisch unendlich mit dem Coefficienten -2, sobald x und y mit h auf eine Gerade zu liegen kommen. $e^{\mathsf{H}(x,y)}$ verschwindet deshalb in der ersten Ordnung, sobald x oder y auf die erste Polare von h tritt, und wird unendlich von der zweiten Ordnung, sobald x, y und h auf gerader Linie liegen. Alle diese Vorkommnisse werden von dem voranstehenden algebraischen Factor augenscheinlich weggehoben. *Der gesammte Ausdruck wird sonach überhaupt nicht unendlich, und verschwindet einzig und allein, und zwar von der zweiten Ordnung für* $x = y$.*)

Von Formel (13), welche je nach Normirung des Integrals dritter Gattung jede Jacobi'sche Function ersten Grades darzustellen vermag, gehen wir zur σ-Function über, indem wir auf (3) § 1 zurückgreifen. Aus dem Normalintegral $Q_{xy}^{x'y'}$ wird dabei ein entsprechendes $\mathsf{H}_{xy}^{x'y'}$ abzuleiten sein, welches wir durch die besondere Benennung $H_{xy}^{x'y'}$ auszeichnen wollen. Wenn wir den in $Q_{xy}^{x'y'}$ auftretenden willkürlichen Hilfspunkt h mit dem in den letzten Paragraphen verwendeten coincidiren lassen, so folgt aus (2), § 1 und 7, § 2:

$$(12) \qquad H_{xy}^{x'y'} = \log \frac{(hxx')\,(hyy')}{(hxy')\,(hyx')} - Q_{xy}^{x'y'}$$

$$= \int_y^x \int_{y'}^{x'} \frac{n . a_h a_\zeta^{n-1} . a_h a_{\zeta'}^{n-1} - \sum_{\nu=1}^{n} a_h a_\zeta^{\nu-1} a_{\zeta'}^{n-\nu} . a_h a_\zeta^{n-\nu} a_{\zeta'}^{\nu-1} + \sum_{\nu=1}^{n-1} a_h^2 a_\zeta^{\nu-1} a_{\zeta'}^{n-\nu-1} . a_\zeta^{n-\nu} a_{\zeta'}^{\nu}}{n . (h\zeta\zeta')^2}$$

$$\times \frac{(k\zeta d\zeta)}{a_k a_\zeta^{n-1}} \cdot \frac{(k'\zeta' d\zeta')}{a_{k'} a_{\zeta'}^{n-1}},$$

auf Grund der leicht zu beweisenden Formel:

$$\log \frac{(hxx')\,(hyy')}{(hxy')\,(hyx')} = \int_y^x \int_{y'}^{x'} \frac{(k\zeta d\zeta)\,(k'\zeta' d\zeta')}{(h\zeta\zeta')^2}.$$

Wenn wir H_{xy}^{xy} kürzer mit $H(x, y)$ bezeichnen, so wird

$$(15) \qquad \sigma^2\left(\int_y^x\right) = \Psi \cdot \frac{(hxy)^2}{a_h a_x^{n-1} \cdot a_h a_y^{n-1}} \cdot e^{H(x,y)}.$$

---

*) Es kommt hier natürlich jene wesentliche Singularität nicht zu Tage, welche die ϑ-Function für unendlich grosse Werthe der Integrale erster Gattung (d. i. für unendlich lange Integrationswege) besitzt.

§ 5.

Die Abel'schen Σ-Functionen.*)

Die Jacobi'schen Functionen ersten Grades, die σ-Functionen insbesondere sind als *irrationale* Jacobi'sche Functionen zu bezeichnen. Denn der algebraische Bestandtheil jeder solchen enthält einen Factor Ψ, welcher nothwendig irrational ist.**) Wir wollen nun *rationale* Jacobi'sche Functionen construiren. Die Möglichkeit, solches zu thun, ruht auf dem Resultate des vorigen Paragraphen, dass der Ausdruck

$$(16)\qquad Z = \frac{1}{\sqrt{a_h a_x^{n-1}}\cdot\sqrt{a_h a_y^{n-1}}}\, e^{\frac{1}{2}H(x,y)},$$

mit (hxy) multiplicirt, von h gänzlich unabhängig wird. Wenn wir nämlich eine in den h, x, y ganze und rationale Covariante der Grundform a_x^n $\Omega(h, x, y)$ mit Z^ν multipliciren, so ist nach dem eben Erwähnten leicht festzustellen, wann das Product

$$\Omega(h, x, y)\,.\,Z^\nu$$

den Namen einer Jacobi'schen Function verdient. Denn erstens, weil dasselbe nur von den Verhältnissen der Coordinaten der Punkte x, y abhängen darf, muss Ω in x und y je vom $\frac{\nu(n-1)}{2}$ Grade sein. Zweitens aber, damit der Ausdruck von h unabhängig werde, ist $\Omega(h, x, y)$ so zu bestimmen, dass

$$\frac{\Omega(h, x, y)}{(hxy)^\nu}$$

von h unabhängig wird. In h muss also vor Allem $\Omega(h, x, y)$ den Grad ν besitzen. Wir bezeichnen eine so bestimmte Form Ω mit $\Phi^{(\nu)}(h, x, y)$ und *nennen*

$$(17)\qquad \Sigma^{(\nu)}(x, y) = \Phi^{(\nu)}(h, x, y)\cdot Z^\nu$$

eine Σ-Function ν^{ten} Grades.

Als erstes Resultat ergiebt sich ohne Weiteres, dass wenn n gerade ist, auch ν nothwendig gerade sein muss. *Zu Curven von geradem Grade giebt es also keine zugehörigen Σ-Functionen ungeraden Grades.*

Untersuchen wir nun $\Sigma^{(\nu)}$ bezüglich der Null- und Unendlichkeitsstellen. Nach den Ergebnissen des vorigen Paragraphen ist Z^ν stets von Null verschieden und wird unendlich von der ν^{ten} Ordnung, sobald x und y mit h auf gerader Linie liegen. Als Function von x angesehn

*) Vergl. F. Klein, a. a. O. § 13, 14.

**) Ausgenommen ist hievon die Curve dritter Ordnung, wie gleich noch näher besprochen wird.

besitzt nun $\Phi^{(\nu)}(h, x, y)$ $\frac{\nu(n-1)}{2} \cdot n$ Nullstellen, nämlich die Schnittpunkte der Curve $\frac{\nu(n-1)}{2}$ ter Ordnung

$$\Phi^{(\nu)}(h, x, y) = 0$$

mit der Curve n^{ter} Ordnung

$$a_x^n = 0.$$

Von diesen Nullstellen werden aber $\nu(n-1)$ gegen die Unendlichkeitsstellen von Z^ν weggehoben. Denn $\Phi^{(\nu)}(h, x, y)$ verschwindet auch jedesmal in der ν^{ten} Ordnung sobald x, y, h auf gerader Linie zu liegen kommen. *Es verschwindet also die Function* $\Sigma^{(\nu)}$ *in*

$$\frac{\nu(n-1)}{2}(n-2) = \nu \cdot p$$

Punkten und wird nirgends unendlich, sei es, dass man sie als Function von x, oder als Function von y betrachtet.

Unsere nächste Frage ist die nach Σ-Functionen *ersten* Grades. Wir suchen also ein $\Phi^{(1)}$ vom ersten Grade in h, je vom $\frac{n-1}{2}$ ten Grade in x und y zu bestimmen, so dass

$$\frac{\Phi^{(1)}(h, x, y)}{(hxy)}$$

von h unabhängig wird, oder, was dasselbe ist, dass

$$\Phi^{(1)}(h, x, y) = 0,$$

die h als laufende Coordinaten angesehen, die Verbindungslinie von x und y darstellt. Es soll also

$$\Phi^{(1)}(x, x, y) = 0,$$
$$\Phi^{(1)}(y, x, y) = 0$$

sein. Dies muss aber wegen der oben angegebenen Grade der Function $\Phi^{(1)}(h, x, y)$ unabhängig davon stattfinden, ob x und y auf der Curve liegen oder nicht. Hieraus aber folgt, dass $\Phi^{(1)}(h, x, y)$ identisch durch $(h\,x\,y)$ theilbar ist:

$$\Phi^{(1)}(h, x, y) = C(x, y)\,(hxy),$$

wo C eine in x und y ganze Covariante von a_x^n bedeutet. Es ist die Frage, wann eine solche Covariante, die in x und y vom Grade $\frac{n-3}{2}$ ist, existirt. Dies ist sicher der Fall für $n = 3$, wo sich die fragliche Covariante auf eine Constante (Invariante) reducirt. *Wir sehen hier die ausgezeichnete Eigenschaft der elliptischen Curve* $a_x^3 = 0$ *hervortreten, dass zu ihr eine rationale Jacobi'sche Function ersten Grades gehört.* *)

*) Das Weierstrass'sche σ (vgl. „Zur Theorie der elliptischen Functionen", l. c.)

Zu jeder Curve

$$a_x^n = 0$$

gehört eine Jacobi'sche Function *zweiten* Grades. Eine Form $\Phi^{(2)}(h, x, y)$ mit allen erforderlichen Eigenschaften ist uns aus § 1 bekannt (dort als $\Phi(h, \zeta, \zeta')$ eingeführt). Wir haben also

$$\Sigma^{(2)}(x, y) = \Phi^{(2)}(h, x, y) \, . \, Z^2.$$

Die dort angegebene Methode zur Bestimmung von $\Phi^{(2)}(h, x, y)$ kann nun weiter verwendet werden um Functionen $\Phi^{(3)}$, $\Phi^{(4)}$, ... zu bestimmen, und so zu höheren Σ-Functionen zu gelangen. Es drängt sich dabei die Frage auf, welche Σ überhaupt aufgestellt werden müssen, so dass alle anderen durch dieselben rational ausgedrückt werden können, mit anderen Worten, die Frage nach einem vollständigen System der Formen $\Phi^{(\nu)}$. Diese Frage, sowie die andere, durch welche Eigenschaften die gewonnenen σ- und Σ-Functionen von anderen Jacobischen Functionen *in ihrer Abhängigkeit von den Integralen erster Gattung* unterschieden sind, muss hier unerörtert bleiben.

Prag, im December 1886.

Ueber eine partielle Differentialgleichung der Thetafunctionen zweier Argumente
und
über die Reihenentwicklung derselben.

Von

E. Wiltheiss in Halle.

Im 99. Bande des „Journals für Mathematik"*) habe ich die partiellen Differentialgleichungen zwischen den Ableitungen der Thetafunctionen nach den Argumenten und nach den Parametern entwickelt. Diese Differentialgleichungen will ich für den Fall der Thetafunctionen zweier Argumente so umformen, dass die Invarianteneigenschaft der Thetafunctionen, auf die vor kurzem erst Klein im 27. Bande der „Mathematischen Annalen"**) aufmerksam gemacht, deutlich zum Ausdruck gelangen, dass nämlich die Differentiationen in der Weise auftreten, wie dies bei der Bildung von Invarianten und Covarianten der Fall ist. Es werden sich dann aus diesen Gleichungen unmittelbar Recursionsformeln ergeben, welche die Glieder n. Dimension in den Argumenten u_1 und u_2 bei der Reihenentwicklung der Thetafunction nach Potenzen der Argumente ableiten aus Gliedern niederer Dimensionen und zwar eben mittelst solcher Operationen, wie sie zur Bildung von Invarianten und Covarianten gebraucht werden. Analoge Recursionsformeln sind schon aus jener partiellen Differentialgleichung durch Brioschi***) abgeleitet worden. Aber bei Brioschi ist einer der sechs singulären Punkte ins Unendliche verlegt, so dass die Invarianteneigenschaft der Thetafunctionen, auf die in diesem Aufsatze hauptsächlich Nachdruck gelegt wird, nicht so sehr zum Ausdruck gelangt. —

*) Seite 236.

**) Seite 431.

***) Rendiconti della r. Accademia dei Lincei 1886, I, p. 199, 215 u. 302.

§ 1.

Bezeichnungen und Definitionen.

Bei dieser Entwicklung ist es nothwendig, dass die sechs singulären Punkte des hyperelliptischen Gebildes, das den Thetafunctionen zu Grunde liegt, sich im Endlichen befinden. Ich muss also, wenn y die Wurzelgrösse bedeutet,

$$\begin{aligned} y^2 = R(x) &= A_0 x^6 + 6A_1 x^5 + 15 A_2 x^4 + 20 A_3 x^3 + 15 A_4 x^2 + 6 A_5 x + A_6 \\ &= A_0 (x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)(x-a_5) \end{aligned}$$

annehmen. Dann sind die Differentialgleichungen, die zwischen den Argumenten u_1 und u_2 und den Variablen x_1 und x_2 bestehen, die folgenden:

$$(1) \qquad \begin{aligned} du_1 &= \frac{x_1 dx_1}{2y_1} + \frac{x_2 dx_2}{2y_2}, \\ du_2 &= \frac{dx_1}{2y_1} + \frac{dx_2}{2y_2}; \end{aligned}$$

und die Normalintegrale zweiter Gattung, welche im wesentlichen den partiellen logarithmischen Ableitungen der Thetafunctionen gleich sind, werden mittelst der Functionen

$$(2) \qquad \begin{aligned} G(x)_1 &= -(2A_0x^3 + 6A_1x^2 + hx + k), \\ G(x)_2 &= -(4A_0x^4 + 18A_1x^3 + 30A_2x^2 + (20A_3 + k)x + l) \end{aligned}$$

gebildet, wo h, k, l Constanten sind, die aber von den $a_0, a_1, \ldots a_5$ abhängen können, in welchem Fall ich sie jedoch, damit keine derselben bevorzugt wird, als symmetrisch in diesen Grössen annehmen will:

$$(3) \qquad \begin{aligned} d\,\frac{\partial \lg \Theta(u_1 u_2)}{\partial u_1} &= G(x_1)_1 \frac{dx_1}{2y_1} + G(x_2)_1 \frac{dx_2}{2y_2} \\ &\quad + d\left[\left(\frac{y_1}{x_1 - a_5} - \frac{y_2}{x_2 - a_5}\right) : (x_1 - x_2)\right], \\ d\,\frac{\partial \lg \Theta(u_1 u_2)}{\partial u_2} &= G(x_1)_2 \frac{dx_1}{2y_1} + G(x_2)_2 \frac{dx_2}{dy_2} \\ &\quad + d\left[\left(\frac{y_1}{x_1 - a_5} + \frac{y_2}{x_2 - a_5}\right) - \frac{a_5}{x_1 - x_2}\left(\frac{y_1}{x_1 - a_5} - \frac{y_2}{x_2 - a_5}\right)\right], \end{aligned}$$

wo $\Theta(u_1 u_2)$ die Fundamentalthetafunction bedeutet. Zu diesen Gleichungen kommt noch als Grenzbedingung hinzu, dass für $u_1 = u_2 = 0$ die Variablen x_1 und x_2 mit a_1 und a_3 zusammenfallen.

Man kann nun die partielle Differentialgleichung, die hier zu Grund gelegt werden soll, entweder aus der in dem angeführten Aufsatz entwickelten Gleichung durch die Substitutionen ableiten, durch welche die dortigen hyperelliptischen Differentialgleichungen in diese hier, (1), übergehen, oder man kann sie auch direct auf die dort

angegebene Weise aus den Differentialgleichungen (1) und (3) herstellen. Man findet in beiden Fällen, wenn man noch an Stelle der Thetafunction selbst dieselbe dividirt durch $2\pi^{-1} \times$ der Quadratwurzel aus der Determinante der realen Perioden:

$$\Theta(u_1 u_2) = 2\pi^{-1}(\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}\omega_{21})^{\frac{1}{2}} \,.\, \mathrm{Th}$$

einführt, die folgende Differentialgleichung

$$(4) \qquad a_i^2 \frac{\partial^2 \mathrm{Th}}{\partial u_1^2} + 2a_i \frac{\partial^2 \mathrm{Th}}{\partial u_1 \partial u_2} + \frac{\partial^2 \mathrm{Th}}{\partial u_2^2}$$

$$= 2[G(a_i)_1 u_1 + G(a_i)_2 u_2] \cdot \left[a_i \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial u_1} + \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial u_2}\right]$$

$$- \quad [G(a_i)_1 u_1 + G(a_i)_2 u_2]^2 \mathrm{Th} + [a_i G(a_i)_1 + G(a_i)_2] \mathrm{Th}$$

$$- R'(a_i)\left\{-2u_2 \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial u_1} + (G(a_i)_{11} u_1^2 + 2G(a_i)_{12} u_1 u_2 + G(a_i)_{22} u_2^2)\mathrm{Th} - 4\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial a_i}\right\},$$

in der $R'(x)$ die Ableitung von $R(x)$ bedeutet und

$$G(x)_{11} = -\left(2A_0 x + 6A_1 + 2\frac{\partial h}{\partial a_i}\right),$$

$$(5) \quad G(x)_{12} = -\left(2A_0 x^2 + 6A_1 x + h + 2\frac{\partial k}{\partial a_i}\right),$$

$$G(x)_{22} = -\left(4A_0 x^3 + 18A_1 x^2 + 30A_2 x + 20A_3 + 2k + 2\frac{\partial l}{\partial a_i}\right)$$

ist, während i die Werthe $0, 1, 2, \ldots, 5$ annehmen kann.

Die Function Th kann sowohl die *geraden* wie die *ungeraden* Thetafunctionen bedeuten. Ist das erstere der Fall, so nimmt sie bekanntlich*) für $u_1 = u_2 = 0$ den Werth

$$(6) \quad A_0^{\frac{1}{2}}[(a_l - a_m)(a_l - a_n)(a_m - a_n) \cdot (a_o - a_p)(a_o - a_q)(a_p - a_q)]^{\frac{1}{4}}$$

an, wo l, m, n, o, p, q die Zahlen $0, 1, 2, \ldots, 5$ in irgend welcher Reihenfolge bedeuten; ist das zweite der Fall, so haben die Ableitungen nach u_1 und u_2 die Werthe

$$(7) \qquad \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial u_1} = -\frac{1}{a_l}\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial u_2}$$

$$= A_0[(a_m - a_n)(a_m - a_o)(a_m - a_p)(a_m - a_q)(a_n - a_o)(a_n - a_p)(a_n - a_q)$$

$$(a_o - a_p)(a_o - a_q)(a_p - a_q)]^{\frac{1}{4}}.$$

*) Vergl. z. B. Thomae, Beitrag zur Bestimmung von $\vartheta(o, o, \ldots)$ durch die Classenmoduln algebraischer Functionen, Journal für Mathematik Bd. 71, S. 201.

§ 2.

Normirung der Integrale 2. Gattung. Die ersten beiden Glieder der Reihen der Thetafunctionen.

Die Invarianteneigenschaft der Thetafunctionen, die ich am Eingang erwähnte, besteht darin, dass bei passender Bestimmung der Grössen h, k, l in den Integralen zweiter Gattung die Glieder gleicher Dimension in der Reihenentwicklung der Thetafunctionen, abgesehen von den Factoren (6) und (7), unmittelbar Covarianten sind. Diese Thatsache setze ich hier für diese Entwicklungen *nicht* als bekannt voraus, sie wird sich vielmehr aus der Differentialgleichung (4) von selbst ergeben. Wohl aber will ich schon hier auf Grund dieser Eigenschaft diese Grössen h, k, l in der erforderlichen Weise bestimmen, um später den Gang der Entwicklungen damit nicht unterbrechen zu müssen. Ich gehe dabei von der Reihenentwicklung der geraden Thetafunction aus und berechne die Glieder zweiter Dimension in derselben, indem ich diese Glieder zuerst mit unbestimmten Coefficienten einführe:

$$\mathrm{Th} = A_0^{\frac{1}{2}}[(a_l-a_m)(a_l-a_n)(a_m-a_n)\cdot(a_o-a_p)(a_o-a_q)(a_p-a_q)]^{\frac{1}{4}}$$
$$\left\{1+\frac{1}{2}(\lambda_1 u_1^2+2\lambda_2 u_1 u_2+\lambda_3 u_2^2)+\cdots\right\},$$

alsdann diesen Ausdruck in die partielle Differentialgleichung (4) substituire und die Argumente Null werden lasse: ich erhalte, wenn ich

$$\alpha_0(x-a_l)(x-a_m)(x-a_n) = \alpha_0 x^3 + 3\alpha_1 x^2 + 3\alpha_2 x + \alpha_3,$$
$$\beta_0(x-a_o)(x-a_p)(x-a_q) = \beta_0 x^3 + 3\beta_1 x^2 + 3\beta_2 x + \beta_3$$

setze, wobei

$$\alpha_0\beta_0 = A_0$$

sein soll, die folgende Gleichung

$$\lambda_1 a_i^2 + 2\lambda_2 a_i + \lambda_3 = (3\alpha_0\beta_2+3\alpha_2\beta_0-h)\,a_i^2 + 2(\alpha_0\beta_3+\alpha_3\beta_0-k)a_i$$
$$+ (3\alpha_1\beta_3+3\alpha_3\beta_1-l), \qquad (i=0,1,\ldots,6)$$

aus der hervorgeht, dass

$$\lambda_1 u_1^2+2\lambda_2 u_1 u_2+\lambda_3 u_2^2=(3\alpha_0\beta_2+3\alpha_2\beta_0-h)u_1^2$$
$$+2(\alpha_0\beta_3+\alpha_3\beta_0-k)u_1u_2+(3\alpha_1\beta_3+3\alpha_3\beta_1-l)u_2^2$$

die Glieder zweiter Dimension sind. Diese sollen bei passender Bestimmung der Grössen h, k, l zu einer Covariante werden. Da der Ausdruck nur symmetrisch je in Bezug auf die drei Wurzeln a_l, a_m, a_n und a_o, a_p, a_q ist, dagegen die Grössen h, k, l symmetrische Functionen aller Wurzeln sein sollen, so kann derselbe nur eine simultane Covariante der beiden cubischen Formen $\alpha_0 x^3 + 3\alpha_1 x^2 + 3\alpha_2 x + \alpha_3$

und $\beta_0 x^3 + 3\beta_1 x^2 + 3\beta_2 x + \beta_3$ werden, und zwar, da er zweiter Ordnung und linear je in den α_i und β_i ist, nur die Covariante

$$(8)\quad \Theta(u_1, u_2) = (\alpha_0\beta_2 - 2\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_0)u_1^2 + (\alpha_0\beta_3 - \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 + \alpha_3\beta_0)u_1u_2 + (\alpha_1\beta_3 - 2\alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_1)u_2^2.$$

Dies tritt auch thatsächlich ein: der Ausdruck, welcher die Glieder zweiter Dimension der Thetafunction darstellt, wird

$$\lambda_1 u_1^2 + 2\lambda_2 u_1 u_2 + \lambda_3 u_2^2 = \frac{9}{5}\Theta(u_1, u_2),$$

und mithin

$$(9)\quad \mathrm{Th} = A^{\frac{1}{2}}\left[(a_l - a_m)(a_l - a_n)(a_m - a_n)\cdot(a_o - a_p)(a_o - a_q)(a_p - a_q)\right]^{\frac{1}{4}} \left\{1 + \frac{9}{10}\Theta(u_1, u_2) + \cdots\right\},$$

wenn man

$$h = 6A_2 = \frac{2}{5}(3\alpha_0\beta_2 + 9\alpha_1\beta_1 + 3\alpha_2\beta_0),$$

$$k = 2A_3 = \frac{1}{10}(\alpha_0\beta_3 + 9\alpha_1\beta_2 + 9\alpha_2\beta_1 + \alpha_3\beta_0),$$

$$l = 6A_4 = \frac{2}{5}(3\alpha_1\beta_3 + 9\alpha_2\beta_2 + 3\alpha_3\beta_1)$$

setzt. Diese Ausdrücke sollen von jetzt an auch für diese Grössen angenommen werden, so dass im folgenden

$$(2\mathrm{a})\quad \begin{aligned} G(x)_1 &= -(2A_0x^3 + 6A_1x^2 + 6A_2x + 2A_3), \\ G(x)_2 &= -(4A_0x^4 + 18A_1x^3 + 30A_2x^2 + 22A_3x + 6A_4), \end{aligned}$$

und demnach

$$(5\mathrm{a})\quad \begin{aligned} G(x)_{11} &= -\frac{1}{5}(6A_0x + 6A_1), \\ G(x)_{12} &= -\frac{1}{5}(9A_0x^2 + 24A_1x + 15A_2), \\ G(x)_{22} &= -\frac{1}{5}(16A_0x^3 + 66A_1x^2 + 90A_2x + 40A_3) \end{aligned}$$

ist. —*)

---

*) Verlegt man eine der Wurzeln $a_\varkappa$ ins Unendliche, nimmt also $R(x)$ nur vom fünften Grade an:

$$R(x) = B_0x^5 + B_1x^4 + B_2x^3 + B_3x^2 + B_4x + B_5,$$

so sind die entsprechenden Ausdrücke:

$$G(x)_1 = -\left(B_0x^2 + \frac{2}{5}B_1x + \frac{1}{10}B_2\right),$$

$$G(x)_2 = -\left(3B_0x^3 + 2B_1x^2 + \frac{11}{10}B_2x + \frac{2}{5}B_3\right).$$

Bei der vorhergehenden Bestimmung der Grössen h, k, l ergab sich zugleich der Ausdruck für die Glieder zweiter Dimension der geraden Thetafunction; dementsprechend will ich hier auch noch für die ungerade Thetafunction die Glieder dritter Dimension berechnen. Zu dem Zwecke zerlege ich

$$R(x) = (c_2 x - c_1)(\gamma_0 x^5 + 5\gamma_1 x^4 + 10\gamma_2 x^3 + 10\gamma_3 x^2 + 5\gamma_4 x + \gamma_5),$$

und substituire alsdann in die partielle Differentialgleichung (4) die Reihenentwicklung der ungeraden Thetafunction:

$$\begin{aligned}\mathrm{Th} = \gamma_0 [(a_m - a_n)\cdots]^{\frac{1}{4}} \{(c_2 u_1 - c_1 u_2) + (\lambda_0 u_1^3 + 3\lambda_1 u_1^2 u_2 \\ + 3\lambda_2 u_1 u_2^2 + \lambda_3 u_2^3) + \cdots\},\end{aligned}$$

wobei in der viereckigen Klammer das Product der Differenzen der Wurzeln $a_m, a_n, \ldots$ von $\gamma_0 x^5 + 5\gamma_1 x^4 + \cdots = 0$ (vergl. (7)) steht und die Glieder erster Dimension, indem ich

$$c_2 a_i = c_1$$

setze, gemäss (7) gebildet sind. Indem ich für a_i die Wurzeln $a_m, a_n, a_p, \ldots$ nehme und nur die Glieder erster Dimension auf beiden Seiten zurückbehalte, bekomme ich die Ausdrücke für die unbestimmten Coefficienten λ_0, λ_1, λ_2, λ_3, und zwar finde ich dadurch, dass die Glieder dritter Dimension in der Reihenentwicklung der ungeraden Thetafunction die folgenden

$$\begin{aligned}(10) \quad & \lambda_0 u_1^3 + 3\lambda_1 u_1^2 u_2 + 3\lambda_2 u_1 u_2^2 + \lambda_3 u_2^3) \\ & = -\frac{1}{3}\{c_1^2(\gamma_0 u_1^3 + 3\gamma_1 u_1^2 u_2 + 3\gamma_2 u_1 u_2^2 + \gamma_3 u_2^2) \\ & \quad + 2c_1 c_2(\gamma_1 u_1^3 + 3\gamma_2 u_1^2 u_2 + 3\gamma_3 u_1 u_2^2 + \gamma_4 u_2^3) \\ & \quad + c_2^2(\gamma_2 u_1^3 + 3\gamma_3 u_1^2 u_2 + 3\gamma_4 u_1 u_2^2 + \gamma_5 u_2^3)\}\end{aligned}$$

sind.

§ 3.

Umwandlung der Differentialgleichung. Eigenschaften der Reihen der Thetafunctionen.

Die Umwandlung der partiellen Differentialgleichung (4), um die es sich jetzt vorerst handelt, geschieht nun in folgender Weise: Mittelst der identischen Gleichung

$$A_0 a_i^6 + 6A_1 a_i^5 + 15A_2 a_i^4 + 20A_3 a_i^3 + 15A_4 a_i^2 + 6A_5 a_i + A_6 = 0$$

erniedrige ich in den Coefficienten von $u_1^2\mathrm{Th}$, $u_1 u_2 \mathrm{Th}$ und $u_2^2 \mathrm{Th}$ die Potenzen von a_i, deren Exponenten grösser als fünf sind. Durch diese Reduction fallen dann aber auch zugleich die fünfte, vierte und dritte Potenz von a_i weg, so dass diese Coefficienten nun Functionen zweiten Grades von a_i werden; und zwar sind, wenn man den Coefficienten von $u_\alpha u_\beta \mathrm{Th}$ mit $g'_{\alpha+\beta-1} a_i^2 + g''_{\alpha+\beta-1} a_i + g'''_{\alpha+\beta-1}$ bezeichnet,

$$
\begin{aligned}
&g_1' = -12(A_0A_4 - 4A_1A_3 + 3A_2^2),\\
&g_1'' = -12(A_0A_5 - 3A_1A_4 + 2A_2A_3),\\
(11)\qquad &g_1''' = -\tfrac{4}{5}(4A_0A_6 - 9A_1A_5 + 5A_3^2),\\
&g_2' = -12(A_0A_5 - 3A_1A_4 + 2A_2A_3),\\
&g_2'' = -\tfrac{4}{5}(7A_0A_6 + 18A_1A_5 - 135A_2A_4 + 110A_3^2),
\end{aligned}
$$

während g_3''' aus g_1', g_3'' aus g_1'', g_3' aus g_1''', g_2''' aus g_2' durch Vertauschung von A_0 mit A_6, A_1 mit A_5, A_2 mit A_4 entsteht. —

Alsdann ersetze ich in der Gleichung (4) $R'(a_i)\dfrac{\partial \mathrm{Th}}{\partial a_i}$ durch

$$
\begin{aligned}
\sum_{\varkappa} \{&A_0(a_i^5 + a_i^4 a_\varkappa + a_i^3 a_\varkappa^2 + a_i^2 a_\varkappa^3 + a_i a_\varkappa^4 + a_\varkappa^5)\\
&+ 6A_1(a_i^4 + a_i^3 a_\varkappa + a_i^2 a_\varkappa^2 + a_i a_\varkappa^3 + a_\varkappa^4)\\
&+ 15A_2(a_i^3 + a_i^2 a_\varkappa + a_i a_\varkappa^2 + a_\varkappa^3)\\
&+ 20A_3(a_i^2 + a_i a_\varkappa + a_\varkappa^2) + 15A_4(a_i + a_\varkappa) + 6A_5\}\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial a_\varkappa},
\end{aligned}
$$

(die Summation bezüglich $\varkappa$ ist von 0 bis 5 auszuführen), was in Folge davon möglich ist, dass die einzelnen Glieder der Summe gleich

$$\frac{R(a_i) - R(a_\varkappa)}{a_i - a_\varkappa}$$

sind, also entweder den Werth 0 oder den Werth $R'(a_\varkappa)$ haben, je nachdem $\varkappa \gtrless i$ oder $\varkappa = i$ ist.

In Folge dieser beiden Aenderungen nimmt nun die Gleichung (4) die folgende Form an:

$$
\begin{aligned}
(4a)\quad a_i^2 \frac{\partial^2 \mathrm{Th}}{\partial u_1^2} &+ 2a_i \frac{\partial^2 \mathrm{Th}}{\partial u_1 \partial u_2} + \frac{\partial^2 \mathrm{Th}}{\partial^2 u_2^2} = [a_i G(a_i)_1 + G(a_i)_2]\,\mathrm{Th}\\
&+ 2[a_i G(a_i)_1 u_1 + (a_i G(a_i)_2 + R'(a_i))u_2]\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial u_1}\\
&+ 2[G(a_i)_1 u_1 + G(a_i)_2 u_2]\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial u_2} + [a_i^2(g_1' u_1^2 + g_2' u_1 u_2 + g_3' u_2^2)\\
&+ a_i(g_1'' u_1^2 + g_2'' u_1 u_2 + g_3'' u_2^2) + (g_1''' u_1^2 + g_2''' u_1 u_2 + g_3''' u_2^2)]\,\mathrm{Th}\\
&+ 4\Big\{a_i^5 \sum A_0 \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial a_\varkappa} + a_i^4 \sum (A_0 a_\varkappa + 6A_1)\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial a_\varkappa}\\
&+ a_i^3 \sum (A_0 a_\varkappa^2 + 6A_1 a_\varkappa + 15A_2)\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial a_\varkappa}\\
&+ a_i^2 \sum (A_0 a_\varkappa^3 + 6A_1 a_\varkappa^2 + 15A_2 a_\varkappa + 20A_3)\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial a_\varkappa}\\
&+ a_i \sum (A_0 a_\varkappa^4 + 6A_1 a_\varkappa^3 + 15A_2 a_\varkappa^2 + 20A_3 a_\varkappa + 15A_4)\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial a_\varkappa}\\
&+ \sum (A_0 a_\varkappa^5 + 6A_1 a_\varkappa^4 + 15A_2 a_\varkappa^3 + 20A_3 a_\varkappa^2 + 15A_4 a_\varkappa + 6A_5)\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial a_\varkappa}\Big\},
\end{aligned}
$$

wobei die Summation jedesmal über $\varkappa$, und zwar von 0 bis 5 auszuführen ist. Die Gleichung (4) ist durch diese Operation eine ganze Function von a_i von nur dem fünften Grade geworden, deren Coefficienten symmetrisch in Bezug auf $a_0, a_1, \ldots a_5$ sind. Da aber die beiden Seiten für die sechs Werthe $a_0, a_1, \ldots a_5$ für a_i einander gleich werden, so müssen die Coefficienten derselben Potenz von a_i auf beiden Seiten übereinstimmen. Dieser Umstand giebt die neuen Formen der Differentialgleichungen.

So liefern die Coefficienten von a_i^5, a_i^4 und a_i^3 die folgenden Gleichungen:

$$0 = 4A_0 u_2 \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial u_1} + 4A_0 \sum_\varkappa \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial a_\varkappa},$$

$$\begin{aligned} 0 = &- 6A_0 \,\mathrm{Th} - (4A_0 u_1 - 24A_1 u_2) \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial u_1} - 8A_0 u_2 \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial u_2} \\ &+ 4 \sum_\varkappa (A_0 a_\varkappa + 6A_1) \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial a_\varkappa}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = &- 24A_1 \,\mathrm{Th} - (12A_1 u_1 - 60A_2 u_2) \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial u_1} - (4A_0 u_1 + 36A_1 u_2) \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial u_2} \\ &+ 4 \sum_\varkappa (A_0 a_\varkappa^2 + 6A_1 a_\varkappa + 15A_2) \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial a_\varkappa}, \end{aligned}$$

welche auch auf die Form gebracht werden können:

$$u_2 \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial u_1} = - \sum_\varkappa \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial a_\varkappa}, \tag{12}$$

$$\frac{3}{2} \mathrm{Th} + u_1 \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial u_1} + 2u_2 \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial u_2} = \sum_\varkappa a_\varkappa \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial a_\varkappa}, \tag{13}$$

$$3A_1 \left(\mathrm{Th} + u_1 \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial u_1} + u_2 \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial u_2}\right) - A_0 u_1 \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial u_2} = - A_0 \sum_\varkappa a_\varkappa^2 \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial a_\varkappa}. \tag{14}$$

Die Gleichungen, welche sich aus den Coefficienten von a_i^2, a_i und a_i^0 ergeben, will ich nicht einzeln betrachten, sondern sie, nachdem ich sie bez. mit u_1^2, $u_1 u_2$, u_2^2 multiplicirt habe, durch Addition in eine einzige Gleichung zusammenfassen:

$$\begin{aligned} &u_1^2 \frac{\partial^2 \mathrm{Th}}{\partial u_1^2} + 2u_1 u_2 \frac{\partial^2 \mathrm{Th}}{\partial u_1 \partial u_2} + u_2^2 \frac{\partial^2 \mathrm{Th}}{\partial u_2^2} \\ &= [g_1' u_1^4 + (g_1'' + g_2') u_1^3 u_2 + (g_1''' + g_2'' + g_3') u_1^2 u_2^2 + (g_2''' + g_3'') u_1 u_2^3 + g_3''' u_2^4] \mathrm{Th} \\ &- 6[6A_2 u_1^2 + 4A_3 u_1 u_2 + A_4 u_2^2] \mathrm{Th} + 12[-A_2 u_1^3 + 6A_3 u_1^2 u_2 + 4A_4 u_1 u_2^2 + A_5 u_2^3] \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial u_1} \\ &- 12[A_1 u_1^3 + 6A_2 u_1^2 u_2 + 4A_3 u_1 u_2^2 + A_4 u_2^3] \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial u_2} + 4 \sum_\varkappa [(A_0 a_\varkappa^3 + 6A_1 a_\varkappa^2 + 15A_2 a_\varkappa \\ &+ 20A_3) u_1^2 + (A_0 a_\varkappa^4 + 6A_1 a_\varkappa^3 + 15A_2 a_\varkappa^2 + 20A_3 a_\varkappa + 15A_4) u_1 u_2 \\ &+ (A_0 a_\varkappa^5 + 6A_1 a_\varkappa^4 + 15A_2 a_\varkappa^3 + 20A_3 a_\varkappa^2 + 15A_4 a_\varkappa + 6A_5) u_2^2] \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial a_\varkappa}. \end{aligned} \tag{15}$$

Diese Gleichung ändere ich noch dadurch um, dass ich zu ihr die Gleichungen (12) und (13) addire, nachdem ich dieselben mit

$$4(20A_3u_1^2+15A_4u_1u_2+6A_5u_2^2),$$

resp. mit

$$-20(2A_2u_1^2+2A_3u_1u_2+A_4u_2^2)$$

multiplicirt habe:

$$(15\text{a})\qquad u_1^2\frac{\partial^2\mathrm{Th}}{\partial u_1^2}+2u_1u_2\frac{\partial^2\mathrm{Th}}{\partial u_1\partial u_2}+u_2^2\frac{\partial^2\mathrm{Th}}{\partial u_2^2}$$

$$=[g_1'u_1^4+(g_1''+g_2')u_1^3u_2+(g_1'''+g_2''+g_3')u_1^2u_2^2+(g_2'''+g_3'')u_1u_2^3+g_3'''u_2^4]\,\mathrm{Th}$$

$$+12[2A_2u_1^2+3A_3u_1u_2+2A_4u_2^2]\,\mathrm{Th}+4[7A_2u_1^3+8A_3u_1^2u_2+2A_4u_1u_2^2-3A_5u_2^3]\frac{\partial\mathrm{Th}}{\partial u_1}$$

$$+4[-3A_1u_1^3+2A_2u_1^2u_2+8A_3u_1u_2^2+7A_4u_2^3]\frac{\partial\mathrm{Th}}{\partial u_2}$$

$$+4\sum_\varkappa[(A_0a_\varkappa^3+6A_1a_\varkappa^2+5A_2a_\varkappa)u_1^2+(A_0a_\varkappa^4+6A_1a_\varkappa^3+15A_2a_\varkappa^2+10A_3a_\varkappa)u_1u_2$$

$$+(A_0a_\varkappa^5+6A_1a_\varkappa^4+15A_2a_\varkappa^3+20A_3a_\varkappa^2+10A_4a_\varkappa)u_2^2]\frac{\partial\mathrm{Th}}{\partial a_\varkappa}\cdot -$$

Ehe ich mich nun zu den weiteren Umformungen dieser Gleichungen wende, will ich aus denselben noch einige Eigenschaften der Thetafunctionen ableiten, die sich auf deren Reihenentwicklung beziehen.

Die Reihe der geraden Thetafunction, die nach den Potenzen der Argumente u_1 und u_2 aufsteigt, ordne ich nach den Dimensionen dieser Argumente:

$$\mathrm{Th}=t(1+N_2+N_4+N_6+\cdots),$$

(wo t den Ausdruck (6):

$$(16)\qquad t=A_0^{\frac{1}{2}}[(a_l-a_m)(a_l-a_n)(a_m-a_n)\cdot(a_o-a_p)(a_o-a_q)(a_p-a_q)]^{\frac{1}{4}},$$

bedeutet, und $N_{2\lambda}$ die Gesammtheit der Glieder $2\lambda^{\text{ter}}$ Dimension bezeichnet), und substituire dieselbe in die letzte Differentialgleichung. Wenn ich dann die Glieder gleich hoher Dimension in den u_1, u_2 auf beiden Seiten einander gleichsetze, so erhalte ich bei Berücksichtigung davon, dass

$$(17)\qquad u_1^2\frac{\partial^2N_{2\lambda}}{\partial u_1^2}+2u_1u_2\frac{\partial^2N_{2\lambda}}{\partial u_1\partial u_2}+u_2^2\frac{\partial^2N_{2\lambda}}{\partial u_2^2}=2\lambda(2\lambda-1)N_{2\lambda},$$

die schon in der Einleitung erwähnte Recursionsformel, durch welche $N_{2\lambda}$ auf $N_{2\lambda-2}$ und $N_{2\lambda-4}$ zurückgeführt wird:

$$2\lambda(2\lambda-1)N_{2\lambda}=[g_1'u_1^4+\cdots]N_{2\lambda-4}+12[2A_2u_1^2+\cdots]N_{2\lambda-2}$$

$$+4[7A_2u_1^3+\cdots]\frac{\partial N_{2\lambda-2}}{\partial u_1}+4[-3A_1u_1^3+\cdots]\frac{\partial N_{2\lambda-2}}{\partial u_2}$$

$$+4t^{-1}\sum_\varkappa[(A_0a_\varkappa^3+\cdots)u_1^2+(A_0a_\varkappa^4+\cdots)u_1u_2$$

$$+(A_0a_\varkappa^5+\cdots)u_2^2]\frac{\partial(tN_{2\lambda-2})}{\partial a_\varkappa},$$

eine Gleichung, welche gültig ist für $\lambda > 1$, und zu der für $\lambda = 1$ noch hinzutritt:

$$2N_2 = 12[2A_2u_1^2 + \cdots] + 4t^{-1}\sum_{\varkappa}[(A_0a_\varkappa^3 + \cdots)u_1^2 + (A_0a_\varkappa^4 + \cdots)u_1u_2 + (A_0a_\varkappa^5 + \cdots)u_2^2]\frac{\partial t}{\partial a_\varkappa}.$$

Mit Hilfe der zweiten Gleichung kann man aus der ersteren noch die Ableitungen des irrationalen Ausdrucks t entfernen:

$$\begin{aligned}(18)\quad 2\lambda(2\lambda-1)N_{2\lambda} = {} & 2N_2N_{2\lambda-2} + [g_1'u_1^4 + (g_1''+g_2')u_1^3u_2 \\ & + (g_1'''+g_2''+g_3')u_1^2u_2^2 \\ & + (g_2'''+g_3'')u_1u_2^3 + g_3'''u_2^4]N_{2\lambda-4} \\ & + 4[7A_2u_1^3 + 8A_3u_1^2u_2 + 2A_4u_1u_2^2 - 3A_5u_2^3]\frac{\partial N_{2\lambda-2}}{\partial u_1} \\ & + 4[-3A_1u_1^3 + 2A_2u_1^2u_2 + 8A_3u_1u_2^3 + 7A_4u_2^3]\frac{\partial N_{2\lambda-2}}{\partial u_2} \\ & + 4\sum_{\varkappa}[(A_0a_\varkappa^3 + 6A_1a_\varkappa^2 + 5A_2a_\varkappa)u_1^2 \\ & + (A_0a_\varkappa^4 + 6A_1a_\varkappa^3 + 15A_2a_\varkappa^2 + 10A_3a_\varkappa)u_1u_2 \\ & + (A_0a_\varkappa^5 + 6A_1a_\varkappa^4 + 15A_2a_\varkappa^3 + 20A_3a_\varkappa^2 \\ & + 10A_4a_\varkappa)u_2^2]\frac{\partial N_{2\lambda-2}}{\partial a_\varkappa}.\end{aligned}$$

Diese Gleichung zeigt nun, wenn man die oben, § 2, eingeführte Zerlegung von $R(x)$,

$$R(x) = (\alpha_0x^3 + 3\alpha_1x^2 + 3\alpha_2x + \alpha_3)(\beta_0x^3 + 3\beta_1x^2 + 3\beta_2x + \beta_3),$$

und den daselbst gefundenen Ausdruck von N_2,

$$N_2 = \frac{9}{10}\Theta(u_1, u_2) = \frac{9}{10}\{(\alpha_0\beta_2 - 2\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_0)u_1^2 + \cdots\},$$

mit in Betracht zieht, successive, dass $N_4, N_6, \ldots$, überhaupt alle $N_{2\lambda}$ rationale Functionen der Coefficienten α_i und β_i sind und zwar, dass es ganze Functionen von $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ und $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ sind und dass als Nenner höchstens Potenzen von α_0 und β_0 vorkommen können. Da aber ferner diese Gleichung (18), sowie $N_0 = 1$ und N_2 ungeändert bleiben, wenn man u_1 mit $-u_2$, u_2 mit $-u_1$, $a_\varkappa$ mit $1 : a_\varkappa$ und demgemäss A_ν mit $A_{6-\nu}$, α_i mit α_{3-i} und β_i mit β_{3-i} vertauscht, so schliesst man aus diesem Umstand successive, dass $N_4, N_6, \ldots$, überhaupt alle $N_{2\lambda}$ sich bei dieser Vertauschung nicht ändern dürfen. Daraus folgt sodann auch, dass keine Potenzen von α_0 oder β_0 in den $N_{2\lambda}$ als Nenner auftreten können, denn sonst würden nach der Vertauschung sich Potenzen von α_3 und β_3 vorfinden, was nach obigem nicht der Fall ist. Es sind demnach die $N_{2\lambda}$ *ganze Functionen der Coefficienten* $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *und* $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$, *welche bei der gegenseitigen*

Vertauschung von u_1 und $-u_2$, α_0 und α_3, α_1 und α_2, β_0 und β_3, β_1 und β_2 ungeändert bleiben.

Da nun ausserdem die Reihe für Th, und demnach auch die einzelnen Glieder derselben der Gleichung (12) genügen, so ist

$$u_2 \frac{\partial (t N_{2\lambda})}{\partial u_1} = - \sum_\varkappa \frac{\partial (t N_{2\lambda})}{\partial a_\varkappa},$$

oder, da t als Invariante die Gleichung $\sum_\varkappa \frac{\partial t}{\partial a_\varkappa} = 0$ befriedigt,

$$u_2 \frac{\partial N_{2\lambda}}{\partial u_1} = - \sum_\varkappa \frac{\partial N_{2\lambda}}{\partial a_\varkappa},$$

und aus dieser Gleichung in Verbindung mit der eben festgestellten Beschaffenheit der $N_{2\lambda}$ erkennt man, dass *diese $N_{2\lambda}$ simultanen Covarianten der beiden cubischen Formen $\alpha_0 x_1^3 + 3\alpha_1 x_1^2 x_2 + 3\alpha_2 x_1 x_2^2 + \alpha_3 x_2^3$ und $\beta_0 x_1^3 + 3\beta_1 x_1^2 x_2 + 3\beta_2 x_1 x_2^2 + \beta_3 x_2^3$ sind, in welche ich $x_2^6 R(x_1 : x_2)$ zerlegt habe.*

Durch die gleiche Betrachtung kommt man auch bei den ungeraden Thetafunctionen zu entsprechenden Resultaten. Ich führe wieder die nach den Dimensionen der u_1, u_2 geordnete Reihenentwicklung der ungeraden Thetafunction ein:

$$\text{(19)} \qquad \mathrm{Th} = s(N_1 + N_3 + N_5 + \cdots),$$

wo $N_{2\lambda+1}$ die Gesammtheit der Glieder $(2\lambda+1)^{\text{ter}}$ Dimension in den u_1, u_2 bedeutet und wo, wenn ich $R(x)$ in der oben, § 2, ausgeführten Weise

$$R(x) = (c_2 x - c_1)(\gamma_0 x^5 + 5\gamma_1 x^4 + 10\gamma_2 x^3 + 10\gamma_3 x^2 + 5\gamma_4 x + \gamma_5)$$

zerlege, alsdann (vergl. (7) und (10))

$$\text{(20)} \quad s = \gamma_0 [(a_m - a_n)(a_m - a_o)(a_m - a_p)(a_m - a_q)(a_n - a_o)(a_n - a_p)$$
$$(a_n - a_q)(a_o - a_p)(a_o - a_q)(a_p - a_q)]^{\frac{1}{4}},$$

$$N_1 = c_2 u_1 - c_1 u_2 = c_2 (u_1 - a_i u_2),$$

$$N_3 = -\frac{1}{8}\left\{c_1^2(\gamma_0 u_1^3 + 3\gamma_1 u_1^2 u_2 + 3\gamma_2 u_1 u_2^2 + \gamma_3 u_2^3) + \cdots\right\}$$

ist. Indem ich diese Reihe in die Gleichung (15a) substituire, erhalte ich

$$6N_3 = 12[2A_2 u_1^2 + \cdots] N_1 + 4s^{-1} \sum_\varkappa [(A_0 a_\varkappa^3 + \cdots) u_1^2 + (A_0 a_\varkappa^4 + \cdots) u_1 u_2$$
$$+ (A_0 a_\varkappa^5 + \cdots) u_2^2] \frac{\partial (s N_1)}{\partial a_\varkappa},$$

$$\text{(21)} \quad 2\lambda(2\lambda+1) N_{2\lambda+1} = [g_1' u_1^4 + \cdots] N_{2\lambda-3} + 12 [2 A_2 u_1^2 + \cdots] N_{2\lambda-1}$$
$$+ 4[7 A_2 u_1^3 + \cdots] \frac{\partial N_{2\lambda-1}}{\partial u_1} + 4[-3A_1 u_1^3 + \cdots] \frac{\partial N_{2\lambda-1}}{\partial u_2}$$
$$+ 4s^{-1} \sum_\varkappa [(A_0 a_\varkappa^3 + \cdots) u_1^2 + (A_0 a_\varkappa^4 + \cdots) u_1 u_2 + (A_0 a_\varkappa^5 + \cdots) u_2^2] \frac{\partial (s N_{2\lambda-1})}{\partial a_\varkappa},$$

und aus diesen Gleichungen folgt bei Berücksichtigung der Ausdrücke von N_1 und N_3, dass *die $N_{2\lambda+1}$ ganze Functionen der Coefficienten γ_μ und der c_1, c_2 sind, welche ihr Vorzeichen ändern, wenn man gegenseitig u_1 mit $-u_2$, c_1 mit $-c_2$, γ_0 mit γ_5, γ_1 mit γ_4 und γ_2 mit γ_3 vertauscht.* Ausserdem ergiebt sich aus der Gleichung (12), da derselben die Reihe genügen muss, dass

$$u_2 \frac{\partial N_{2\lambda+1}}{\partial u_1} = -\sum_{\varkappa} \frac{\partial N_{2\lambda+1}}{\partial a_\varkappa}$$

ist, und hieraus sieht man, dass *die $N_{2\lambda+1}$ simultane Covarianten der linearen Form $c_2x_1 - c_1x_2$ und der Form fünfter Ordnung*

$$\gamma_0 x_1^5 + 5\gamma_1 x_1^4 x_2 + 10\gamma_2 x_1^3 x_2^2 + 10\gamma_3 x_1^2 x_2^3 + 5\gamma_4 x_1 x_2^4 + \gamma_5 x_2^5$$

sind, deren Product die Function $x_2^6 R(x_1:x_2)$ liefert. —

Gemäss den eben angestellten Betrachtungen will ich nach zwei Richtungen hin die ferneren Umformungen der Gleichungen (12), (13), (14) und (15a) vornehmen, und zwar in der Weise, dass einerseits in denselben nur die simultanen Covarianten der beiden cubischen Formen, anderseits nur die simultanen Covarianten der linearen Form und der Form fünfter Ordnung auftreten sollen, in welche $x_2^6 R(x_1:x_2)$ zerlegt worden ist.

Bei einer weitern, dritten Umformung dieser Gleichungen, die ich ausserdem noch machen werde, gehe ich davon aus, dass in denselben die sechs Wurzeln $a_\varkappa$ symmetrisch vorkommen und es demnach möglich sein muss, alle in den Gleichungen vorkommende Grössen durch Covarianten auszudrücken, die zu der Function $R(x)$ selbst gehören. — Diese letztere Umformung, als die einfachste, will ich zuerst ausführen.

§ 4.

Die umgewandelten Differentialgleichungen in ihrer allgemeinen Form.

In den Gleichungen (12) und (13) führe ich an Stelle der Differentiation nach den Wurzeln $a_\varkappa$ mittelst der Gleichung

$$\text{(22)} \qquad \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial a_\varkappa} = -\frac{1}{6} A_0 \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_1} - \frac{1}{15}(A_0 a_\varkappa + 6A_1)\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_2} - \frac{1}{20}(A_0 a_\varkappa^2 + 6A_1 a_\varkappa + 15A_2)\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_3} - \cdots$$

die Differentiation nach den Coefficienten A_i ein. Ich erhalte

$$\text{(A)} \qquad u_2 \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial u_1} = A_0 \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_1} + 2A_1 \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_2} + 3A_2 \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_3} + 4A_3 \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_4} + 5A_4 \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_5} + 6A_5 \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_6},$$

$$\text{(B)}\ \frac{3}{2}\,\mathrm{Th}+u_1\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial u_1}+2u_2\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial u_2}=A_1\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_1}+2A_2\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_2}+3A_3\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_3}$$
$$+4A_4\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_4}+5A_5\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_5}+6A_6\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_6}.$$

Und zu diesen Gleichungen treten noch die beiden entsprechenden hinzu, die ich bekomme, indem ich u_1 mit $-u_2$, u_2 mit $-u_1$, a_x mit $1:a_x$, und also A_i mit A_{6-i} (für $i=0,1,\ldots 6$) vertausche, was ja gestattet ist:

$$\text{(A')}\quad u_1\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial u_2}=6A_1\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_0}+5A_2\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_1}+4A_3\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_2}+3A_4\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_3}$$
$$+2A_5\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_4}+A_6\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_5},$$

$$\text{(B')}\ \frac{3}{2}\,\mathrm{Th}+2u_1\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial u_1}+u_2\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial u_2}=6A_0\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_0}+5A_1\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_1}+4A_2\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_2}$$
$$+3A_3\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_3}+2A_4\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_4}+A_5\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_5}.$$

Den Gleichungen (B) und (B') gebe ich noch dadurch, dass ich sie addire und subtrahire, zwei neue Formen:

$$(23)\quad \mathrm{Th}+u_1\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial u_1}+u_2\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial u_2}=2\Big(A_0\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_0}+A_1\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_1}+A_2\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_2}$$
$$+A_3\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_3}+A_4\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_4}+A_5\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_5}+A_6\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_6}\Big),$$

$$(24)\quad u_1\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial u_1}-u_2\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial u_2}=6A_0\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_0}+4A_1\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_1}+2A_2\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_2}$$
$$-2A_4\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_4}-4A_5\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_5}-6A_6\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_6}.$$

Die Gleichung (14) brauche ich nicht weiter zu berücksichtigen, denn sie giebt nach der Umformung

$$3A_1\Big(\mathrm{Th}+u_1\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial u_1}+u_2\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial u_2}\Big)-A_0u_1\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial u_2}=(6A_1^2-5A_0A_2)\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_1}$$
$$+(6A_1A_2-4A_0A_3)\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_2}+(6A_1A_3-3A_0A_4)\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_3}$$
$$+(6A_1A_4-2A_0A_5)\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_4}+(6A_1A_5-A_0A_6)\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_5}$$
$$+6A_1A_6\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_6},$$

und lässt sich, wie man unmittelbar sieht, aus den Gleichungen (A') und (23) zusammensetzen.

Es ist jetzt noch übrig, die hauptsächliche Gleichung (15a) in entsprechender Weise umzuformen. Zu dem Zwecke ersetze ich mit

Hülfe der eben gefundenen Gleichungen in derselben die Glieder, welche mit $u_1^2\mathrm{Th}$, $u_1u_2\mathrm{Th}$, $u_2^2\mathrm{Th}$, mit $\frac{\partial\,\mathrm{Th}}{\partial u_1}$, $\frac{\partial\,\mathrm{Th}}{\partial u_2}$ und $\frac{\partial\,\mathrm{Th}}{\partial \alpha_\varkappa}$ multiplicirt sind, durch Ausdrücke, welche $\frac{\partial\,\mathrm{Th}}{\partial A_\nu}$ als Factor enthalten. Und zwar muss ich, damit diese Umformung überhaupt ausführbar wird, zuerst die mit Th multiplicirten Glieder mittelst der Gleichung (23), hierauf die Glieder $A_2u_1^3\frac{\partial\,\mathrm{Th}}{\partial u_1}$ und $A_4u_2^3\frac{\partial\,\mathrm{Th}}{\partial u_2}$ mittelst der Gleichung (24) und dann erst die übrigen Glieder mittelst der Gleichungen (A), (A') und (22) entfernen. Die Gestalt der Gleichung wird dann die folgende:

$$(25)\quad u_1^2\frac{\partial^2\mathrm{Th}}{\partial u_1^2}+2u_1u_2\frac{\partial^2\mathrm{Th}}{\partial u_1\partial u_2}+u_2^2\frac{\partial^2\mathrm{Th}}{\partial u_2^2}=g(u_1,u_2)+\sum_\nu f_\nu\frac{\partial\,\mathrm{Th}}{\partial A_\nu},$$

wo über ν hier, wie überall im Folgenden, von 0 bis 6 zu summiren ist.

In dieser Gleichung bilden die Glieder, die in $g(u_1, u_2)$ zusammengefasst sind, unmittelbar eine Covariante, wie man erkennt, wenn man für die $g_1', g_2', \ldots$ die Ausdrücke (11) einsetzt, und zwar ist, wenn man, wie üblich, mit $i(u_1, u_2)$ die Covariante*)

$$(26)\quad i(u_1,u_2)=2\{(A_0A_4-4A_1A_3+3A_2^2)\,u_1^4 + 2(A_0A_5-3A_1A_4+2A_2A_3)\,u_1^3u_2+\cdots\}$$

bezeichnet:

$$(27)\qquad g(u_1,u_2)=-6\,i(u_1,u_2).$$

Ferner lassen sich die in der Gleichung mit f_ν bezeichneten Coefficienten als rationale Functionen der A_ν und der Argumente u_1, u_2 darstellen, die in Bezug auf letztere von der zweiten Dimension sind. Ihrer Bildungsweise nach können dieselben im Nenner nur eine Potenz von A_0, aber sonst keines der übrigen A_ν enthalten. Da aber die Glieder der Gleichung (15a), aus welchen bei der Umwandlung $\sum_\nu f_\nu\frac{\partial\,\mathrm{Th}}{\partial A_\nu}$ hervorgeht, wie wir gesehen haben, ungeändert bleiben, wenn man A_ν mit $A_{6-\nu}$ vertauscht, so muss dies auch hier mit $\sum_\nu f_\nu\frac{\partial\,\mathrm{Th}}{\partial A_\nu}$ der Fall sein; folglich kann A_0 nicht im Nenner von f_ν vorkommen, weil sonst nach der Vertauschung sich A_6 dort fände, was nicht möglich ist. Demnach sind die f_ν ganze Functionen der A_ν. — Um den Grad derselben in den A_ν zu bestimmen, gehe ich ebenfalls auf die Glieder der Gleichung (15, a) zurück, welche bei

---

*) Die Bezeichnung der Covarianten, insbesondere was die Zahlenfactoren anbelangt, entnehme ich der „Theorie der binären algebraischen Formen von Clebsch".

der Umwandlung in $\sum_\nu f_\nu \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_\nu}$ übergehen, und setze in denselben hA_ν für A_ν; dann tritt, da die $a_\varkappa$ als nur von den Quotienten der A_ν abhängig dabei ungeändert bleiben, zu allen diesen Gliedern der Factor h. Folglich muss, da die Gleichungen, mittelst deren die Umwandlung gemacht wurde, sich bei dieser Substitution nicht ändern, dies auch bei $\sum_\nu f_\nu \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_\nu}$ der Fall sein, und aus dieser Thatsache schliesst man, dass die f_ν homogen und zweiter Dimension in den A_ν sind.

Eine weitere sehr fundamentale Eigenschaft der Functionen f_ν ergiebt sich aus dem Umstand, dass in der Gleichung (25) die linke Seite und $g(u_1, u_2)$ die Invarianteneigenschaft haben, und dass demnach auch $\sum_\nu f_\nu \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_\nu}$ diese Eigenschaft besitzen muss. Nun setzen sich bekanntlich, wenn P irgend eine Covariante bedeutet, bei der linearen Transformation die Ausdrücke

$$\frac{\partial P}{\partial A_0}, \frac{\partial P}{\partial A_1}, \ldots \frac{\partial P}{\partial A_6}$$

aus den transformirten Ausdrücken

$$\frac{\partial P'}{\partial A_0'}, \frac{\partial P'}{\partial A_1'}, \ldots \frac{\partial P'}{\partial A_6'}$$

in derselben Weise zusammen, wie die ursprünglichen Variablen

$$y_1^6, 6y_1^5y_2, \ldots y_2^6$$

aus den transformirten Variablen

$$y_1'^6, 6y_1'^5y_2', \ldots y_2'^6.$$

Folglich muss $\sum_\nu \binom{6}{\nu} f_\nu y_1^{6-\nu} y_2^\nu$, $\left(\text{wo } \binom{6}{\nu} = \frac{6.5\ldots(7-\nu)}{1.2\ldots\nu}\right)$: schon unmittelbar eine Covariante $\Phi(y_1, y_2)$ sein, oder sich von derselben nur um eine Function $\Psi(y_1, y_2)$ unterscheiden, welche Null wird, wenn man $y_1^6, 6y_1^5y_2, \ldots$ durch $\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_0}, \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_1}, \ldots$ ersetzt. Man kann also in jedem Fall

$$(28) \qquad \sum_\nu \binom{6}{\nu} f_\nu y_1^{6-\nu} y_2^\nu = \Phi(y_1, y_2) + \Psi(y_1, y_2)$$

annehmen.

Die allgemeinste Form einer solchen Covariante $\Phi(y_1, y_2)$ lässt sich nun leicht angeben. Denn bekanntlich kann man „jede Covariante binärer Formen, die mehrere Reihen von Veränderlichen enthält, zusammensetzen aus identischen Covarianten, und aus Polaren solcher,

welche nur eine Reihe von Veränderlichen enthalten"*). Bezeichnet man also den Process der Polarenbildung in folgender Weise:

$$(29)\qquad \begin{aligned} &\frac{1}{p}\left(u_1\frac{\partial F}{\partial y_1}+u_2\frac{\partial F}{\partial y_2}\right)=DF,\\ &\frac{1}{p(p-1)}\left(u_1^2\frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2}+2u_1u_2\frac{\partial^2 F}{\partial y_1\partial y_2}+u_2^2\frac{\partial^2 F}{\partial y_2^2}\right)=D^2F,\end{aligned}$$

wo p die Ordnung der Covariante $F(y_1, y_2)$ bedeutet, so kann man die Covariante $\Phi(y_1, y_2)$, da sie zweiten Grades und sechster Ordnung bezüglich der Variablen y_1, y_2 und zweiter Ordnung bezüglich der Variablen u_1, u_2 ist, gleich

$$\begin{aligned}\Phi(y_1, y_2) = c_0 D^2\Phi(y_1, y_2)_8 &+ c_1(u_1y_2-u_2y_1)\,D\Phi(y_1,y_2)_6\\ &+ c_2(u_1y_2-u_2y_1)^2\,\Phi(y_1, y_2)_4\end{aligned}$$

setzen, wo c_0, c_1, c_2 numerische Constanten sind, und $\Phi(y_1, y_2)_i$ die allgemeinste Covariante zweiten Grades und i-ter Ordnung bedeutet, die zu der Function $R(x)$ gehört. Aus der bekannten Tabelle des vollständigen Formensystems einer binären Form sechster Ordnung ersieht man, dass eine Covariante, $\Phi(y_1, y_2)_6$, zweiten Grades und sechster Ordnung nicht existirt, und dass die schon oben erwähnte Covariante $i(y_1, y_2)$ (vergl. (26)), und die Hesse'sche Form

$$(30)\qquad H(y_1, y_2) = 2\{A_0A_2 - A_1^2)\,y_1^8 + 4(A_0A_3 - A_1A_2)\,y_1^7y_2 + \cdots\}$$

die einzigen Formen zweiten Grades und zweiter, bez. achter Ordnung sind. Folglich hat man zu setzen:

$$\Phi(y_1, y_2) = c_0D^2H(y_1, y_2) + c_2(u_1y_2 - u_2y_1)^2\, i(y_1, y_2).$$

Was nun den andern Theil, $\Psi(y_1, y_2)$, von $\sum\limits_{\nu}\binom{6}{\nu} f_\nu\, y_1^{6-\nu}\, y_2^{\nu}$ anbelangt, der verschwindet, wenn man y_1^6, $6y_1^5y_2$, ... durch $\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_0}$, $\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_1}$, ... ersetzt, so lässt sich derselbe in folgender Weise darstellen**):

---

*) Clebsch, Theorie der binären algebraischen Formen § 10.

**) Dass eine derartige Darstellung des Ausdrucks $\Psi(y_1, y_2)$ thatsächlich möglich ist, kann man beweisen, wie folgt: Ich transformire $\Psi(y_1, y_2)$ durch die Substitution

$$(\mathrm{a})\qquad y_1 = p\eta_1 + q\eta_2,\quad y_2 = p'\eta_1 + q'\eta_2$$

und erhalte

$$\Psi(y_1, y_2) = h_1\chi_1(\eta_1, \eta_2) + h_2\chi_2(\eta_1, \eta_2) + \cdots$$

wo die h_i rationale Functionen der p, q, p', q' sind, während diese Grössen in den $\chi_i(\eta_1, \eta_2)$ nicht vorkommen. Hierbei wird im Allgemeinen eintreten, dass die $\chi_i(\eta_1, \eta_2)$ sich durch Anzahl derselben

$$\chi(\eta_1, \eta_2)_0 = \Psi(\eta_1, \eta_2),\quad \chi(\eta_1, \eta_2)_1,\quad \chi(\eta_1, \eta_2)_2,\ \ldots$$

(zwischen denen keine linearen Gleichungen bestehen, deren Coefficienten von

$$\Psi(y_1, y_2) = \sum_\lambda M_\lambda(u_1, u_2)\, \Psi_\lambda(y_1, y_2;\, u_1, u_2),$$

wo die $M_\lambda(u_1, u_2)$ nicht die Invarianteneigenschaft haben, während die $\Psi_\lambda(y_1, y_2; u_1, u_2)$ Covarianten nullten, ersten oder zweiten Grades bedeuten, die bezüglich der y_1, y_2 von der sechsten, bezüglich der u_1, u_2 höchstens von der zweiten Ordnung sind, und welche mit $\Psi(y_1, y_2)$ die Eigenschaft gemein haben, zu verschwinden, wenn man y_1^6, $6y_1^5 y_2$, ... durch $\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_0}$, $\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_1}$, ... ersetzt. Nun existiren Covarianten nullten Grades, d. h. identische Covarianten, die sechster Ordnung in den y_1, y_2 und höchstens zweiter in den u_1, u_2 sind, überhaupt nicht, und die betreffenden Covarianten ersten und zweiten Grades sind

$$y_1^6 R(y_1 : y_2) \quad \text{und} \quad (u_1 y_2 - u_2 y_1)\, D[y_2^6 R(y_1 : y_2)],$$

bez.

$$(u_1 y_2 - u_2 y_1)^2\, i(y_1, y_2) \quad \text{und} \quad D^2 H(y_1, y_2).$$

---

den A_ν, den u_1, u_2 abhängig sind), der Art ausdrücken lassen, dass die auftretenden Coefficienten $k_n^{(i)}$ Functionen von A_ν; u_1, u_2; p, q, p', q' sind:

$$\Psi(y_1, y_2) = \chi(y_1, y_2)_0 = k_0^0 \chi(\eta_1, \eta_2)_0 + k_1^0 \chi(\eta_1, \eta_2)_1 + \cdots$$

Da die linke Seite verschwindet, wenn man $\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_0}$, $\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_1}$, ... für y_1^6, $6y_1^5 y_2$, ... setzt, so muss dies auch mit der rechten Seite der Fall sein, und daraus folgt, dass die $\chi(y_1, y_2)_i$, weil sie linear unabhängig sind, dabei einzeln verschwinden müssen.

Indem man dann die Substitution (a) auch in $\chi(\eta_1, \eta_2)_i$ macht, findet man

$$\chi(y_1, y_2)_i = k_0^{(i)}\, \chi(\eta_1, \eta_2)_0 + k_1^{(i)}\, \chi(\eta_1, \eta_2)_1 + \cdots,$$

wobei möglicher Weise neue $\chi(\eta_1, \eta_2)_i$ hinzutreten. Und wenn man so fortfährt, so kommt, da die Anzahl der $\chi(\eta_1, \eta_2)_i$ eine endliche, gleich ν, ist, zu einem System von ν solchen Gleichungen. Alsdann kann man in bekannter Weise, da die $\chi(y_1, y_2)_i$ linear unabhängig sind, ν Systeme von Multiplicatoren $m_0^{(i)}$, $m_1^{(i)}, \ldots m_{\nu-1}^{(i)}$ finden, der Art, dass wenn man die Gleichungen der Reihe nach mit denselben multiplicirt und addirt, man

$$\text{(b)} \qquad g(y_1, y_2)_i = \mu_i\, g(\eta_1, \eta_2)_i$$

erhält, wo μ_i eine Function von den A_ν; u_1, u_2; p, q, p', q' ist, und

$$\text{(c)} \qquad g(y_1, y_2)_i = m_0^{(i)}\, \chi(y_1, y_2)_0 + m_1^{(i)}\, \chi(y_1, y_2)_1 + \cdots,$$

und die $\chi(y_1, y_2)_i$ sich wieder umgekehrt durch die $g(y_1, y_2)_i$ ausdrücken lassen. Die Gleichung (b) zeigt nun an, dass die $g(y_1, y_2)_i$ entweder unmittelbar Covarianten sind, oder sich von solchen nur um Factoren unterscheiden, die nicht y_1 und y_2 enthalten. Da nun die $g(y_1, y_2)_i$, wie aus (c) folgt, die Eigenschaft haben zu verschwinden, wenn man $\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_0}$, $\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_1}$, ... für y_1^6, $6y_1^5 y_2$ setzt, und ausserdem $\Psi(y_1, y_2)$ sich linear aus denselben zusammensetzen lässt, so ist hiermit obige Behauptung bewiesen.

Die Covarianten zweiten Grades sind schon in $\Phi(y_1, y_2)$ enthalten, kommen also hier bei $\Psi(y_1, y_2)$ nicht mehr in Betracht. Von den Covarianten ersten Grades liefert die erstere keine derartige Function, denn $\sum_\nu A_\nu \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_\nu}$ ist selbstverständlich nicht Null. Wohl aber ist dies mit der zweiten der Fall, denn ersetzt man in derselben $y_1^6, 6y_1^5 y_2, \ldots$ durch $\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_0}, \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_1}, \cdots$, so erhält man genau denselben Ausdruck, den man auch bekommt, wenn man aus den Gleichungen (A), (A′) und (24) die Ableitungen von Th nach u_1 und u_2 eliminirt. Folglich hat $\Psi(y_1, y_2)$ die Form

$$\Psi(y_1, y_2) = M(u_1 y_2 - u_2 y_1)\, D[y_2^6 R(y_1 : y_2)],$$

wo M, da $\Psi(y_1, y_2)$ zweiter Dimension in den A_ν ist, linear und homogen in diesen A_ν sein muss.

Somit hätten wir die allgemeinste Form von $\sum_\nu \binom{6}{\nu} f_\nu y_1^{6-\nu} y_2^\nu$ gefunden:

$$(31) \quad \sum \binom{6}{\nu} f_\nu y_1^{6-\nu} y_2^\nu = c_0 D^2 H(y_1, y_2) + c_2 (u_1 y_2 - u_2 y_1)^2\, i(y_1, y_2) \\ + M(u_1 y_2 - u_2 y_1)\, D[y_2^6 R(y_1 : y_2)],$$

und es bleibt nur noch übrig, die Grössen c_0, c_2 und M zu bestimmen. Dies geschieht am leichtesten dadurch, dass man ein f_ν, wenigstens zum Theil, thatsächlich in der oben angegebenen Weise mittelst der Gleichungen (22), (23), (24), (A) und (A′) berechnet. So findet man z. B. für den Coefficienten von u_1^2 in f_2 den Ausdruck

$$8(2A_0 A_4 + A_1 A_3 - 3A_2^2),$$

und da die Coefficienten von $15 u_1^2 y_1^4 y_2^2$ in $D^2 H(y_1, y_2)$, $(u_2 y_1 - u_1 y_2)^2 \cdot i(y_1, y_2)$ und $M(u_1 y_2 - u_2 y_1)\, D[y_2^6 R(y_1 : y_2)]$ resp. die folgenden sind:

$$\frac{1}{7}(3A_0 A_4 + 2A_1 A_3 - 5A_2^2),$$
$$\frac{2}{15}(A_0 A_4 - 4A_1 A_3 + 3A_2^2),$$
$$\frac{1}{3} M A_1,$$

so muss, wie sich aus der Gleichung (31) ergiebt,

$$(32) \qquad c_0 = 36, \quad c_2 = \frac{30}{7}, \quad M = 0\,^{*)}$$

sein. —

*) Bei der Umformung der Gleichung (15, a) mittelst der Gleichungen (A), (B), u. s. w. ist eine gewisse Willkür möglich, und in Folge davon kann es sich ereignen, wenn man die Umformung nicht genau auf die oben angegebene Weise ausführt, dass M von Null verschieden ist. Dies hat übrigens auf das Endresultat keinen Einfluss.

Nunmehr ist es möglich, die Umformung der letzten der in Betracht kommenden Gleichungen anzugeben. *Es nimmt die Gleichung* (15), wie man aus (25), (27), (31) und (32) erkennt, *die Gestalt an:*

$$(\Gamma)\qquad u_1^2\frac{\partial^2 \mathrm{Th}}{\partial u_1^2}+2u_1u_2\frac{\partial^2 \mathrm{Th}}{\partial u_1\partial u_2}+u_2^2\frac{\partial^2 \mathrm{Th}}{\partial u_2^2}$$
$$=-6i(y_1,y_2)\,\mathrm{Th}+\sum_\nu f_\nu\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_\nu},$$

wo

$$\sum_\nu\binom{6}{\nu}f_\nu y_1^{6-\nu}y_2^\nu=36D^2H(y_1,y_2)+\frac{30}{7}(u_1y_2-u_2y_1)\,i(y_1,y_2).$$

Und damit ist die erste Umwandlung der vorliegenden partiellen Differentialgleichungen beendet.

§ 5.

Specielle Form der Differentialgleichungen für die ungeraden Thetafunctionen. Die Glieder 5. und 7. Dimension der Reihe.

Bei der zweiten Umformung der Differentialgleichungen, die ich hauptsächlich mit Rücksicht auf die ungeraden Thetafunctionen ausführe, zerlege ich, wie schon oben § 2 geschehen ist, $x_2^6\,R(x_1:x_2)$ in einen linearen Factor $c_2x_1-c_1x_2$ und einen Factor fünften Grades

$$\chi(x_1,x_2)=\gamma_0x_1^5+5\gamma_1x_1^4x_2+10\gamma_2x_1^3x_2^2+10\gamma_3x_1^2x_2^3$$
$$+5\gamma_4x_1x_2^4+\gamma_5x_2^5,$$

so dass

$$R(x)=(c_2x-c_1)\,\chi(x,1)$$

und

$$(33)\qquad A_0=c_2\gamma_0,\quad 6A_1=5c_2\gamma_1-c_1\gamma_0,\quad 15A_2=10c_2\gamma_2-5c_1\gamma_1,\cdots,$$

und verwandele demgemäss die Differentiationen nach den A_ν in solche nach den γ_μ und den c_1, c_2, indem ich zugleich an Stelle der Covarianten von $R(x)$ einführe die simultanen Covarianten von $\chi(x_1,x_2)$ und $c_2x_1-c_1x_2$, oder was dasselbe ist, die gewöhnlichen Covarianten von $\chi(x_1,x_2)$, in welche die c_1, c_2 als eine neue Reihe von Veränderlichen eintreten.

An Stelle der Gleichungen (A), (B), (A′) und (B′) erhalte ich dadurch

$$(\mathrm{A,a})\qquad u_2\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial u_1}=\gamma_0\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial\gamma_1}+2\gamma_1\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial\gamma_2}+3\gamma_2\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial\gamma_3}+4\gamma_3\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial\gamma_4}$$
$$+5\gamma_4\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial\gamma_5}-c_2\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial c_1},$$

$$(\mathrm{B,a})\qquad \frac{3}{2}\mathrm{Th}+u_1\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial u_1}+2u_2\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial u_2}=\gamma_1\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial\gamma_1}+2\gamma_2\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial\gamma_2}+3\gamma_3\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial\gamma_3}$$
$$+4\gamma_4\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial\gamma_4}+5\gamma_5\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial\gamma_5}+c_1\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial c_1},$$

und jene zwei weiteren Gleichungen, welche aus diesen durch Vertauschung von u_1 und $-u_2$, c_1 und $-c_2$, γ_i und γ_{5-i} ($i=0, 1, 2$) entstehen. Man überzeugt sich von der Richtigkeit dieser Gleichungen, indem man dieselben mittelst (33), und den daraus abgeleiteten Beziehungen

$$(34)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial \gamma_0} &= \quad c_2 \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_0} - \frac{1}{6} c_1 \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_1}, \\ \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial \gamma_1} &= \frac{5}{6} c_2 \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_1} - \frac{1}{3} c_1 \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_2}, \\ \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial \gamma_2} &= \frac{2}{3} c_2 \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_2} - \frac{1}{2} c_1 \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_3}, \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{aligned}$$

$$(35)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial c_1} &= -\Big(\frac{1}{6}\gamma_0 \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_1} + \frac{1}{3}\gamma_1 \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_2} + \frac{1}{2}\gamma_2 \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_3} + \frac{2}{3}\gamma_3 \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_4} \\ &\qquad\qquad + \frac{5}{6}\gamma_4 \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_5} + \gamma_5 \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_6}\Big), \\ \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial c_2} &= \quad \gamma_0 \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_0} + \frac{5}{6}\gamma_1 \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_1} + \cdots \end{aligned}$$

in ihre ursprünglichen Formen überführt.

Sodann nimmt die Gleichung (Γ) die Gestalt an:

$$(36)\qquad \begin{aligned} & u_1^2 \frac{\partial^2 \mathrm{Th}}{\partial u_1^2} + 2u_1u_2 \frac{\partial^2 \mathrm{Th}}{\partial u_1 \partial u_2} + u_2^2 \frac{\partial^2 \mathrm{Th}}{\partial u_2^2} \\ &= g'(u_1, u_2)\,\mathrm{Th} + \sum_\mu f'_\mu \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial \gamma_\mu} - h_2 \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial c_1} + h_1 \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial c_2}, \end{aligned}$$

(wo die Summation über μ hier, wie im Folgenden, von 0 bis 5 auszuführen ist), wie man erkennt, wenn man diese Umformung, ähnlich wie in dem vorhergehenden Paragraphen, dadurch vollzieht, dass man wieder auf die frühere Gleichung (15,a) zurückgeht und die Formeln (A,a) und (B,a) selbst und die daraus abgeleiteten Formeln benutzt. Darin muss $g'(u_1, u_2)$, da es mit $g(u_1, u_2) = -6i(u_1, u_2)$ (vergl. (27)) identisch ist und also auf Grund der Beziehungen (33) in $-6i(u_1, u_2)$ übergeht, eine Covariante von $\chi(x_1, x_2)$ zweiten Grades und zweiter Ordnung in den c_1, c_2 und den u_1, u_2 sein, und zwar ist, wie man leicht aus dem eben angeführten Umstande findet:

$$(37)\qquad g'(u_1, u_2) = 2\mathfrak{D}^2 H'(u_1, u_2) - \frac{12}{5}(c_2u_1 - c_1u_2)^2\, i'(u_1, u_2),$$

wo

$$\begin{aligned} i'(u_1, u_2) &= 2\{(\gamma_0\gamma_4 - 4\gamma_1\gamma_3 + 3\gamma_2^2)\, u_1^2 + \cdots\}, \\ H'(u_1, u_2) &= 2\{(\gamma_0\gamma_2 - \gamma_1^2)\, u_1^6 + 3(\gamma_0\gamma_3 - \gamma_1\gamma_2)\, u_1^5 u_2 + \cdots\} \end{aligned}$$

die beiden Covarianten zweiten Grades von $\chi(x_1, x_2)$ bedeuten, und $\mathfrak{D}$

die Polarenbildung unter Einführung der Veränderlichen c_1, c_2 bezeichnet. (Vergl. (29)).

Der andere Theil der rechten Seite der Gleichung (36)

$$(37)\qquad \sum_\mu f'_\mu \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial \gamma_\mu} - h_2 \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial c_1} + h_1 \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial c_2}$$

muss mit Hülfe der Gleichungen (33), (34) und (35) in den Ausdruck $\sum_\nu f_\nu \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_\nu}$ übergeführt werden können; daraus folgt, wenn man $\binom{5}{\mu} z_1^{5-\mu} z_2^\mu$ für $\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial \gamma_\mu}$, t_1 und t_2 für $\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial c_2}$ und $-\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial c_1}$ setzt, dass

$$\sum_\mu \binom{5}{\mu} f'_\mu z_1^{5-\mu} z_2^\mu + h_1 t_1 + h_2 t_2$$

auf Grund der Gleichungen (33) und der aus (34) und (35) hervorgehenden Beziehungen

$$(38)\qquad \begin{aligned} z_1^{5-\mu} z_2^\mu &= (c_2 y_1 - c_1 y_2)\, y_1^{5-\mu} y_2^\mu, \\ t_i &= y_i \chi(y_1, y_2) \end{aligned}$$

in $\sum_\nu \binom{6}{\nu} f_\nu y_1^{6-\nu} y_2^\nu$ übergehen muss, oder sich davon nur um einen Ausdruck ψ unterscheiden kann, der verschwindet, sobald man die Variablen $z_1^{5-\mu} z_2^\mu$ und t_1, t_2 durch die betreffenden Ableitungen von Th ersetzt. Aber diese letztere Möglichkeit braucht nicht weiter in Betracht gezogen zu werden, denn da der aus diesem Ausdruck ψ hervorgehende Theil von (37) Null ist, also auf das Resultat keinen Einfluss hat, so kann er einfach weggelassen werden, und wir können daher

$$(39)\qquad \sum_\mu \binom{5}{\mu} f'_\mu z_1^{5-\mu} z_2^\mu + h_1 t_1 + h_2 t_2 = \sum_\nu \binom{6}{\nu} f_\nu y_1^{6-\nu} y_2^\nu$$

setzen. Aus dieser Gleichung geht hervor, dass $\sum_\mu \binom{5}{\mu} z_1^{5-\mu} z_2^\mu$ und $h_1 t_1 + h_2 t_2$ Covarianten sind, und zwar erstere vom zweiten Grade und zweiter Ordnung bezüglich u_1, u_2 und erster Ordnung bezüglich c_1, c_2, während $h_1 t_1 + h_2 t_2$ ersten Grades und zweiter Ordnung sowohl bezüglich u_1, u_2 als auch bezüglich c_1, c_2 ist. Die allgemeinste Form dieser Covarianten ist daher, wenn man die Polarenbildung unter Einführung der Veränderlichen u_1, u_2, bez. c_1, c_2, wie schon oben geschehen, mit D, bez. $\mathfrak{D}$ bezeichnet, die folgende:

$$\sum\binom{5}{\mu} f'_\mu z_1^{5-\mu} z_2^\mu = e_1(c_2 z_1 - c_1 z_2)(z_2 u_1 - z_1 u_2)^2\, i'(z_1, z_2)$$
$$+ e_2(c_2 u_1 - c_1 u_2)\, DH'(z_1, z_2)$$
$$+ e_3(c_2 z_1 - c_1 z_2)\, D^2 H'(z_1, z_2)$$
$$+ e_4(z_2 u_1 - z_1 u_2)\, \mathfrak{D} DH'(z_1, z_2),$$

und

$$t_1 h_1 + t_2 h_2 = \frac{e_5}{3}\left(\frac{\partial h}{\partial c_1} t_1 + \frac{\partial h}{\partial c_2} t_2\right),$$

wenn $h = D^2\chi(c_1, c_2)$ ist. Von diesen constanten Coefficienten $e_1, e_2, \ldots$ bleibt einer unbestimmt, weil zwischen den Polaren von $H'(z_1, z_2)$ die Identität

$$(c_2 z_1 - c_1 z_2)\, D^2 H'(z_1, z_2) + (z_2 u_1 - z_1 u_2)\, \mathfrak{D} DH'(z_1, z_2)$$
$$= (c_2 u_1 - c_1 u_2)\, DH'(z_1, z_2)$$

besteht. Man kann daher z. B.

$$e_4 = 0$$

setzen, und findet sodann, indem man jetzt mit Benutzung dieser Ausdrücke in (39) die Substitutionen (33) und (38) macht, für die übrigen Coefficienten die Werthe

$$e_1 = 2, \quad e_2 = 10, \quad e_3 = 15, \quad e_5 = -2. -$$

Dementsprechend *hat man als Umformung der Gleichung* (Γ) *erhalten:*

$$(\Gamma, \mathrm{a}) \qquad u_1^2 \frac{\partial^2 \mathrm{Th}}{\partial u_1^2} + 2 u_1 u_2 \frac{\partial^2 \mathrm{Th}}{\partial u_1 \partial u_2} + u_2^2 \frac{\partial^2 \mathrm{Th}}{\partial u_2^2}$$
$$= g'(u_1, u_2)\,\mathrm{Th} + \sum_\mu f'_\mu \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial \gamma_\mu} + \frac{2}{3}\left(\frac{\partial h}{\partial c_2}\cdot\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial c_1} - \frac{\partial h}{\partial c_1}\cdot\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial c_2}\right),$$

wo

$$g'(u_1, u_2) = 2\mathfrak{D}^2 H'(u_1, u_2) - \frac{12}{5}(c_2 u_1 - c_1 u_2)^2\, i'(u_1, u_2),$$
$$\sum_\mu \binom{5}{\mu} f'_\mu z_1^{5-\mu} z_2^\mu = 2(c_2 z_1 - c_1 z_2)(z_2 u_1 - z_1 u_2)^2\, i'(z_1, z_2)$$
$$+ 10(c_2 u_1 - c_1 u_2)\, DH'(z_1, z_2)$$
$$+ 15(c_2 z_1 - c_1 z_2)\, D^2 H'(z_1, z_2),$$
$$h = D^2\chi(c_1, c_2).$$

Man kann diese Gleichung noch dadurch auf eine andere Form bringen, dass man die Ableitungen der Thetafunction nach c_1 und c_2 durch Ausdrücke ersetzt, bei denen nach u_1 und u_2 differentiirt wird, denn es besteht, wie man leicht mit Hülfe der Gleichungen (A, a) und (B, a) nachweisen kann, die identische Gleichung

$$\frac{1}{3}\left(\frac{\partial h}{\partial c_2}\cdot\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial c_1}-\frac{\partial h}{\partial c_1}\cdot\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial c_2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial k}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial u_2}-\frac{\partial k}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial u_1}\right)+\sum_\mu m_\mu\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial \gamma_\mu},$$

wo

$$\begin{aligned}\sum_\mu \binom{5}{\mu} m_\mu z_1^{5-\mu} z_2^{\mu} &= (c_2 z_1 - c_1 z_2)(z_2 u_1 - z_1 u_2)^2\, i'(z_1, z_2)\\ &\quad - 5(c_2 u_1 - c_1 u_2)\, DH'(z_1, z_2)\\ &\quad + \tfrac{15}{2}(c_2 z_1 - c_1 z_2)\, D^2 H'(z_1, z_2),\end{aligned}$$

$$k = \mathfrak{D}\chi(u_1, u_2)$$

ist. —

Diese Gleichung (Γ, a) liefert nun die schon oben, § 3, in Betracht gezogene Recursionsformel, durch welche die Glieder $(2\lambda+1)^{\text{ter}}$ Dimension in den Argumenten u_1, u_2 bei der Reihenentwicklung der ungeraden Thetafunction auf Glieder niederer Dimensionen zurückgeführt werden. Substituirt man nämlich die nach den Dimensionen der Argumente geordnete Reihenentwicklung der Thetafunction (19)

$$\mathrm{Th} = s(N_1 + N_3 + N_5 + \cdots)$$

in (Γ, a), und setzt die Glieder gleich hoher Dimension auf beiden Seiten einander gleich, so ergiebt sich

$$6sN_3 = \sum_\mu f'_\mu \frac{\partial (sN_1)}{\partial \gamma_\mu} + \frac{2}{3}\left(\frac{\partial h}{\partial c_2}\cdot\frac{\partial (sN_1)}{\partial c_1}-\frac{\partial h}{\partial c_1}\cdot\frac{\partial (sN_1)}{\partial c_2}\right),$$

$$2\lambda(2\lambda+1)\, sN_{2\lambda+1} = g'(u_1, u_2)\, sN_{2\lambda-3} + \sum_\mu f'_\mu \frac{\partial (sN_{2\lambda-1})}{\partial \gamma_\mu}$$

$$+\frac{2}{3}\left(\frac{\partial h}{\partial c_2}\cdot\frac{\partial (sN_{2\lambda-1})}{\partial c_1}-\frac{\partial h}{\partial c_1}\cdot\frac{\partial (sN_{2\lambda-1})}{\partial c_2}\right)$$

für $\lambda > 1$. Da nun

$$N_1 = (c_2 u_1 - c_1 u_2), \quad N_3 = -\frac{1}{3}\mathfrak{D}^2\chi(u_1, u_2),$$

so folgt aus der ersten dieser Gleichungen

$$\sum_\mu f'_\mu \frac{\partial s}{\partial \gamma_\mu} = 0,$$

und in Folge davon geht die zweite über in

$$2\lambda(2\lambda+1)\, N_{2\lambda+1} = g'(u_1, u_2)\, N_{2\lambda-3} + \sum_\mu f'_\mu \frac{\partial N_{2\lambda-1}}{\partial \gamma_\mu}$$

$$+\frac{2}{3}\left(\frac{\partial h}{\partial c_2}\cdot\frac{\partial N_{2\lambda-1}}{\partial c_1}-\frac{\partial h}{\partial c_1}\cdot\frac{\partial N_{2\lambda-1}}{\partial c_2}\right),$$

wo $\lambda > 1$. *Dies ist die definitive Form der Recursionsformel.*

Mittelst derselben habe ich noch die Glieder fünfter und siebenter Dimension, N_5 und N_7, bestimmt. Indem ich noch die Covarianten 3. Grades und 9., bez. 5. und 3. Ordnung einführe:

$$T'(u_1, u_2) = (\gamma_0^2\gamma_3 - 3\gamma_0\gamma_1\gamma_2 + 2\gamma_1^3)\, u_1^9 + \cdots,$$
$$M'(u_1, u_2) = (-\gamma_0^2\gamma_5 + 5\gamma_0\gamma_1\gamma_4 - 2\gamma_0\gamma_2\gamma_3 - 8\gamma_1^2\gamma_3 + 6\gamma_0\gamma_2^2)\, u_1^5 + \cdots,$$
$$j'(u_1, u_2) = 6(\gamma_0\gamma_2\gamma_4 - \gamma_0\gamma_3^2 - \gamma_1^2\gamma_3 + 2\gamma_1\gamma_2\gamma_3 - \gamma_2^3)\, u_1^3 + \cdots,$$

finde ich die Ausdrücke

$$N_5 = -\frac{1}{4}(c_2 u_1 - c_1 u_2)\,\mathfrak{D}^2 H'(u_1, u_2) - \frac{7}{60}(c_2 u_1 - c_1 u_2)^3\, i'(u_1, u_2),$$

$$\begin{aligned} N_7 = \frac{1}{6\,.\,7}\Big\{ & -\frac{1}{6}\,\mathfrak{D}^2 H'(u_1, u_2)\,\mathfrak{D}^2 \chi(u_1, u_2) + 4(c_2 u_1 - c_1 u_2)\,\mathfrak{D}^3 T'(u_1, u_2) \\ & - \frac{19}{30}(c_2 u_1 - c_1 u_2)^2\, i(u_1, u_2)\,\mathfrak{D}^2 \chi(u_1, u_2) \\ & + \frac{2}{3}(c_2 u_1 - c_1 u_2)^3\,\mathfrak{D}\, M'(u_1, u_2) \\ & - \frac{1177}{315}(c_2 u_1 - c_1 u_2)^4\, j'(u_1, u_2)\Big\}. \end{aligned}$$

Dieselben können selbstverständlich noch in andere Formen gebracht werden.

§ 6.

Specielle Form der Differentialgleichungen für die geraden Thetafunctionen. Die Glieder 4. und 6. Dimension der Reihe.

Zu der dritten und letzten Umformung der partiellen Differentialgleichungen, die ich mit Rücksicht auf die geraden Thetafunctionen ausgeführt habe, gelangt man auf demselben Wege, der im vorhergehenden Paragraphen eingeschlagen wurde; ich werde mich daher nur auf die Angabe der Resultate beschränken. Es wird $x_2^6\, R(x_1 : x_2)$ wieder in zwei Factoren

$$\varphi(x_1, x_2) = \alpha_0 x_1^3 + 3\alpha_1 x_1^2 x_2 + 3\alpha_2 x_1 x_2^2 + \alpha_3 x_2^3,$$
$$\psi(x_1, x_2) = \beta_0 x_1^3 + 3\beta_1 x_1^2 x_2 + 3\beta_2 x_1 x_2^2 + \beta_3 x_2^3$$

gespalten, wie schon zweimal oben geschehen ist, der Art, dass

$$R(x) = \varphi(x, 1)\ \psi(x, 1),$$

und also

$$A_0 = \alpha_0\beta_0, \quad A_1 = \frac{1}{2}(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0), \quad A_2 = \frac{1}{5}(\alpha_0\beta_2 + 3\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_0), \cdots$$

und ferner

$$\frac{\partial\,\mathrm{Th}}{\partial\alpha_0} = \beta_0\frac{\partial\,\mathrm{Th}}{\partial A_0} + \frac{1}{2}\beta_1\frac{\partial\,\mathrm{Th}}{\partial A_1} + \frac{1}{5}\beta_2\frac{\partial\,\mathrm{Th}}{\partial A_2} + \frac{1}{20}\beta_3\frac{\partial\,\mathrm{Th}}{\partial A_3},$$
$$\frac{\partial\,\mathrm{Th}}{\partial\alpha_1} = \frac{1}{2}\beta_0\frac{\partial\,\mathrm{Th}}{\partial A_1} + \frac{3}{5}\beta_1\frac{\partial\,\mathrm{Th}}{\partial A_2} + \frac{9}{20}\beta_2\frac{\partial\,\mathrm{Th}}{\partial A_3} + \frac{1}{5}\beta_3\frac{\partial\,\mathrm{Th}}{\partial A_4},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Indem ich auf Grund dieser Beziehungen in den Gleichungen (A), (B) und (Γ) die Differentiation nach den α_i und β_i einführe, finde ich für dieselben die folgenden Formen:

$$(\mathrm{A}, \mathrm{b}) \qquad u_2 \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial u_1} = \alpha_0 \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial \alpha_1} + 2\alpha_1 \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial \alpha_2} + 3\alpha_2 \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial \alpha_3} + \beta_0 \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial \beta_1} + 2\beta_1 \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial \beta_2} + 3\beta_2 \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial \beta_3},$$

$$(\mathrm{B}, \mathrm{b}) \quad \frac{3}{2} \mathrm{Th} + u_1 \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial u_1} + 2u_2 \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial u_2} = \alpha_1 \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial \alpha_1} + 2\alpha_2 \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial \alpha_2} + 3\alpha_3 \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial \alpha_3} + \beta_1 \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial \beta_1} + 2\beta_2 \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial \beta_2} + 3\beta_3 \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial \beta_3},$$

$$(\Gamma, \mathrm{b}) \qquad u_1^2 \frac{\partial^2 \mathrm{Th}}{\partial u_1^2} + 2u_1 u_2 \frac{\partial^2 \mathrm{Th}}{\partial u_1 \partial u_2} + u_2^2 \frac{\partial^2 \mathrm{Th}}{\partial u_2^2}$$
$$= \frac{1}{5} \Theta(u_1, u_2) \mathrm{Th} + g''(u_1, u_2) \mathrm{Th}$$
$$- \frac{7}{5} \Theta(u_1, u_2) \sum_i \left[\alpha_i \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial \alpha_i} + \beta_i \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial \beta_i}\right] + \sum_i f_i'' \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial \alpha_i} + \sum_i f_i''' \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial \beta_i},$$

wobei in letzterer Gleichung bezüglich i von 0 bis 3 zu summiren ist und

$$g''(u_1, u_2) = -\frac{6}{25} \Theta^2(u_1, u_2) - 3\Delta(u_1, u_2) \nabla(u_1, u_2) + \frac{3}{5} [\pi(u_1, u_2) \varphi(u_1, u_2) + p(u_1, u_2) \psi(u_1, u_2)],$$

$$\sum_i \binom{3}{i} f_i'' z_1^{3-i} z_2^i = 9\Delta(u_1, u_2) \psi(z_1, z_2) + 12(u_1 z_2 - u_2 z_1) Dr(z_1, z_2) - 5(u_1 z_2 - u_2 z_1)^2 p(z_1, z_2),$$

$$\sum_i \binom{3}{i} f_i''' z_1^{3-i} z_2^i = 9\nabla(u_1, u_2) \varphi(z_1, z_2) + 12(u_1 z_2 - u_2 z_1) D\varrho(z_1, z_2) - 5(u_1 z_2 - u_2 z_1)^2 \pi(z_1, z_2)$$

ist, indem ich mit $\Theta, \Delta, \ldots$ die Covarianten bezeichnete:

$$\Theta(z_1, z_2) = (\alpha_0 \beta_2 - 2\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_0) z_1^2 + \cdots,$$
$$\Delta(z_1, z_2) = 2\{(\alpha_0 \alpha_2 - \alpha_1^2) z_1^2 + \cdots\},$$
$$\nabla(z_1, z_2) = 2\{(\beta_0 \beta_2 - \beta_1^2) z_1^2 + \cdots\},$$
$$p(z_1, z_2) = 2\{((\alpha_0 \alpha_2 - \alpha_1^2) \beta_2 - (\alpha_0 \alpha_3 - \alpha_1 \alpha_2) \beta_1 + (\alpha_1 \alpha_3 - \alpha_2^2) \beta_0) z_1 + \cdots\},$$

$$\pi(z_1, z_2) = 2\{((\beta_0\beta_2 - \beta_1^2)\alpha_2 - (\beta_0\beta_3 - \beta_1\beta_2)\alpha_1 + (\beta_1\beta_3 - \beta_2^2)\alpha_0) z_1 + \cdots\},$$

$$r(z_1, z_2) = (-2(\alpha_0\alpha_2 - \alpha_1^2)\beta_1 + (\alpha_0\alpha_3 - \alpha_1\alpha_2)\beta_0) z_1^3 + \cdots,$$

$$\varrho(z_1, z_2) = (-2(\beta_0\beta_2 - \beta_1^2)\alpha_1 + (\beta_0\beta_3 - \beta_1\beta_2)\alpha_0) z_1^3 + \cdots. —$$

Aus dieser Gleichung (Γ, b) erhält man jetzt auch die endgültige Form der schon oben aufgestellten Recursionsformel (18) für die gerade Thetafunction. Setzt man nämlich

$$\mathrm{Th} = t(1 + N_2 + N_4 + N_6 + \cdots)$$

in die Gleichung ein, so bekommt man durch die ganze analoge Betrachtung, wie sie oben an dem angeführten Orte angestellt wurde, zu dem bekannten Ausdruck

$$N_2 = \frac{9}{10}\,\Theta(u_1, u_2)$$

die Gleichung

$$2\lambda(2\lambda - 1) N_{2\lambda} = \frac{1}{5}(23 - 14\lambda)\,\Theta(u_1, u_2)\, N_{2\lambda-2} + g''(u_1, u_2)\, N_{2\lambda-4} + \sum_i f_i''\,\frac{\partial N_{2\lambda-2}}{\partial \alpha_i} + \sum_i f_i'''\,\frac{\partial N_{2\lambda-2}}{\partial \beta_i}$$

für $\lambda > 1$, *welches die gesuchte Recursionsformel ist.* —

Die Glieder vierter und sechster Dimension ergeben sich aus dieser Recursionsformel sehr leicht. Wenn man ausser den schon oben eingeführten Covarianten noch die Invarianten

$$T = 2\{2\alpha_0\alpha_2\beta_1\beta_3 - 2\alpha_0\alpha_2\beta_2^2 - \alpha_0\alpha_3\beta_0\beta_3 + \cdots\},$$

$$S = -\alpha_0^2\alpha_3\beta_3 + 3\alpha_0\alpha_1\alpha_2\beta_3 + 3\alpha_0\alpha_1\alpha_3\beta_2 - \cdots,$$

$$\Sigma = -\beta_0^2\beta_3\alpha_3 + 3\beta_0\beta_1\beta_2\alpha_3 + 3\beta_0\beta_1\beta_3\alpha_2 - \cdots$$

benutzt, findet man die folgenden Ausdrücke, in denen der Einfachheit halber die Argumente wegzulassen sind:

$$N_4 = -\frac{19}{200}\,\Theta^2 + \frac{1}{2}\,\Delta\nabla + \frac{1}{8}(\varphi\pi + \psi p),$$

$$N_6 = \frac{29}{6000}\,\Theta^3 + \frac{7}{60}\,\Theta\Delta\nabla + \frac{1}{80}(\varphi\pi + \psi p)\,\Theta - \frac{11}{120}(\pi\psi\Delta + p\varphi\nabla) + \frac{1}{30}(2\varphi\psi T - \psi^2 S - \varphi^2\Sigma).$$

Die Zahlencoefficienten werden einfacher, wenn man in der Function Th durch Multiplication mit einem Exponentialfactor die Glieder zweiter Dimension zum Verschwinden bringt. Setzt man

$$\mathrm{Th} = e^{N_2}\,\mathfrak{Th},$$

wo jetzt

$$\mathfrak{T}\mathfrak{h} = t(1 + M_4 + M_6 + \cdots),$$

so *nimmt die Recursionsformel die Gestalt* an:

$$2\lambda(2\lambda - 1)\, M_{2\lambda} = 10(1-\lambda)\, \Theta(u_1, u_2)\, M_{2\lambda-2} + \bar{g}''(u_1, u_2)\, M_{2\lambda-4}$$
$$+ \sum_i f_i'' \frac{\partial M_{2\lambda-2}}{\partial \alpha_i} + \sum_i f_i''' \frac{\partial M_{2\lambda-2}}{\partial \beta_i},$$

wo

$$\bar{g}''(u_1, u_2) = -6\left[\Theta^2(u_1, u_2) - \Delta(u_1, u_2)\, \nabla(u_1, u_2)\right]$$
$$+ \tfrac{3}{2}\left[\varphi(u_1, u_2)\, \pi(u_1, u_2) + \psi(u_1, u_2)\, p(u_1, u_2)\right],$$

und man findet aus derselben

$$M_4 = -\tfrac{1}{2}(\Theta^2 - \Delta\nabla) + \tfrac{1}{8}(\varphi\pi + \psi p),$$

$$M_6 = \tfrac{1}{3}(\Theta^2 - \Delta\nabla)\,\Theta - \tfrac{1}{10}(\varphi\pi + \psi p)\,\Theta - \tfrac{11}{120}(\pi\psi\Delta + p\varphi\nabla)$$
$$+ \tfrac{1}{30}(2\varphi\psi T - \psi^2 S - \varphi^2 \Sigma).$$

Halle a. S., im December 1886.

I.

Tafeln der eindeutig umkehrbaren Functionen zweier Variabeln auf den einfachsten Zahlengebieten.

Von

Ernst Schröder in Karlsruhe.

Unter den „einfachsten" Zahlengebieten verstehe ich hier Gebiete, welche nur discrete Zahlen als Elemente enthalten und begrenzt sind, also aus einer endlichen Menge von Zahlen bestehen; die Anzahl dieser Elemente soll ausserdem eine minimale, mithin zunächst 2, 3 oder 4 sein.

Die Elemente des begrenzten Gebietes bezeichne ich mit den Ziffern 1, 2, 3, 4, ... selbst, wobei es, wenn diese Benennung ungeeignet erscheinen sollte, ja jederzeit freistehen wird, diese Ziffern bloss als Suffixe eines Buchstabens a aufzufassen.

Ich gebe nun eine vollständige Uebersicht der *Gattungen* und *Arten* von Functionen zweier Argumente, welche als *zugleich mit ihren beiderlei Umkehrungen vollkommen eindeutige* in dem oben abgegrenzten Bereiche existiren können. In Bezug auf den Begriff der „Gattung" und „Art" einer Functionstafel kann auf eine meiner früheren Mittheilungen*) verwiesen werden. Zum Ueberfluss finden sich aber diese Begriffe weiter unten implicite nochmals erklärt. Ich werde auch von den daselbst sowie in**) eingeführten Abkürzungen und Bezeichnungsweisen — welche wesentlich darauf hinauslaufen, dass eine Function $f(a, b)$ nebst ihren beiden Umkehrungen symbolisch durch $a \,.\, b$ oder ab, $a:b$ und $\frac{b}{a}$ dargestellt werde — hier ohne weiteres Gebrauch machen.

Von der Methode, durch welche ich zu den Ergebnissen gelangte, muss ich eingestehen, dass sie noch unvollkommen ist. Sie ist insofern

*) Ueber eine eigenthümliche Bestimmung einer Function durch formale Anforderungen, Borchardt's Journal, Bd. 90, S. 189 ... 220. [S. 194, Z. 6 v. o. verbessere man daselbst $\frac{a}{b}$ in $\frac{b}{a}$].

**) Diese Annalen Bd. X, S. 305 sq.

von dem Ideal einer combinatorischen Methode noch entfernt als sie zwar *Auslassungen* zuverlässig vorbeugte, dagegen ein *wiederholtes* Auffinden der nämlichen Resultate nicht gänzlich vermieden werden konnte. Ich unterlasse es darum, mich über dieselbe hier weiter zu verbreiten, und darf dies um so eher, als ich im Schlussparagraphen den Beweis liefere, dass meine Aufzählung der Ergebnisse eine vollständige ist.

Dem gesagten entsprechend fehlt auch bislang noch ein streng lexikalisches Princip zur Anordnung der resultirenden Typen von Functionstafeln. In Ermangelung dessen — und endgültig dürfte dies sogar demselben, wenn wir ein solches hätten, wahrscheinlich vorzuziehen sein — habe ich die Tafeln in eine Art von „natürlichem System" gebracht.

Zum Verständniss der letzteren, sowie überhaupt des weiter folgenden, ist es nöthig, einiges vorauszuschicken.

§ 1.

Aus jeder als symbolisches Einmaleins geschriebenen Functionstafel lassen sich fünf eventuell andere „ableiten", welche mit ihr zusammen das System der sechs jeweils einander „*zugeordneten*" Tafeln bilden. Es kommt jene Ableitung auf eine Vertauschung unter den „Grundoperationen" hinaus.

Man ersetzt zu dem Ende jedes Product ab durchweg durch ba resp. $a:b$, $b:a$, $\frac{b}{a}$, $\frac{a}{b}$. In den vier letzten Fällen geht so das Einmaleins über in ein Einszueins, bezüglich Einsdurcheins, und dieses hat man wieder in ein damit gleichbedeutendes Einmaleins zu verwandeln, indem man jede Gleichung von der Form $a:b=g$ umschreibt in $a=bg$ und jede Gleichung von der Form $\frac{a}{b}=g$ umschreibt in $a=gb$. Bei der Ausführung wird man übrigens die Zwischenoperationen sparen und unmittelbar die zweiten resp. ersten Factoren *vor*, bezüglich die ersten resp. zweiten Factoren *hinter* den jeweiligen Productwerth schieben.

Ist die Gattung der Tafel „sechsgliedrig", so gehören die sechs zugeordneten Tafeln verschiedenen „Arten" an, d. h. sie lassen sich durch keine Vertauschung unter den Ziffern in einander überführen.

Bei der „dreigliedrigen" Gattung ordnen sich die sechs zugeordneten Tafeln nur drei verschiedenen Arten unter, bei der „zweigliedrigen" Gattung zerfallen sie in zwei verschiedene Arten und bei der „eingliedrigen" Gattung gehören alle sechs der nämlichen Art an.

Doch braucht in den letzteren Fällen nicht nothwendig Identität zwischen (einzelnen oder allen) zusammengehörigen Tafeln einzutreten; vielmehr kann immer noch eine Permutation der Ziffern erforderlich

sein, um eine Tafel in eine ihr zugeordnete ob zwar zur selben Art gehörige zu verwandeln. *Ich zähle die sechs einander zugeordneten Tafeln jeweils vollzählig auf, insoweit sie nicht als identische zusammenfallen.*

Wenn α die Nummer vertritt, unter welcher ich eine betrachtete Gattung von Tafeln rubricire, so bezeichne ich die sechs einander zugeordneten Tafeln, welche zur Charakterisirung dieser Gattung dienen sollen, falls sie verschieden sind, entsprechend der obigen Aufzählung der Elementarausdrücke:

$$\left.\begin{array}{c} a\cdot b,\ b\cdot a \\ a:b,\ b:a \\ \frac{b}{a},\ \frac{a}{b} \end{array}\right| \quad \text{mit} \quad \left|\begin{array}{l} \alpha_{23},\ \alpha_{32}, \\ \alpha_{31},\ \alpha_{13}, \\ \alpha_{12},\ \alpha_{21}. \end{array}\right.$$

Die Vollständigkeit in der Angabe der einander zugeordneten Tafeln bietet den Vortheil, dass alsdann zugleich mit einer Function auch deren inverse Functionen tabellarisch dargestellt erscheinen, und zwar erhält man zu der durch α_{23} dargestellten Function ab die Umkehrung $a:b$, indem man in der Tafel α_{12} die (mental zu ergänzenden) Multiplicationszeichen durch Doppelpunkte ersetzt, desgleichen die Umkehrung $a|b = \frac{b}{a}$, indem man in α_{31} die Malzeichen durch senkrechte Bruchstriche ersetzt oder also die ersten Factoren als Nenner unter die zweiten schreibt. Wie überhaupt zu jeder Tafel des Systems die Umkehrungen aus dem System selbst in ähnlicher Weise herauszulesen sind, würde sich durch die Figur eines vollständigen Sechsecks übersichtlich machen lassen.

Werden die im obigen Schema *neben*einander stehenden Tafeln identisch, so ersetze ich die alsdann gleiche Bedeutung annehmenden Chiffren $\alpha_{23} = \alpha_{32}$ kürzehalber durch α_1, ebenso die äquivalenten Zeichen $\alpha_{31} = \alpha_{13}$ durch α_2, die $\alpha_{12} = \alpha_{21}$ durch α_3.

Stellen dagegen die *unter*einander stehenden Tafeln sich als identische heraus, so ersetze ich die gleichbedeutenden Zeichen $\alpha_{23} = \alpha_{31} = \alpha_{12}$ durch α_{45}, desgleichen die $\alpha_{32} = \alpha_{13} = \alpha_{21}$ durch α_{54}.

Und wenn endlich alle sechs Tafeln in eine einzige zusammenfallen, gebrauche ich statt der sechs in Rede stehenden Chiffren die einfache α_0.

Letzteres *kann* natürlich nur bei einer eingliedrigen Gattung vorkommen, der vorhergehende Umstand kann ebenso nur bei einer höchstens zweigliedrigen und der vorerwähnte bei einer höchstens dreigliedrigen Gattung eintreten, ohne dass jedoch, wie gesagt, eine Nothwendigkeit dieses Eintretens bestünde.

Durch die vorstehende Verabredung wird bloss zum Ausdruck gebracht, wie viele *Formen* die sechs zugeordneten Tafeln erkennen lassen,

d. h. ob sie sämmtlich verschieden sind, oder ob und wie sie in eine geringere Anzahl individuell verschiedener Tafeln zusammenfliessen.

Ungleich wichtiger aber ist es, an der Chiffre einer Functionstafel auch zum Ausdruck zu bringen, in welcher Weise sie mit ihren zugeordneten Tafeln sich in verschiedne *Arten* einordnet, wie vielgliedrig also ihre *Gattung* ist.

Zu dem Ende verwende ich neben den schon eingeführten noch ein anderes nach einer Seite davon unabhängiges System von Suffixen, welche ich jenen, durch ein Komma getrennt, ihrer Wichtigkeit halber *voran* schreibe. Es sollen diese „ersten“ Suffixe nun übereinstimmen bei allen zur selben Art gehörenden Tafeln, und zwar werde 0 gewählt, wenn die Gattung eingliedrig ist. Das erste Suffixum sei 45 und 54 bei den beiden Arten einer zweigliedrigen, es sei 1, 2 und 3 bei den drei Arten einer dreigliedrigen Gattung. Im allgemeinen Falle der sechsgliedrigen Gattung sollen wieder die Combinationen 23, 32, ... 21 zur Unterscheidung der sechs Arten verwendet werden; doch kann man in diesem Falle die damit identischen „zweiten“ Suffixe unterdrücken, weil es sich ohnehin versteht, dass, wenn die sechs zugeordneten Tafeln zu verschiedenen Arten gehören, sie auch individuell verschieden sein müssen. Diese zweiten Suffixe können überhaupt ohne Schaden weggelassen werden, so oft es nur darauf ankommt, eine Tafel der Art nach zu repräsentiren. Zur selben Art gehörige Tafeln können auch einander *ähnlich* genannt werden.

Die erwähnten Suffixa sind im Grunde nur Abkürzungen, eingeführt um die verschiedenen Abtheilungen zu vertreten, in welche die sechs aus drei Elementen 1, 2, 3 möglichen *Permutationen*, oder die den letzteren entsprechenden Substitutionen der „vollständigen Gruppe“ zerfallen können, wenn gefordert wird, dass die Substitutionen einer jeden Abtheilung unter sich gleichen Effect haben sollen, der aber verschieden sei von der Wirkung, welche die den andern Abtheilungen angehörigen Substitutionen hervorbringen.

Hier sind bekanntlich in der That nur folgende Fälle möglich, auf die wir uns auch noch zurückbeziehen müssen.

α^0) Alle sechs Substitutionen der vollständigen Gruppe bringen verschiedene Wirkung hervor, oder *nur* die „identische“ Substitution 1 lässt ein vorausgesetztes Operationssubject unverändert. Dann hat man sechs Abtheilungen, deren jede nur eine einzige Permutation enthält, und diesen entsprechen die Suffixe 23, 32, ..., 21.

β^0) Ausser der identischen Substitution lässt nur eine Transposition, z. B. (23) das Subject unverändert. Dann giebt es die drei Abtheilungen:

$$1,\ (23)\ \mid\ (12),\ (123)\ \mid\ (13),\ (132),$$

deren erste eine Gruppe ist, und diesen entsprechen bezüglich die Suffixe 1, 2, 3.

γ^0) Eine cyklische Permutation lässt das Subject unverändert, während eine Transposition es ändert. Dann ergeben sich die beiden Abtheilungen:

$$1,\ (123),\ (132)\ |\ (23),\ (13),\ (12),$$

deren erste „die alterne Gruppe“ ist; diesen beiden sollen die Suffixe 45 und 54 entsprechen.

δ^0) Sowohl eine Transposition als eine cyklische Vertauschung lässt das Subject ungeändert; dann ist das gleiche mit jeder Substitution der Fall und ergiebt sich eine einzige Abtheilung bestehend aus der vollständigen Gruppe der vorstehenden Substitutionen, und eben diese soll das Suffixum 0 vertreten.

Denkt man sich in der That die Elemente 1, 2, 3 der auszuführenden Vertauschungen durch die Operationszeichen . , : und | vertreten, als das Subject dieser Vertauschungen aber die Functionstafel, so kann es nicht mehr als die aufgezählten Möglichkeiten geben, und ist hiemit zugleich der Grund *angedeutet*, weshalb nur 1-, 2-, 3- und 6-gliedrige Gattungen von Functionstafeln denkbar sind.

Ich sage bloss „angedeutet“, denn bei dem genaueren Nachweise, welcher unschwer vermittelst der „Vertauschungsprincipien“ zu leisten ist, wäre noch darauf Rücksicht zu nehmen, dass jedes operative Verknüpfungszeichen in zweierlei Weise zur Verknüpfung zweier Zahlen verwendbar ist, das Malzeichen z. B. zur Bildung von $a \cdot b$ sowohl als von $b \cdot a$, dass aber jede zulässige Vertauschung von zweien der sechs möglichen Elementarausdrücke zugleich noch die von zwei Paar andern mitbedingt, z. B. die Vertauschung der soeben genannten zugleich auch die von $a : b$ mit $\frac{a}{b}$ sowie von $b : a$ mit $\frac{b}{a}$ und vice versa, endlich, dass die cyklische Permutation von $a \cdot b$, $a : b$, $\frac{b}{a}$ auch die von $b \cdot a$, $b : a$ und $\frac{a}{b}$ einschliesst (sei es in vor- sei es in rückwärtiger Ausführung).

I. Als obersten *Eintheilungsgrund* der für ein gegebenes Zahlengebiet möglichen Functionstafeln benutze ich nun die Gliederung der Gattungen in ihre Arten, d. h. ich zähle die 1-, 2-, 3- und 6-gliedrigen Gattungen in dieser scharf bestimmten Reihenfolge auf.

II. Von den gleichvielgliedrigen Gattungen nehme ich sodann diejenigen voran, bei denen die sechs zugeordneten Tafeln durch die geringere Anzahl von individuell verschiedenen repräsentirt werden. Ich erhebe also die Gliederung der „Systeme“ einander zugeordneter Tafeln zum zweitobersten Eintheilungsprincip.

III. Von den in gleicher Weise gegliederten Tafelsystemen gebe ich ferner denjenigen den Vorzug, welche die geringere Anzahl von Formen zulassen. Unter den möglichen „*Formen*“ einer Art von

Tafeln verstehe ich alle die individuell verschiedenen Functionstafeln, welche zu der Art gehören, also aus irgend einer von ihnen durch Vertauschung der die Elemente des Zahlengebiets vorstellenden Ziffern abgeleitet werden können. Die Arten habe ich jeweils auf ihre Vielförmigkeit untersucht, und ebendiese, mithin die Gliederung der Arten in die unter ihnen enthaltenen Individuen, zum dritten Eintheilungsgrund gewählt.

Innerhalb dieses Rahmens bleibt manchmal immer noch eine gewisse Willkür, jedoch bei der vorliegenden Beschränkung des Problems auf nicht mehr als 4 Elemente nur insofern, als bezüglich gewisser *Paare* von Tafeln-Gattungen noch unentschieden erscheint, welche von beiden vor die andere zu stellen ist. Es dürfte kaum verlohnen, hier auf den Gesichtspunkt einzugehen, unter welchem ich mich für eine bestimmte Reihenfolge entschied. —

Ich beginne nun mit der Aufzählung der die Gattungen mit ihren Arten repräsentirenden individuellen Tafelnsysteme, weitere Bemerkungen auf den Schluss versparend, nach welchem ich in anderweitigen Mittheilungen auch Andeutungen über die *Zwecke*, denen die Tafeln zu dienen bestimmt sind, zu geben gedenke.

Auf einem Zahlengebiet von *zwei* Elementen existirt nur eine einzige Gattung von eindeutig umkehrbaren Functionstafeln, und diese ist durch die eine Art vertreten:

$$1_{0,0})^2 \qquad \begin{cases} 1 = 1 \cdot 1 = 2 \cdot 2, \\ 2 = 1 \cdot 2 = 2 \cdot 1. \end{cases}$$

Die zugeordneten Tafeln sind mit der angegebenen selbst identisch; diese liefert also zugleich ihre Umkehrungen auf die einfachste Weise, nämlich, indem man das Malzeichen ohne weiteres durch Doppelpunkt oder Bruchstrich ersetzt. Dagegen ist die Art der Tafel *zweiförmig* zu nennen, weil durch die Substitution (12) eine andere Form derselben Art aus ihr entsteht.

Die Elemente 1 und 2 des Zahlengebietes, für das wir die Tafel $1)^2$ aufgestellt haben, können offenbar selbst mit Substitutionen identificirt werden, und zwar mit denen der einfachsten mehr als *ein* Element enthaltenden Gruppe — vergl. β^0) des § 1, oder β), auch γ), des § 3. Unsere symbolische Multiplication erscheint dann als die eigentliche Multiplication der Substitutionen, und zwar muss die 1 der identischen Substitution, die 2 einer Transposition — sagen wir (12) — entsprechen; das ist dann also zugleich die vollständige Gruppe bei zwei Elementen. Statt der einen kann auch ein Product von mehreren Transpositionen genommen werden, die kein Element gemein haben.

Die Malzeichen lasse ich künftig weg.

§ 2.

Auf einem *drei* Elemente enthaltenden Zahlengebiete existiren fünf Arten von eindeutig umkehrbaren Functionstafeln, welche zwei eingliedrige und eine dreigliedrige Gattung zusammen ausmachen.

Die erste eingliedrige Gattung ist mit der Art identisch:

$$1_{0,0})^3 \qquad \begin{cases} 1 = 11 = 23 = 32, \\ 2 = 22 = 31 = 13, \\ 3 = 33 = 12 = 21. \end{cases}$$

Das System der zugeordneten Tafeln ist, wie die Suffixe andeuten, hier einerlei mit der einen angegebenen Tafel. Die Tafel geht überdies durch jede Vertauschung in sich selbst über, entsprechend dem Fall δ^0) des vorigen Paragraphen. Die Art der Tafel ist also *einförmig*.

Die zweite eingliedrige Gattung und Art ist:

$$2_{0,0})^3 \qquad \begin{cases} 1 = 22 = 13 = 31, \\ 2 = 33 = 21 = 12, \\ 3 = 11 = 32 = 23. \end{cases}$$

Dem Fall γ^0) entsprechend lassen nur die Substitutionen der alternen Gruppe diese Tafel ungeändert, während dieselbe durch eine jede Substitution der andern dortigen Abtheilung, nämlich durch jede Transposition, in eine zweite Form derselben Art übergeht. Diese Art ist demnach *zweiförmig*.

Die dreigliedrige Gattung umfasst die drei Arten der einander zugeordneten Tafeln:

$$3_{1,1})^3 \qquad \begin{cases} 1 = 11 = 23 = 32, \\ 2 = 33 = 12 = 21, \\ 3 = 22 = 31 = 13, \end{cases}$$

$$3_{2,2})^3 \begin{cases} 1 = 11 = 22 = 33, \\ 2 = 23 = 31 = 12, \\ 3 = 32 = 13 = 21, \end{cases} \qquad \Bigg| \qquad 3_{3,3})^3 \begin{cases} 1 = 11 = 22 = 33, \\ 2 = 32 = 13 = 21, \\ 3 = 23 = 31 = 12. \end{cases}$$

Die sechs zugeordneten Tafeln sind also hier zu zwei und zwei identisch. Dass die drei Tafeln nun wirklich verschiedenen Arten angehören, ist theilweise schon aus der Werthvertheilung unter den symbolischen Quadraten (Producten aus zwei gleichen Factoren) auf den ersten Blick ersichtlich. In Bezug auf die zwei letzten Tafeln, die zu einander conjugirt sind, beweist man es leicht vollends, da eine Permutation, welche die eine in die andere überführen sollte, jedenfalls das Element 1 ungeändert zu lassen hätte. Die Vertauschung von 2 mit 3 transformirt aber eine jede Tafel nur in sich selbst zurück.

In ähnlicher Weise ist auch bei den künftig aufgezählten Tafelsystemen der *Nachweis unerlässlich*, dass diejenigen von den einander zugeordneten Tafeln, welche durch ihre Chiffre als zu verschiedenen Arten gehörig gekennzeichnet sind, wirklich nicht durch Permutiren in einander verwandelt werden können. Ich werde aber auf diesen Umstand nicht immer ausdrücklich hinweisen, und gedachten leicht zu führenden Nachweis dem Leser überlassen.

Es wurde vorhin zugleich ersichtlich, dass der Fall β^0) des § 1 hier Anwendung findet. Die einzelne (Art von) Tafel ist demnach *dreiförmig*, desgleichen das ganze System von drei Tafeln. —

Individuell verschiedene Tafeln oder Formen giebt es also auf dem Gebiet der drei Elemente im ganzen:

$$1 \times 1 + 1 \times 2 + 3 \times 3 = \textit{zwölf}.$$

Die Elemente der Tafel $3_{1,1})^3$ können wieder selbst als Substitutionen aufgefasst werden und zwar als die der unter γ^0) des § 1 oder δ) des § 3, aufgeführten Gruppe, wobei, wie immer, die 1 der identischen Substitution zu entsprechen hat.

§ 3.

Bei vier Elementen will ich, um kurz darauf Bezug nehmen zu können, zunächst die verschiedenen Arten zusammenstellen, auf welche die 24 Substitutionen der vollständigen Gruppe in Abtheilungen zerfallen können, derart, dass die Substitutionen derselben Abtheilung auch einerlei Wirkung haben müssen bei allen Subjecten, welche ausschliesslich durch die Substitutionen der ersten Abtheilung, die jeweils eine Gruppe ist, in sich selbst transformirt werden. Es leuchtet ein, dass die Substitutionen jeder folgenden Abtheilung einfach durch Nachmultipliciren mit irgend einer von ihnen aus denen der ersten Abtheilung erhalten werden (sofern man das Subject vorangestellt denkt).

Diese Zusammenstellung wird nur der Art nach eine vollständige sein, und werden da, wo mehrere der angegebenen „ähnliche" Zerfällungen möglich sind, die Functionstafeln und Systeme eben nachher so eingerichtet sein, dass nur auf die speciell angeführte Zerfällung Bezug zu nehmen ist.

α) Der erste Fall ist der, wo die 24 Substitutionen in ebensoviel aus je einer Substitution bestehende Abtheilungen zerfallen, also jede neue Substitution das Subject wieder in ein anderes verwandelt. Dies tritt ein, wenn das Subject nur durch die identische Substitution 1 ungeändert gelassen wird.

β) Es möge (ausser der letzteren) nur *eine* Transposition das Subject unverändert lassen; diese sei (24), so haben wir die Zerfällung in zwölf Abtheilungen aus je zwei Substitutionen:

1	(23)	(34)	(12)	(14)	(13)	(12)(34)	(14)(23)	(123)
(24)	(243)	(234)	(124)	(142)	(13)(24)	(1234)	(1432)	(1243)

(132)	(134)	(143)
(1324)	(1342)	(1423).

γ) Daneben existirt noch eine andere Zerfällungsweise mit zwölf Abtheilungen:

1	(13)	(12)(34)	(12)	(14)	(23)	(34)	(123)	(124)
(13)(24)	(24)	(14)(23)	(1324)	(1342)	(1243)	(1423)	(243)	(132)

(134)	(143)	(1234)
(142)	(234)	(1432).

δ) Hieran reiht sich die Zerfällung in acht Abtheilungen:

1	(23)	(12)	(13)	(14)	(12)(34)	(13)(24)	(14)(23)
(234)	(24)	(1234)	(1342)	(1423)	(123)	(132)	(143)
(243)	(34)	(1243)	(1324)	(1432)	(124)	(134)	(142) .

ε) Sechs Abtheilungen giebt die Zerfällung:

1	(12)	(14)	(23)	(34)	(12)(34)
(13)	(132)	(134)	(123)	(143)	(1432)
(24)	(124)	(142)	(243)	(234)	(1234)
(13)(24)	(1324)	(1342)	(1243)	(1423)	(14)(23).

ζ) Desgleichen auf andere Weise:

1	(12)	(13)	(14)	(123)	(132)
(12)(34)	(34)	(1234)	(1243)	(134)	(234)
(13)(24)	(1324)	(24)	(1342)	(243)	(124)
(14)(23)	(1423)	(1432)	(23)	(142)	(143).

η) Und wieder auf andere Weise:

1	(13)	(12)	(14)	(23)	(34)
(1234)	(12)(34)	(234)	(123)	(134)	(124)
(13)(24)	(24)	(1324)	(1342)	(1243)	(1423)
(1432)	(14)(23)	(243)	(243)	(142)	(132).

ϑ) Vier Abtheilungen giebt nur die Zerfällungsweise:

1 , (34)	(12) , (12)(34)	(13) , (134)	(14) , (143)
(234), (24)	(1234), (124)	(1342), (13)(24)	(1423), (142)
(243), (23)	(1243), (123)	(1324), (132)	(1432), (14)(23).

ι) Mit zwei Abtheilungen existirt nur die eine Zerfällung:

1	, (12)(34),	(13)(24),	(14)(23)	(12) ,	(34) ,	(1324),	(1423)
(134),	(132) ,	(124) ,	(243)	(1342),	(13) ,	(24) ,	(1243)
(143),	(234) ,	(142) ,	(123)	(1432),	(1234),	(14) ,	(23) ,

wobei die erste die alterne Gruppe ist.

$\varkappa$) Eine einzige Abtheilung besteht aus der vollständigen Gruppe der 24 (wiederholt vorstehend aufgezählten) Substitutionen und ist dann am Platze, wenn keine Vertauschung das Subject zu ändern vermag.

Von den angegebenen Zerlegungen sind nur die α), ζ), ι), $\varkappa$) in ihrer Art einzig.

Die Vollständigkeit dieser Aufzählung von Zerlegungsweisen lässt sich unschwer beweisen; sie folgt aus dem Umstande, dass, wie wohl bekannt ist, nur zehnerlei Typen von Substitutionsgruppen in der auf vier Elemente bezüglichen vollständigen Gruppe enthalten sind.

Bei den einzelnen Tafeln werden auffallenderweise die Fälle ε), η) und $\varkappa$) im nachfolgenden nicht zu citiren sein, gleichwie dies bei drei Elementen mit α^0) des § 1 der Fall gewesen ist (vergl. § 2). Dagegen sind bei den Tafelsystemen jene Fälle vertreten.

§ 4.

Auf einem Zahlengebiet von *vier* Elementen existiren 35 Arten von eindeutig umkehrbaren Functionstafeln, welche sich in 15 Gattungen, nämlich in 6 eingliedrige, 1 zweigliedrige, 7 dreigliedrige und 1 sechsgliedrige Gattung vertheilen.

Die *eingliedrigen* Gattungen sind:

$$1_{0,0})^4 \quad \begin{cases} 1 = 11 = 22 = 33 = 44, \\ 2 = 34 = 43 = 12 = 21, \\ 3 = 42 = 31 = 24 = 13, \\ 4 = 23 = 14 = 41 = 32. \end{cases}$$

Nur die Substitutionen der ersten Gruppe von ϑ) des vorigen Paragraphen transformiren diese Tafel in sich selbst. Die (Art der) Tafel ist also *vierförmig*, und werden die drei andern Formen aus der angegebenen am einfachsten durch die Substitutionen (12), (13), (14) abgeleitet.

Die Elemente der vorstehenden Tafel können selbst identificirt werden mit den Substitutionen sowohl, der unter ε) als der unter ζ) aufgeführten Gruppe.

$$2_{0,0})^4 \quad \begin{cases} 1 = 11 = 33 = 24 = 42, \\ 2 = 23 = 32 = 14 = 41, \\ 3 = 31 = 13 = 22 = 44, \\ 4 = 43 = 34 = 12 = 21. \end{cases}$$

Da hier der Fall β) des § 3 vorliegt, so ist diese Tafel *zwölfförmig.*

$$3_{0,45})^4 \begin{cases} 1 = 11 = 23 = 34 = 42 \\ 2 = 22 = 14 = 43 = 31 \\ 3 = 33 = 41 = 12 = 24 \\ 4 = 44 = 32 = 21 = 13 \end{cases} \qquad 3_{0,54})^4 \begin{cases} 1 = 11 = 24 = 43 = 32 \\ 2 = 22 = 13 = 34 = 41 \\ 3 = 33 = 42 = 21 = 14 \\ 3 = 44 = 31 = 12 = 23. \end{cases}$$

Die sechs zugeordneten Tafeln zerfallen hier in zwei individuell verschiedene, welche indess von einerlei Art sind, indem die eine durch Vertauschung von irgend zwei Ziffern aus der andern hervorgeht; die alterne Gruppe lässt jede Tafel ungeändert, und passt der Fall ι). Die Tafel ist hiernach *zweiförmig*, das System der beiden Tafeln als solches einförmig, cf. $\varkappa$).

$$4_{0,23})^4 \begin{cases} 1 = 22 = 14 = 43 = 31 \\ 2 = 11 = 23 = 34 = 42 \\ 3 = 44 = 32 = 21 = 13 \\ 4 = 33 = 41 = 12 = 24 \end{cases} \qquad 4_{0,32})^4 \begin{cases} 1 = 22 = 13 = 34 = 41 \\ 2 = 11 = 24 = 43 = 32 \\ 3 = 44 = 31 = 12 = 23 \\ 4 = 33 = 42 = 21 = 14 \end{cases}$$

$$4_{0,31})^4 \begin{cases} 1 = 33 = 12 = 24 = 41 \\ 2 = 44 = 21 = 13 = 32 \\ 3 = 11 = 34 = 42 = 23 \\ 4 = 22 = 43 = 31 = 14 \end{cases} \qquad 4_{0,13})^4 \begin{cases} 1 = 44 = 12 = 23 = 31 \\ 2 = 33 = 21 = 14 = 42 \\ 3 = 22 = 34 = 41 = 13 \\ 4 = 11 = 43 = 32 = 24 \end{cases}$$

$$4_{0,12})^4 \begin{cases} 1 = 44 = 13 = 32 = 21 \\ 2 = 33 = 24 = 41 = 12 \\ 3 = 22 = 31 = 14 = 43 \\ 4 = 11 = 42 = 23 = 34 \end{cases} \qquad 4_{0,21})^4 \begin{cases} 1 = 33 = 14 = 42 = 21 \\ 2 = 44 = 23 = 31 = 12 \\ 3 = 11 = 32 = 24 = 43 \\ 4 = 22 = 41 = 13 = 34. \end{cases}$$

Auf jede dieser Tafeln findet ζ) Anwendung.

Die Art derselben ist also *sechsförmig*, und zwar enthält sie keine andern als die vorstehend angeführten 6 Formen, welche aus irgend einer von ihnen durch die Substitutionen der Abtheilungen von ζ) hervorgehen. Z. B. $4_{0,23}$) geht durch die Substitution (12) oder aber (34) in $4_{0,32}$), dagegen durch die (234) in $4_{0,31}$) und letzteres eben hiedurch in $4_{0,12}$) über. Das ganze System der 6 Tafeln ist einförmig, cf. $\varkappa$).

$$5_{0,23})^4 \begin{cases} 1 = 14 = 42 = 23 = 31 \\ 2 = 22 = 11 = 34 = 43 \\ 3 = 33 = 12 = 24 = 41 \\ 4 = 44 = 13 = 32 = 21 \end{cases} \qquad 5_{0,32})^4 \begin{cases} 1 = 13 = 32 = 24 = 41 \\ 2 = 22 = 11 = 34 = 43 \\ 3 = 33 = 14 = 42 = 21 \\ 4 = 44 = 12 = 23 = 31 \end{cases}$$

$$5_{0,31})^4 \begin{cases} 1 = 12 = 23 = 34 = 41 \\ 2 = 22 = 14 = 43 = 31 \\ 3 = 33 = 11 = 24 = 42 \\ 4 = 44 = 13 = 32 = 21 \end{cases} \qquad 5_{0,13})^4 \begin{cases} 1 = 12 = 24 = 43 = 31 \\ 2 = 22 = 13 = 34 = 41 \\ 3 = 33 = 14 = 42 = 21 \\ 4 = 44 = 11 = 23 = 32 \end{cases}$$

$$5_{0,12})^4 \begin{cases} 1 = 13 = 34 = 42 = 21 \\ 2 = 22 = 14 = 43 = 31 \\ 3 = 33 = 12 = 24 = 41 \\ 4 = 44 = 11 = 23 = 32 \end{cases} \qquad 5_{0,21})^4 \begin{cases} 1 = 14 = 43 = 32 = 21 \\ 2 = 22 = 13 = 34 = 41 \\ 3 = 33 = 11 = 24 = 42 \\ 4 = 44 = 12 = 23 = 31. \end{cases}$$

Hier geht $5_{0,23})$ in $5_{0,32})$ durch die Substitution (34), in $5_{0,31})$ durch die (234) und diese Tafel eben dadurch in $5_{0,12})$ über. Die einzelne Tafel ist *24-förmig*, cf. α); das ganze System der sechs zugeordneten Tafeln ist also vierförmig, und zwar passt auf diese ϑ).

Die letzte eingliedrige Gattung ist:

$$6_{0,23})^4 \begin{cases} 1 = 11 = 22 = 34 = 43 \\ 2 = 23 = 31 = 14 = 42 \\ 3 = 44 = 32 = 21 = 13 \\ 4 = 33 = 41 = 12 = 24 \end{cases} \qquad 6_{0,32})^4 \begin{cases} 1 = 11 = 22 = 34 = 43 \\ 2 = 24 = 41 = 13 = 32 \\ 3 = 44 = 31 = 12 = 23 \\ 4 = 33 = 42 = 21 = 14 \end{cases}$$

$$6_{0,31})^4 \begin{cases} 1 = 11 = 33 = 24 = 42 \\ 2 = 44 = 21 = 13 = 32 \\ 3 = 34 = 41 = 12 = 23 \\ 4 = 22 = 43 = 31 = 14 \end{cases} \qquad 6_{0,13})^4 \begin{cases} 1 = 11 = 44 = 23 = 32 \\ 2 = 33 = 21 = 14 = 42 \\ 3 = 22 = 34 = 41 = 13 \\ 4 = 43 = 31 = 12 = 24 \end{cases}$$

$$6_{0,12})^4 \begin{cases} 1 = 11 = 44 = 23 = 32 \\ 2 = 33 = 24 = 41 = 12 \\ 3 = 22 = 31 = 14 = 43 \\ 4 = 42 = 21 = 13 = 34 \end{cases} \qquad 6_{0,21})^4 \begin{cases} 1 = 11 = 33 = 24 = 42 \\ 2 = 44 = 23 = 31 = 12 \\ 3 = 32 = 21 = 14 = 43 \\ 4 = 22 = 41 = 13 = 34. \end{cases}$$

Hier gilt ad 6) das gleiche, wie ad 5). —

Die *zweigliedrige* Gattung ist:

$$7_{45,23})^4 \begin{cases} 1 = 22 = 14 = 43 = 31 \\ 2 = 33 = 11 = 24 = 42 \\ 3 = 44 = 32 = 21 = 13 \\ 4 = 41 = 12 = 23 = 34 \end{cases} \qquad 7_{54,32})^4 \begin{cases} 1 = 22 = 13 = 34 = 41 \\ 2 = 33 = 11 = 24 = 42 \\ 3 = 44 = 31 = 12 = 23 \\ 4 = 43 = 32 = 21 = 14 \end{cases}$$

$$7_{45,31})^4 \begin{cases} 1 = 33 = 12 = 24 = 41 \\ 2 = 21 = 13 = 34 = 42 \\ 3 = 44 = 11 = 32 = 23 \\ 4 = 22 = 43 = 31 = 14 \end{cases} \qquad 7_{54,13})^4 \begin{cases} 1 = 44 = 12 = 23 = 31 \\ 2 = 33 = 21 = 14 = 42 \\ 3 = 32 = 24 = 41 = 13 \\ 4 = 22 = 11 = 43 = 34 \end{cases}$$

$$7_{45,12})^4 \begin{cases} 1 = 44 = 13 = 32 = 21 \\ 2 = 33 = 24 = 41 = 12 \\ 3 = 31 = 14 = 42 = 23 \\ 4 = 22 = 11 = 43 = 34 \end{cases} \qquad 7_{54,21})^4 \begin{cases} 1 = 33 = 14 = 42 = 21 \\ 2 = 24 = 43 = 31 = 12 \\ 3 = 44 = 11 = 32 = 23 \\ 4 = 22 = 41 = 13 = 34. \end{cases}$$

Durch die Substitution (234) geht in der That jede der Tafeln links vom Strich in die darunter folgende, die unterste aber in die oberste über, wogegen man leicht die Unmöglichkeit beweist, die Tafel $7_{45,23})$ in die zu ihr conjugirte $7_{54,32})$ zu verwandeln. Die Tafel ist *24-förmig* cf. α), das ganze System also achtförmig, entsprechend dem Falle δ). —

§ 5.

Die *dreigliedrigen* Gattungen sind:

$$8_{1,1})^4 \begin{cases} 1 = 11 = 22 = 33 = 44 \\ 2 = 24 = 13 = 42 = 31 \\ 3 = 32 = 41 = 14 = 23 \\ 4 = 43 = 34 = 21 = 12. \end{cases}$$

$$8_{2,2})^4 \begin{cases} 1 = 11 = 24 = 43 = 32 \\ 2 = 33 = 42 = 21 = 14 \\ 3 = 44 = 31 = 12 = 23 \\ 4 = 22 = 13 = 34 = 41. \end{cases} \qquad 8_{3,3})^4 \begin{cases} 1 = 11 = 23 = 34 = 42 \\ 2 = 33 = 41 = 12 = 24 \\ 3 = 44 = 32 = 21 = 13 \\ 4 = 22 = 14 = 43 = 31. \end{cases}$$

Durch die Substitution (234) geht jede dieser Tafeln in sich selbst über, cf. δ); die Tafel ist *achtförmig*, desgl. das System der drei Tafeln.

$$9_{1,1})^4 \begin{cases} 1 = 11 = 33 = 24 = 42 \\ 2 = 21 = 12 = 34 = 43 \\ 3 = 31 = 13 = 22 = 44 \\ 4 = 41 = 14 = 23 = 32 \end{cases}$$

$$9_{2,2})^4 \begin{cases} 1 = 11 = 22 = 33 = 44 \\ 2 = 23 = 34 = 41 = 12 \\ 3 = 31 = 13 = 24 = 42 \\ 4 = 43 = 32 = 21 = 14 \end{cases} \qquad 9_{3,3})^4 \begin{cases} 1 = 11 = 22 = 33 = 44 \\ 2 = 21 = 14 = 43 = 32 \\ 3 = 31 = 13 = 24 = 42 \\ 4 = 41 = 12 = 23 = 34. \end{cases}$$

Da hier β) passt, sind die Tafeln *zwölfförmig*, ebenso wie auch das System derselben. —

Die Elemente der Tafel $9_{1,1})^4$ lassen sich der Reihe nach identificiren mit den Substitutionen der unter η) angeführten Gruppe.

$$10_{1,1})^4 \begin{cases} 1 = 11 = 22 = 33 = 44 \\ 2 = 32 = 14 = 41 = 23 \\ 3 = 24 = 42 = 13 = 31 \\ 4 = 43 = 21 = 34 = 12 \end{cases}$$

$$10_{2,2})^4 \begin{cases} 1 = 11 = 33 = 24 = 42 \\ 2 = 32 = 14 = 43 = 21 \\ 3 = 44 = 22 = 31 = 13 \\ 4 = 23 = 41 = 12 = 34 \end{cases} \qquad 10_{3,3})^4 \begin{cases} 1 = 11 = 33 = 24 = 42 \\ 2 = 34 = 12 = 41 = 23 \\ 3 = 22 = 44 = 13 = 31 \\ 4 = 43 = 21 = 32 = 14. \end{cases}$$

Wie bei 9) passt hier β) und ist Tafel nebst System *zwölfförmig*.

$$11_{1,1})^4 \begin{cases} 1 = 11 = 22 = 34 = 43 \\ 3 = 24 = 42 = 13 = 31 \\ 3 = 33 = 44 = 12 = 21 \\ 4 = 41 = 14 = 23 = 32 \end{cases}$$

$$11_{2,2})^4 \begin{cases} 1 = 11 = 44 = 23 = 32 \\ 2 = 21 = 13 = 34 = 42 \\ 3 = 33 = 12 = 24 = 41 \\ 4 = 22 = 43 = 31 = 14 \end{cases} \qquad 11_{3,3})^4 \begin{cases} 1 = 11 = 44 = 23 = 32 \\ 2 = 24 = 43 = 31 = 12 \\ 3 = 33 = 14 = 42 = 21 \\ 4 = 22 = 41 = 13 = 34. \end{cases}$$

Die einzelne Tafel, sowie das ganze System, ist *24-förmig*, geht nämlich durch jede Vertauschung in eine neue Form über, cf. α).

$$12_{1,1})^4 \begin{cases} 1 = 33 = 44 = 12 = 21 \\ 2 = 24 = 42 = 13 = 31 \\ 3 = 11 = 22 = 34 = 43 \\ 4 = 41 = 14 = 23 = 32 \end{cases}$$

$$12_{2,2})^4 \begin{cases} 1 = 44 = 13 = 32 = 21 \\ 2 = 11 = 23 = 34 = 42 \\ 3 = 31 = 12 = 24 = 43 \\ 4 = 22 = 33 = 41 = 14 \end{cases} \qquad 12_{3,3})^4 \begin{cases} 1 = 44 = 12 = 23 = 31 \\ 2 = 11 = 24 = 43 = 32 \\ 3 = 34 = 42 = 21 = 13 \\ 4 = 22 = 33 = 41 = 14. \end{cases}$$

Es gilt hier das gleiche, wie beim vorigen Systeme.

Bei den nächsten (den letzten) dreigliedrigen Gattungen sind alle sechs zugeordneten Tafeln verschieden:

$$13_{1,23})^4 \begin{cases} 1 = 11 = 32 = 24 = 43 \\ 2 = 44 = 23 = 31 = 12 \\ 3 = 33 = 14 = 42 = 21 \\ 4 = 22 = 41 = 13 = 34 \end{cases} \qquad 13_{1,32})^4 \begin{cases} 1 = 11 = 34 = 42 = 23 \\ 2 = 44 = 21 = 13 = 32 \\ 3 = 33 = 12 = 24 = 41 \\ 4 = 22 = 43 = 31 = 14 \end{cases}$$

$$13_{2,31})^4 \begin{cases} 1 = 11 = 34 = 22 = 43 \\ 2 = 24 = 41 = 13 = 32 \\ 3 = 33 = 12 = 44 = 21 \\ 4 = 42 = 23 = 31 = 14 \end{cases} \qquad 13_{2,13})^4 \begin{cases} 1 = 11 = 32 = 44 = 23 \\ 2 = 24 = 43 = 31 = 12 \\ 3 = 33 = 14 = 22 = 41 \\ 4 = 42 = 21 = 13 = 34 \end{cases}$$

$$13_{3,12})^4 \begin{cases} 1 = 32 = 44 = 23 = 11 \\ 2 = 21 = 13 = 34 = 42 \\ 3 = 14 = 22 = 41 = 33 \\ 4 = 43 = 31 = 12 = 24 \end{cases} \qquad 13_{3,21})^4 \begin{cases} 1 = 34 = 22 = 43 = 11 \\ 2 = 23 = 31 = 14 = 42 \\ 3 = 12 = 44 = 21 = 33 \\ 4 = 41 = 13 = 32 = 24. \end{cases}$$

Die in gleicher Höhe nebeneinander stehenden Tafeln gehen durch die Substitution (13) oder (24) aus einander hervor, und für jede Tafel gilt γ); dieselbe ist daher *zwölfförmig* und verhält sich analog wie der Bruch $\frac{1-3}{2-4}$; in welchem natürlich die Ziffern nur Indices vorstellen sollen. Das ganze System ist hiernach sechsförmig, gemäss ε).

$$14_{1,23})^4 \begin{cases} 1 = 22 = 14 = 43 = 31 \\ 2 = 33 = 41 = 12 = 24 \\ 3 = 44 = 32 = 21 = 13 \\ 4 = 11 = 23 = 34 = 42 \end{cases} \qquad 14_{1,32})^4 \begin{cases} 1 = 22 = 13 = 34 = 41 \\ 2 = 33 = 42 = 21 = 14 \\ 3 = 44 = 31 = 12 = 23 \\ 4 = 11 = 24 = 43 = 32 \end{cases}$$

$$14_{2,31})^4 \begin{cases} 1 = 22 = 14 = 33 = 41 \\ 2 = 34 = 42 = 21 = 13 \\ 3 = 11 = 23 = 44 = 32 \\ 4 = 43 = 31 = 12 = 24 \end{cases} \qquad 14_{2,13})^4 \begin{cases} 1 = 14 = 42 = 23 = 31 \\ 2 = 21 = 33 = 12 = 44 \\ 3 = 32 = 24 = 41 = 13 \\ 4 = 43 = 11 = 34 = 22 \end{cases}$$

$$14_{3,12})^4 \begin{cases} 1 = 13 = 32 = 24 = 41 \\ 2 = 44 = 21 = 33 = 12 \\ 3 = 31 = 14 = 42 = 23 \\ 4 = 22 = 43 = 11 = 34 \end{cases} \qquad 14_{3,21})^4 \begin{cases} 1 = 14 = 33 = 41 = 22 \\ 2 = 31 = 12 = 24 = 43 \\ 3 = 23 = 44 = 32 = 11 \\ 4 = 42 = 21 = 13 = 34. \end{cases}$$

Die nebeneinanderstehenden Tafeln gehen hier durch die Substitution (1234) in einander über; im übrigen trifft, wie bei 13), für jede Tafel 14) der Fall γ) zu; dieselbe ist daher *zwölfförmig* und das ganze System wiederum sechsförmig, jedoch gemäss η). —

Die *sechsgliedrige* Gattung ist:

$$15_{23})^4 \left\{\begin{array}{l} 1 = 11 = 22 = 33 = 44 \\ 2 = 23 = 34 = 41 = 12 \\ 3 = 32 = 21 = 14 = 43 \\ 4 = 42 = 24 = 13 = 31 \end{array}\right. \qquad 15_{32})^4 \left\{\begin{array}{l} 1 = 11 = 22 = 33 = 44 \\ 2 = 21 = 14 = 43 = 32 \\ 3 = 34 = 41 = 12 = 23 \\ 4 = 42 = 24 = 13 = 31 \end{array}\right.$$

$$15_{31})^4 \left\{\begin{array}{l} 1 = 11 = 22 = 34 = 43 \\ 2 = 44 = 21 = 13 = 32 \\ 3 = 31 = 14 = 42 = 23 \\ 4 = 33 = 41 = 12 = 24 \end{array}\right. \qquad 15_{13})^4 \left\{\begin{array}{l} 1 = 11 = 23 = 34 = 42 \\ 2 = 33 = 44 = 21 = 12 \\ 3 = 22 = 31 = 14 = 43 \\ 4 = 41 = 13 = 32 = 24 \end{array}\right.$$

$$15_{12})^4 \left\{\begin{array}{l} 1 = 11 = 24 = 43 = 32 \\ 2 = 33 = 44 = 21 = 12 \\ 3 = 22 = 34 = 41 = 13 \\ 4 = 42 = 23 = 31 = 14 \end{array}\right. \qquad 15_{21})^4 \left\{\begin{array}{l} 1 = 11 = 22 = 34 = 43 \\ 2 = 44 = 23 = 31 = 12 \\ 3 = 32 = 24 = 41 = 13 \\ 4 = 33 = 42 = 21 = 14 \end{array}\right.$$

Die einzelne Tafel ist *24-förmig*, da sie dem Fall α) entsprechend, durch jede andere Permutation eine andere wird. Das ganze System ist ebenfalls 24-förmig.

Die vorstehende ist also *die einfachste* sechsgliedrige Gattung von Tafeln, die es geben kann.

Im ganzen giebt es hiernach (den aufgezählten Systemen der Reihe nach bezüglich entsprechend) genau:

$$\begin{aligned} 1 \times 4 + 1 \times 12 + 2 \times 1 + 6 \times 1 + 6 \times 4 + 6 \times 4 + 6 \times 8 \\ + 3 \times 8 + 3 \times 12 + 3 \times 12 + 3 \times 24 + 3 \times 24 \\ + 6 \times 6 + 6 \times 6 + 6 \times 24 = 576 = 24^2 \end{aligned}$$

Formen oder individuell verschiedene Tafeln auf dem Zahlengebiet von vier Elementen. —

Als auf einen untergeordneten Umstand will ich schliesslich noch auf folgendes aufmerksam machen.

Bei allen Tafeln stehen in jeder Horizontalen oder Zeile an der Multiplicandenstelle selbstverständlich lauter verschiedene Ziffern, desgl. an der Stelle des symbolischen Multiplicators (zweiten Factors oder Argumentes) — eine nothwendige Folge der verlangten Eindeutigkeit der beiden inversen Functionen. Bei der schwachen Mehrzahl (zehn

auf neun) der bisherigen Tafelnsysteme lässt sich aber ausserdem eine solche Anordnung der Productwerthe treffen, dass niemals gleiche Ziffern in dieselbe Verticale zu stehen kommen.

Wo es überhaupt möglich ist, habe ich diese Anordnung bei den vorstehenden Angaben wirklich hergestellt. Die Systeme $1)^2$, $2)^4$, $5)^4$, $6)^4$, $7)^4$, $10)^4$, $11)^4$, $12)^4$, $15)^4$ sind diejenigen, bei welchen es, wie leicht zu beweisen wäre, nicht angeht.

Soweit es mit vorstehendem Princip vereinbar war, habe ich ausserdem die Producte übersichtlich so angeordnet, dass stetiger Anschluss zwischen dem letzten Factor irgend eines und dem ersten Factor des darauf folgenden Productes möglichst oft stattfindet. Ueberhaupt wurde auf Regelung der Willkür, wo solche noch Spielraum hatte, und damit auf die Eleganz, sowohl in der Darstellung der Systeme selbst, als in der Auswahl derer, die ihre Gattung zu repräsentiren bestimmt wurden, thunlichst Bedacht genommen, wenn es auch nicht gelang, das Arbitrium vollständig zu bannen. —

Um nun die Art einer *gegebenen* Tafel ausfindig zu machen, wird man zunächst auch die ihr zugeordneten Tafeln herstellen, auf die Gliederung derselben achten, und bestimmen, wievielgliedrig ihre Gattung ist. Alsdann wird man die mit der gegebenen artverwandte Tafel in der entsprechenden Rubrik der vorstehenden Aufzählung jeweils bald finden, vornehmlich, wenn man darauf achtet, wie die symbolischen Quadrate, (d. i. Producte aus zwei gleichen Factoren) auf die Zahlenwerthe vertheilt sind — ohne, für einmal, eines weiteren lexicalischen Apparates zu bedürfen. Häufig verhilft schon das letztere Augenmerk allein schnell auf die Spur der fraglichen Art und Gattung.

§ 6.

Ich werde jetzt beweisen, dass die vorstehende Zusammenstellung eine vollständige ist.

Der Beweis — zunächst bei 4 Elementen — ist erbracht, wenn gezeigt werden kann, dass es gerade die gefundene Anzahl 576 von eindeutig umkehrbaren Functionstafeln bei den Elementen 1, 2, 3, 4 a priori geben muss.

Eine jede solche Tafel besitzt die Form:

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} 1 = 1\,.\,a_1 + 2\,.\,a_2 + 3\,.\,a_3 + 4\,.\,a_4, \\ 2 = 1\,.\,b_1 + 2\,.\,b_2 + 3\,.\,b_3 + 4\,.\,b_4, \\ 3 = 1\,.\,c_1 + 2\,.\,c_2 + 3\,.\,c_3 + 4\,.\,c_4, \\ 4 = 1\,.\,d_1 + 2\,.\,d_2 + 3\,.\,d_3 + 4\,.\,d_4, \end{cases}$$

worin die vier Grössen a (desgl. die b, c, d) die von einander verschiedenen Werthe 1, 2, 3, 4 in irgend einer Anordnung haben müssen,

und nur die beschränkende Anforderung allein noch hinzutritt, dass nirgends gleiche Werthe dieser Grössen in dieselbe Verticale kommen dürfen. Denn sobald letzteres auch nur bei zwei Multiplicatoren der Fall wäre, würden zwei übereinstimmende Producte verschiedenen Werth haben, was der Eindeutigkeit der Multiplication widerspräche, und auch umgekehrt ist ersichtlich, dass die Multiplication eindeutig ausfällt, sobald jenes Zusammentreffen vermieden ist. Eindeutig umkehrbar ist aber die Multiplication bei der vorstehenden Annahme (A) über die Form der Tafel schon von selbst (auf beide Weisen); sie ist es nämlich immer dann, und (wie schon oben bemerkt) auch nur dann, wenn in jeder Zeile alle ersten Factoren von einander verschieden sind, desgl. alle zweiten Factoren.

Wenn es einmal geboten erschiene, die Tafeln in ein Lexicon zu bringen, so würde man nur etwa die zweiten Factoren zu notiren haben, also (A) kurzmöglichst durch das Schema

$$\text{(B)} \qquad \left\{\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{matrix}\right.$$

repräsentiren.

Nun können zunächst die Stellen der a auf $4! = 24$ Arten ausgefüllt werden.

$$\begin{array}{r} \text{(C)} \\ 1234 \\ \hline -2143 \\ 2341 \\ 2413 \\ 3142 \\ -3412 \\ 3421 \\ 4123 \\ 4312 \\ -4321 \end{array}$$

Die Stellen der b können hiezu auf je 9 Arten ausgefüllt werden, wie aus dem nebenstehenden Schema zu ersehen ist, in welchem die Elemente als Indices der a anzusehen sind, und unter dem Striche in lexicalischer Anordnung die Möglichkeiten angegeben sind, auf welche, wenn die erste Zeile von (B) mit den über dem Striche angezeigten Elementen besetzt ist, die Stellen der b in der zweiten Zeile von (B) mit eben diesen Elementen besetzt werden können.

Sieht man die oberste Zeile des Schemas (C) als Nenner, die darunter stehenden Zeilen als Zähler von Substitutionen an, so entsprechen diese 9 Möglichkeiten denjenigen von den 24 Substitutionen der vollständigen Gruppe, welche vom vierten „Grade" sind, d. h. wirklich alle vier Elemente versetzen. Diese 9 Substitutionen sind nun aber von zweierlei Typus, nämlich 3 von ihnen, in (C) durch ein vorgesetztes Minuszeichen hervorgehoben, sind Transpositionenproducte, wie (12)(34), die 6 übrigen sind Cyklen von der vierten Ordnung, wie (1234) = (2341).

Dementsprechend sind zwei Fälle zu unterscheiden.

Ist die zweite Zeile von (B) mit einem Transpositionenproduct besetzt, so zeigt man leicht, dass die dritte Zeile von (B) noch auf

*vier*erlei Weisen besetzt werden kann; nämlich, wenn in (B) die a-Stellen der ersten und die b-Stellen der zweiten Zeile mit 1234 resp. 2143 besetzt sind, so kann man in der dritten Zeile die c-Stellen nach Belieben besetzen mit 3412, 3421, 4312, 4321.

Wenn dagegen die zweite Zeile von (B) mit einem Cyklus vierter Ordnung besetzt ist, bleiben für die dritte nur mehr *zwei* mögliche Besetzungsweisen übrig. Wenn nämlich 1234 und 2341 die beiden ersten Zeilen von (B) repräsentiren, so sind nur mehr 3412 und 4123 für die dritte Zeile zulässig.

Was aber hier nur für je ein Beispiel gezeigt zu sein scheint, muss allgemein gelten wegen der „Aehnlichkeit" der zum selben Typus gehörenden Substitutionen.

Es giebt hienach

$$(4\times3+2\times6)\times24=24^2$$

mögliche Arten, die drei ersten Zeilen des Schema's (B) mit den Elementen 1, 2, 3, 4 zu besetzen; und ebensoviele muss es Functionstafeln geben; denn durch die Besetzung der drei ersten Zeilen ist die der vierten eindeutig mitbestimmt, indem daselbst an jeder d-Stelle dasjenige Element angesetzt werden muss, welches in seiner Colonne allein noch unvertreten ist — q. e. d.

Ganz ähnlich, nur noch leichter, ist auch die Vollständigkeit unsrer Aufzählung für das Gebiet von drei Zahlen zu beweisen.

Die Ausdehnung der Untersuchung auf ein Gebiet von n Zahlen dürfte aber als eine schwierige combinatorische Aufgabe zu bezeichnen sein*), mag auch ihrer Lösung die Gruppentheorie**) vielleicht schon nahe treten.

Wenn wir noch die bei nur *einem* Element einzig mögliche Functionstafel $1=1.1$ hinzunehmen, so ist in übersichtlicher Zusammenfassung unser Ergebniss dieses: *dass es auf einem Zahlengebiet von*

	1,	2,	3,	4	*Elementen*
bezüglich	1,	1,	3,	15	*Gattungen*,
	1,	1,	5,	35	*Arten*,
	1,	2,	12,	576	*Formen*

von eindeutig umkehrbaren Functionstafeln giebt.

Karlsruhe in Baden, eingesandt December 1886.

*) In Hoppe's Archiv, Bd. 68, S. 353 ... 377 habe ich eine kleine Vorarbeit dazu gegeben. Den dortigen Literaturangaben ist auch noch die mir unbekannt gewesene Arbeit von Herrn Moritz Cantor, Schlömilch's Zeitschrift Bd. 2, S. 410 ... 412, nebst Oettinger, Lehre von den Combinationen, anzureihen.

**) Betreffs des Zusammenhangs der obigen mit Herrn Walter Dyck's Untersuchungen sei auf einen ferneren in genanntem Archiv erscheinenden Aufsatz „*Ueber Algorithmen und Kalkuln*" einstweilen verwiesen; auch ist darüber wohl eine Mittheilung von ihm selbst zu erhoffen.

Ueber biquadratische Gleichungen.

Von

Paul Gordan in Erlangen.

Vorrede.

Man kann bekanntlich eine allgemeine Gleichung 5^{ten} Grades durch passend gewählte Tschirnhausentransformation auf solche Gleichungen 5^{ten} Grades zurückführen, in denen nur ein Parameter auftritt.

Die Coefficienten der transformirenden Function lassen sich nicht rational durch die Coefficienten a der ursprünglichen Gleichung ausdrücken; sie hängen rational von den a und gewissen Grössen R ab, welche sich nur durch quadratische Gleichungen aus den a berechnen lassen.

Von diesen quadratischen Gleichungen lassen sich selbst dann nicht alle rational auflösen, wenn man in ihnen für die a ihre Werthe in den Wurzeln von f einträgt.

Die R, welche nicht nur in den Coefficienten, sondern auch den Wurzeln der Originalgleichung irrational sind, werden accessorische Irrationalitäten genannt.

Es frägt sich, ob diese accessorischen Irrationalitäten für die Transformation der Gleichungen 5^{ten} Grades auf solche mit 1 Parameter nothwendig sind oder nicht.

Herr Kronecker hat sich für die Nothwendigkeit ausgesprochen; er hat im 61^{ten} Bd. von Crelle's Journal behauptet, dass Gleichungen 5^{ten} Grades, auch, wenn man die Wurzel der Discriminante adjungirt, keine Resolvente besitzen in welcher nur ein Parameter vorkommt.

Die Richtigkeit dieser Behauptung ist von Herrn Klein in seinem Buche:

„Das Icosaeder und die Gleichungen 5^{ten} Grades“

bewiesen worden. Die Gründe für die Richtigkeit findet Herr Klein in einigen Eigenschaften des Icosaeders, welche er vorher auseinander setzt. Hier will ich einen neuen Beweis des Kronecker'schen Satzes

geben, indem ich ihn auf eine Eigenschaft der biquadratischen Gleichungen stütze.

Bei diesem Vorhaben haben mich besonders zwei Gründe geleitet. Zunächst wollte ich den Satz auch denen zugänglich machen, welche sich nicht eingehend mit den regulären Körpern beschäftigt haben. Sodann wollte ich mir auch die Tragweite des Satzes klar machen.

Er gilt nicht nur für die Gleichungen 5^{ten} Grades, sondern überhaupt für alle allgemeinen Gleichungen, deren Grad grösser als 4 ist. Ja er gilt sogar für Gleichungen mit Affect; so z. B. für diejenigen Gleichungen vom 7^{ten} Grade, welche ich im 25^{ten} Bde. der Math. Annalen behandelt habe.

§ 1.

Die Lüroth'sche Function.

Herr Lüroth hat im 9^{ten} Bande der Math. Ann. den Satz bewiesen:

Zu je zwei rationalen Functionen $f_0(x)$, $f_1(x)$ kann man eine rationale Function:

$$\chi(f_0, f_1)$$

finden, von welcher f_0 und f_1 rational abhängen:

$$f_\lambda = p_\lambda(\chi).$$

Aus diesem Satze kann man einen anderen ableiten:

Hängen m rationale Functionen:

$$f_0, f_1, \ldots, f_{m-1}$$

von n Variabeln

$$x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$$

ab, so kann man eine rationale Function:

$$\chi(f_0, f_1, \ldots, f_{m-1})$$

bestimmen, von welcher alle f rational abhängen:

$$f_\lambda = p_\lambda(\chi).$$

Beweis.

Wir wollen unsern Beweis so führen, dass wir der Reihe nach diese 3 einfacheren Sätze beweisen:

1. Unser Satz gilt für $m = 2$, $n = 2$.
2. Unter der Voraussetzung, dass er für $m - 1$ Functionen und 2 Variabeln richtig ist, gilt er auch für m Functionen und 2 Variable.

3. Unter der Voraussetzung, dass er für m Functionen und $n-1$ Variable richtig ist, gilt er für m Functionen und n Variable.

Beweis des 1ten Satzes.

Nach dem Lüroth'schen Satze kann man eine Grösse:

$$w = q(u_0, v_0)$$

berechnen, von welcher die beiden Functionen:

$$u_0 = f_0(x_0, \alpha), \quad u_1 = f_1(x_0, \alpha)$$

rational abhängen, welche aus den f entstehen, wenn man die Variable x_1 durch irgend eine Constante α ersetzt:

$$u_0 = p_0(w), \quad u_1 = p_1(w).$$

Wir behaupten nun, dass wenn man:

$$\chi = p(f_0, f_1),$$
$$L_0 = f_0 - p_0(\chi), \qquad L_1 = f_1 - p_1(\chi)$$

setzt, die Grössen L_0, L_1 identisch verschwinden.

Der Beweis soll indirect geführt werden; d. h. wir machen die Annahme

$$L_\lambda \neq 0$$

und wollen zeigen, dass wir dadurch auf einen Widerspruch geführt werden.

Da $L_\lambda(x_0, \alpha)$ verschwindet, so muss es eine Potenz von $x_1 - \alpha$, etwa $(x_1 - \alpha)^\varrho$ der Art geben, dass:

$$L_\lambda = (x_1 - \alpha)^\varrho l \quad \text{und} \quad l(x, \alpha) \neq 0$$

ist. Da ferner f_0 und f_1 nur von einem Parameter abhängen, so gilt das Gleiche für χ und L_λ. Daraus folgt, dass die Functionaldeterminante von L_λ und einem der f identisch verschwindet:

$$\begin{pmatrix} L_\lambda & f_\mu \\ x_0 & x_1 \end{pmatrix} = 0,$$

also:

$$(x_1 - \alpha)^\varrho \begin{pmatrix} l & f_\mu \\ x_0 & x_1 \end{pmatrix} - \varrho (x_1 - \alpha)^{\varrho - 1} l \frac{\partial f_\mu}{\partial x_0} = 0,$$

$$(x_1 - \alpha) \begin{pmatrix} l & f_\mu \\ x_0 & x_1 \end{pmatrix} = \varrho l \frac{\partial f_\mu}{\partial x_0},$$

$$l(x_0, \alpha) \left(\frac{\partial f_\mu}{\partial x_0}\right)_{x_1 = \alpha} = 0,$$

was unserer Annahme widerspricht. —

Beweis des 2ten Satzes.

Man bestimme zuerst eine rationale Function: $\vartheta(f_0, \ldots, f_{m-2})$ der Art, dass:

$$f_0 = p_0(\vartheta), \quad f_1 = p_1(\vartheta), \ldots, f_{m-2} = p_{m-2}(\vartheta)$$

rational von ϑ abhängen und sodann eine rationale Function:

$$\chi(\vartheta, f_{m-1}),$$

von welcher

$$\vartheta = q_0(\chi), \quad f_{m-1} = q_1(\chi)$$

rational abhängen.

Die Function χ hat dann die beiden verlangten Eigenschaften.

Beweis des 3ten Satzes.

Man bestimme eine rationale Function:

$$\vartheta(f_0, f_1, \ldots, f_{m-1}\, x_{n-1}),$$

von der die f rational abhängen:

$$f_\lambda = p_\lambda(\vartheta, x_{n-1}).$$

Da die f Functionen eines Parameters sind, so kann man eine rationale Function:

$$\chi(p_0, p_1, \ldots, p_{m-1}) = \chi(f_0, f_1, \ldots, f_{m-1})$$

bestimmen, von der die $p = f$ rational abhängen.

§ 2.

Hauptfunction.

Die 4 Variabeln x_0, x_1, x_2, x_3 können 24 Substitutionen unterworfen werden; unter denselben giebt es 12, welche das Differenzenproduct der x constant lassen, ich will sie die geraden Substitutionen nennen und durch S bezeichnen.

Sie lauten:

$$\begin{pmatrix}0&1&2&3\\0&1&2&3\end{pmatrix},$$

$$T_0 = \begin{pmatrix}0&1&2&3\\1&0&3&2\end{pmatrix}, \quad T_1 = \begin{pmatrix}0&1&2&3\\2&3&0&1\end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix}0&1&2&3\\3&2&1&0\end{pmatrix},$$

$$S_1 = \begin{pmatrix}0&1&2&3\\0&2&3&1\end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix}0&1&2&3\\2&1&3&0\end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix}0&1&2&3\\1&3&2&0\end{pmatrix}, \quad S_4 = \begin{pmatrix}0&1&2&3\\1&2&0&3\end{pmatrix},$$

$$S_1^2 = \begin{pmatrix}0&1&2&3\\0&3&1&2\end{pmatrix}, \quad S_2^2 = \begin{pmatrix}0&1&2&3\\3&1&0&2\end{pmatrix}, \quad S_3^2 = \begin{pmatrix}0&1&2&3\\3&0&2&1\end{pmatrix}, \quad S_4^2 = \begin{pmatrix}0&1&2&3\\2&0&1&3\end{pmatrix}.$$

Die erste derselben, die Identität, hat die Periode 1; die 3 folgenden T haben die Periode 2 und die 8 letzten die Periode 3.

Die T bilden mit der Identität zusammen die „ausgezeichnete Gruppe“.

Setzt man S_1 mit S_3 zusammen, so erhält man nach und nach alle geraden Substitutionen; deshalb nennt man S_1, S_2 zwei erzeugende Substitutionen. S_1 und irgend ein T sind gleichfalls 2 erzeugende Substitutionen.

Die rationalen Functionen der x nehmen bei den geraden Substitutionen 12 Werthe an, unter denen auch gleiche vorkommen können. Diejenigen, bei denen alle diese Werthe proportional sind, welche sich also von einer unter ihnen, höchstens um einen numerischen Factor unterscheiden, will ich *Hauptfunctionen* nennen und von ihnen diese 3 Sätze beweisen.

1ter Satz. Ist R eine Hauptfunction, so bleibt R^3 bei allen geraden Substitutionen und R selbst bei denen der ausgezeichneten Gruppe constant.

2ter Satz. Hat eine rationale Function $\vartheta(x_0 \dots x_3)$ diese beiden Eigenschaften:

1. Sie ändert sich bei der Substitution S_1 höchstens um einen constanten Factor,

2. Sie nimmt bei den übrigen geraden Substitutionen nur solche Werthe ϑ_ϱ an, welche lineare Functionen mit numerischen Coefficienten von ϑ sind

$$\vartheta_\varrho = \frac{a_\varrho \vartheta + b_\varrho}{c_\varrho \vartheta + d_\varrho},$$

so ist ϑ eine Hauptfunction.

3ter Satz. Sind die Werthe χ_ϱ, welche eine rationale Function $\chi(x_0 \dots x_3)$ bei den S annimmt, lineare Functionen mit numerischen Coefficienten von χ:

$$\chi_\varrho = \frac{a_\varrho \chi + b_\varrho}{c_\varrho \chi + d_\varrho},$$

so ist χ linear durch eine Hauptfunction ausdrückbar.

Beweis des 1ten Satzes.

Der constante Factor c, den die Hauptfunction R bei einer Substitution mit der Periode λ annimmt, genügt der Formel

$$c^\lambda = 1;$$

R^λ bleibt bei jener Substitution constant.

R^3 bleibt bei den erzeugenden Substitutionen S_1, S_2, also bei allen Substitutionen constant.

R^3 und R^2 bleiben bei den Substitutionen der ausgezeichneten Gruppe constant also auch R.

Beweis des 2^{ten} Satzes.

ϑ ist als rationale Function der Quotient zweier ganzen Functionen; man kann dieselben so wählen, dass sie keinen gemeinsamen Factor besitzen. Setzt man:

$$\vartheta = \frac{\Theta}{\mathsf{H}},$$

so wird:

$$\vartheta_\varrho = \frac{\Theta_\varrho}{\mathsf{H}_\varrho},$$

und die Formel:

$$\vartheta_\varrho = \frac{a_\varrho \vartheta + b_\varrho}{c_\varrho \vartheta + d_\varrho}$$

geht in diese über:

$$\Theta_\varrho(c_\varrho \Theta + d_\varrho \mathsf{H}) = \mathsf{H}_\varrho(a_\varrho \Theta + b_\varrho \mathsf{H}),$$

also:

$$a_\varrho \Theta + b_\varrho \mathsf{H} = C\Theta_\varrho, \qquad c_\varrho \Theta + d_\varrho \mathsf{H} = C\mathsf{H}_\varrho.$$

Hieraus sehen wir zunächst, dass bei der Substitution S_1 sowohl Θ als auch H constante Factoren annehmen, sodann aber auch, dass sowohl je 3 Grössen Θ_ϱ als auch je 3 Grössen H_ϱ durch eine homogene lineare Relation mit numerischen Coefficienten verbunden sind. —

Von diesen Relationen wähle ich diese aus:

$$\alpha\Theta(0\,1\,2\,3) + \beta\Theta(1\,0\,3\,2) + \gamma\Theta(2\,3\,0\,1) = 0$$

und leite aus ihr durch Vertauschung der x die beiden andern ab:

$$\alpha\Theta(1\,0\,3\,2) + \beta\Theta(0\,1\,2\,3) + \gamma\Theta(3\,2\,1\,0) = 0,$$
$$\alpha\Theta(2\,3\,0\,1) + \beta\Theta(3\,2\,1\,0) + \gamma\Theta(0\,1\,2\,3) = 0.$$

Aus den Coefficienten dieser 3 Formeln setzt sich das System zusammen:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & 0 \\ \beta & \alpha & 0 & \gamma \\ \gamma & 0 & \alpha & \beta \end{vmatrix}.$$

Jenachdem nun die 4 dreireihigen Determinanten desselben verschwinden oder nicht, hat man entweder:

$$\begin{vmatrix} \beta & \gamma & 0 \\ \alpha & 0 & \gamma \\ 0 & \alpha & \beta \end{vmatrix} = -2\alpha\beta\gamma = 0$$

oder die Θ sind jenen Determinanten proportional.

In beiden Fällen giebt es unter den 4 Θ's mindestens 2, welche sich nur um einen constanten Factor unterscheiden, d. h. unter den 3 Substitutionen T giebt es mindestens eine, welche Θ nur um einen constanten Factor ändert. Da die erzeugenden Substitutionen S_1 und T

Θ nur um einen constanten Factor ändern, so ist Θ eine Hauptfunction. Ebenso sind H und ϑ Hauptfunctionen.

Beweis des 3ten Satzes.

Ich bezeichne den Werth, welchen die Function χ bei der Substitution S_1 annimmt, mit χ_1; nach Voraussetzung ist χ_1 linear durch χ ausdrückbar:

$$\chi_1 = \frac{a\chi + b}{c\chi + d}. \tag{1}$$

Da die Periode von S_1 die Zahl 3, also endlich ist, so hat die quadratische Gleichung:

$$x = \frac{ax + b}{cx + d}$$

zwei verschiedene Wurzeln α, β. Man kann nunmehr der Formel 1 die Form geben:

$$\frac{\chi_1 - \alpha}{\chi_1 - \beta} = \bar{c}\,\frac{\chi - \alpha}{\chi - \beta},$$

welche, wenn man

$$\frac{\chi - \alpha}{\chi - \beta} = \vartheta$$

setzt, in diese übergeht:

$$\vartheta_1 = \bar{c}\,\vartheta.$$

Die Function ϑ ändert sich bei der Substitution S_1 nur um einen constanten Factor und nimmt bei den übrigen geraden Substitutionen nur Werthe an, die sich linear durch ϑ ausdrücken lassen; sie ist daher eine Hauptfunction.

§ 3.

Resolventen mit einem Parameter.

Von einer Gleichung $f = 0$ mit den Wurzeln $x_0, x_1 \ldots x_{n+1}$ leitet man dadurch andere, ihre Resolventen, ab, dass man beliebige unsymmetrische Functionen φ den $n!$ Substitutionen der x unterwirft. Die verschiedenen Werthe:

$$\varphi_0, \varphi_1 \ldots \varphi_{\varrho-1},$$

welche φ hierbei annimmt; sind Wurzeln einer Gleichung ϱ^{ten} Grades

$$(x - \varphi_0)(x - \varphi_1) \ldots (x - \varphi_{\varrho-1}) = \Phi = 0,$$

deren Coefficienten rational von denen der Originalgleichung f abhängen. Die Gleichung Φ wird Resolvente von f genannt. Ihr Grad ϱ wird stets > 1 sein, da die Function φ, von der wir ausgingen, als unsymmetrisch vorausgesetzt wurde.

Wir wollen nun hier die Definition der Resolvente ein wenig ausdehnen. —

Wir wollen nämlich auf die Function φ nicht alle $n!$ Substitutionen anwenden, sondern nur die Hälfte derselben, nämlich die geraden Substitutionen, welche die Wurzel der Discriminante nicht ändern.

Hierdurch nimmt φ verschiedene Werthe:

$$\varphi_0, \varphi_1 \ldots \varphi_\sigma$$

an, deren Anzahl möglicher Weise $< \varrho$ ist.

Ich will nun die Gleichung σ^{ten} Grades:

$$(x - \varphi_0)(x - \varphi_1) \ldots (x - \varphi_\sigma) = \Psi = 0$$

auch noch als Resolvente von f gelten lassen. Ihre Coefficienten sind rational in den Coefficienten und der Wurzel der Discriminante von f.

Den Grad σ nehme ich wieder > 1 an.

Von den so definirten Resolventen will ich diese 2 Sätze beweisen:

1^{ter} Satz. Diejenigen Resolventen von biquadratischen Gleichungen, in denen nur 1 Parameter vorkommt, haben den Grad 3.

2^{ter} Satz. Eine Gleichung f von höherem als dem 4^{ten} Grade besitzt keine Resolvente mit nur einem Parameter.

Beweis des 1^{ten} Satzes.

Da die Wurzeln φ_λ der Resolvente nur von 1 Parameter abhängen, so giebt es nach dem Lüroth'schen Satze eine rationale Function:

$$(1) \qquad \chi(\varphi_0, \varphi_1, \ldots),$$

von der die φ rational abhängen:

$$(2) \qquad \varphi_\lambda = p_\lambda(\chi).$$

Bei den geraden Substitutionen nimmt χ Werthe χ_λ an, welche nach (1) rational von den φ_λ, also nach (2) rational von χ abhängen. Sie hängen rational, also linear von einander ab und sind demgemäss lineare Functionen einer Hauptfunction ϑ.

Von der letzteren hängen somit die φ_ϱ rational ab.

Die Function ϑ bleibt bei den Substitutionen der ausgezeichneten Gruppe constant und kann, da ϑ^3 bei allen geraden Substitutionen constant bleibt, höchstens 3 Werthe annehmen. Hieraus folgt, dass diejenigen φ_λ, welche durch die Substitutionen

$$T = \begin{pmatrix} i_0 & i_1 & i_2 & i_3 \\ i_1 & i_0 & i_3 & i_2 \end{pmatrix}$$

in einander übergehen, denselben Werth besitzen.

Da je 4 der Grössen φ einander gleich sind, so nimmt φ bei den geraden Substitutionen nur 3 verschiedene Werthe an.

Beweis des 2ten Satzes.

Je 4 Grössen φ_ϱ, welche durch eine Substitution in einander übergehen:

$$T = \begin{pmatrix} i_0 & i_1 & i_2 & i_3 \\ i_1 & i_0 & i_3 & i_2 \end{pmatrix},$$

in welcher $i_0\ i_1\ i_2\ i_3$ irgend 4 der Zahlen $0, 1 \ldots n-1$ bedeuten, haben nach dem vorigen Satze denselben Werth.

Aus den Substitutionen T lassen sich nun, wenn $n > 4$ ist, alle geraden Substitutionen zusammensetzen, mithin haben dann alle φ_λ denselben Werth. —

Erlangen, im December 1886.

Ueber die Transformation der algebraischen Gleichungen durch Covarianten.

(Auszug aus einem Briefe an Hrn. Gordan in Erlangen.)

Von

Francesco Brioschi in Mailand.

. . . Erlauben Sie mir nun einen Satz über Covarianten mitzutheilen, welcher an und für sich wichtig ist und in der Lehre der Transformationen seine Anwendung findet.

Es sei

$$f(x, y) = (a_0 a_1 \dots a_n)(xy)^n$$

eine Form von der Ordnung m und

$$\varphi(x, y) = (c_0 c_1 \dots c_n)(xy)^n$$

eine Covariante von f von der Ordnung n. $f(x, 1) = 0$ haben nur ungleiche Wurzeln $x_0, x_1 \dots x_n$.

Ich führe jetzt die Ausdrücke ein:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= a_0 x_r + a_1,\\
\alpha_2 &= a_0 x_r^2 + 2 a_1 x_r + a_2,\\
\alpha_3 &= a_0 x_r^3 + 3 a_1 x_r^2 + 3 a_2 x_r + a_3,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\alpha_{n-r} &= a_0 x_r^{n-1} + (n-1)\, a_1 x_r^{n-2} \dots a_{n-1},
\end{aligned}$$

wo x_r eine der Wurzeln $x_0, x_1 \dots x_n$ ist.

Es gilt nun der Satz:

Der Werth von

$$\varphi(x, 1)$$

lässt sich aus dem letzten Coefficienten c_n der Covariante $\varphi(x, y)$ dadurch ableiten, dass man darin die Coefficienten $a_0 a_1 \dots a_{n-1} a_n$ durch die $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} 0$ ersetzt.

Bedenkt man ferner, dass man aus obigen Formeln und der identischen Gleichung $f(x, 1) = 0$ die Werthe von $a_0 \ldots a_n$ berechnen kann, so findet man, indem man diese Werthe in eine beliebige Invariante der Form f:

$$j(a_0 a_1 \ldots a_n)$$

einträgt, j als Function der α.

Wir wollen als Beispiel eine Form 5ter Ordnung betrachten. Setzt man:

$$\alpha_4 = a, \quad \alpha_3 = b, \quad \alpha_2 = c, \quad \alpha_1 = d,$$

so hat man für die Covariante:

$$i(x, y) = (f, f)_4$$

2ter Ordnung und 2ten Grades:

$$i(x_\nu, 1) = 2(3b^2 - 4ac),$$

und ebenso für die Covariante 3ten Grades:

$$l(x_\nu, 1) = 2abc - a^2 d - b^3.$$

Dieser Satz lässt sich in der Lehre der Transformationen verwerthen. Ich habe früher den Satz bewiesen (siehe Ann. di Mat., T. XI, 1883, pag. 303), dass die Gleichung

$$f(x, 1) = 0$$

für $n = 5$ durch die Substitution:

$$y = \frac{1}{5} \frac{l(x)}{f'(x)},$$

wo l die obige cubische Covariante ist, in die Gleichung übergeht:

$$\Delta y^5 + T_{12} y^3 + T_{16} y + T_{18} = 0.$$

Hier bedeutet Δ die Discriminante und T_{12}, T_{16}, T_{18} Invarianten von den Graden 12, 16, 18. Sind nun A, B, C, D die Fundamentalinvarianten von f, also von den Graden 4, 8, 12, 18, so hat man:

$$\begin{aligned}
\Delta &= A^2 - 144B,\\
T_{11} &= t_1 AB + t_2 C,\\
T_{12} &= t_3 AC + t_4 B^2,\\
T_{22} &= t_5 D,
\end{aligned}$$

wobei t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 numerische Constanten bedeuten, die man aus der Gleichung in y berechnen kann.

Ersetzt man y durch y_ν, so hat man identisch:

$$y_\nu = \frac{2abc - a^2 d - b^3}{d},$$

und wenn man berücksichtigt, dass die Invarianten A, B, C, D Functionen von a, b, c, d sind, so kann man leicht die numerischen Werthe der t berechnen. Da wir es ferner mit einer identischen Gleichung zu thun haben, so ist die Annahme gestattet, dass einige der Grössen $a, b, c \ldots$ verschwinden, wodurch sich die Rechnung vereinfacht.

Machen wir z. B. die Voraussetzung

$$c = d = 0,$$

so haben wir:

$$y = -\frac{b^3}{a}, \qquad A = 3ab^2,$$

$$3B = a^2(9b^4 - a^3),$$

$$108C = b^2(14a^3b^6 - 3a^6 - 27b^8),$$

$$54D = b^3(9^3b^{12} - 135a^3b^8 - 45a^6b^4 - 5a^9),$$

$$\Delta = a^2(16a^3 - 135b^4).$$

Trägt man diese Werthe ein, so wird:

$$t_1 = -\frac{45}{2}, \qquad t_2 = -540, \qquad t_3 = -\frac{5.81}{4},$$

$$t_4 = -\frac{27}{8}, \qquad t_5 = \frac{5.81}{16}.$$

Dieses Resultat ist zwar bekannt, doch dient es dazu, um die Leichtigkeit der Anwendung unseres Satzes zu zeigen.

Ich glaube dass die Transformation der algebraischen Gleichungen mittelst Covarianten wichtige Resultate herbeiführen kann und dass die Sätze, die ich Ihnen mittheilte, die Anwendung der Methode befördern können.

Ich will noch eine andere Anwendung des obigen Invariantensatzes geben. Bezeichnet man mit ∇ die Discriminante der Gleichung

$$\frac{f(x)}{x - x_\nu} = 0,$$

so hat man bis auf einen numerischen Coefficienten:

$$D = \alpha_{n-1}^2 \nabla.$$

Drückt man jetzt ∇ durch die Grössen $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_{n-1}$ aus, so kann man auf diese Weise Δ berechnen als Function der Invarianten der Form n^{ten} Grades, sobald man es durch die Invarianten der Form $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades ausgedrückt hat.

Im obigen Falle haben die Invarianten g_2, g_3 der biquadratischen Gleichung die Werthe:

$$g_2 = \frac{5}{6}(6a - 15bd + 10c^2),$$

$$g_3 = \frac{25}{16.27}(144ac + 180bcd - 108b^2 - 135ad^2 - 80c^3),$$

$(a_0 = 1)$. Für $c = d = 0$ hat man:

$$\nabla = g_2^3 - 27g_3^2 = \frac{125}{16}(16a^3 - 135b^4)$$

und demnach:

$$\Delta = a^2(16a^3 - 135b^4),$$

wie oben.

Mailand, im December 1886.

Ueber die Zurückführung der Cayley'schen Operation Ω auf gewöhnliche Polar-Operationen.

Von

ALFREDO CAPELLI in Neapel.

I.

1. Bildet man mit n Reihen von Veränderlichen

$$\begin{array}{l} x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n, \\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n, \\ z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n \end{array}$$

die wir manchmal, der Kürze wegen, mit einem einzigen Buchstaben $x, y, z, \ldots, u$, resp. bezeichnen werden, die Cayley'sche Operation

$$\Omega = \sum \pm \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial y_2} \cdots \frac{\partial}{\partial u_n},$$

und bezeichnet man mit

$$H = (x\,y\,z \cdots u) \cdot \Omega \tag{1}$$

eine Operation, die sich von der vorigen nur dadurch unterscheidet, dass das Resultat der Operation Ω noch mit der Determinante der Veränderlichen multiplicirt wird, so lässt sich die Operation H, wie schon bewiesen*), immer ersetzen durch ein Aggregat der n^2 elementaren Polar-Operationen

$$\begin{array}{l} D_{xx},\ D_{xy},\ \ldots,\ D_{xu}, \\ D_{yx},\ D_{yy},\ \ldots,\ D_{yu}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ D_{ux},\ D_{uy},\ \ldots,\ D_{uu}, \end{array} \tag{2}$$

wo im Allgemeinen

$$D_{pq} \equiv q_1 \frac{\partial}{\partial p_1} + q_2 \frac{\partial}{\partial p_2} + \cdots + q_n \frac{\partial}{\partial p_n}, \quad (p, q \equiv x, y, \ldots).$$

---

*) Fondamenti di una teoria generale delle forme algebriche. § III. (Memorie della R^a. Accademia dei Lincei. Serie III. Vol XII. 1882.)

Die effective Darstellung der Operation H durch die Operationen (2) hatte ich bisher nur für den Fall $n=2$ und $n=3$ durch directe Berechnung gefunden.*) Letzter Zeit ist es mir aber gelungen für die allgemeine Operation H einen sehr einfachen Determinantenausdruck zu erreichen. Es wird nämlich im Folgenden bewiesen, dass:

$$(3)\qquad H=\begin{vmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xz} & \cdot\cdot & D_{xu} \\ D_{yx} & 1+D_{yy} & D_{yz} & \cdot\cdot & D_{yu} \\ D_{zx} & D_{zy} & 2+D_{zz} & \cdot\cdot & D_{zu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ D_{ux} & D_{uy} & D_{uz} & \cdot\cdot & (n-1)+D_{uu} \end{vmatrix}.$$

In jedem Gliede der Entwickelung der Determinante rechts müssen die n Factoren, als operative Factoren aufgefasst, mit derselben Reihenfolge nach einander ausgeübt werden, wie sie in den von rechts nach links auf einander folgenden Verticalreihen der Determinante resp. vorkommen. So wird man z. B. entwickeln für $n=2$:

$$H=\begin{vmatrix} D_{xx} & D_{xy} \\ D_{yx} & 1+D_{yy} \end{vmatrix}=D_{xx}(1+D_{yy})-D_{yx}D_{xy}=D_{xx}+D_{xx}D_{yy}-D_{yx}D_{xy}$$

und für $n=3$:

$$\begin{aligned} H = {} & D_{xx}(1+D_{yy})(2+D_{zz})+D_{zx}D_{xy}D_{yz}+D_{yx}D_{zy}D_{xz} \\ & -D_{xx}D_{zy}D_{yz}-D_{zx}(1+D_{yy})D_{xz}-D_{yx}D_{xy}(2+D_{zz}). \end{aligned}$$

2. Indem man n neue von einander und von den vorigen unabhängige Variabelreihen

$$\begin{array}{l} \xi_1,\ \xi_2,\cdots,\ \xi_n, \\ \eta_1,\ \eta_2,\cdots,\ \eta_n, \\ \zeta_1,\ \zeta_2,\cdots,\ \zeta_n, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \omega_1,\ \omega_2,\cdots,\ \omega_n \end{array}$$

zu Hülfe zieht, die man nachher wieder eliminiren wird, kann man zunächst schreiben

$$\begin{aligned} H &= D_{\omega u}\cdots D_{\zeta z}D_{\eta y}D_{\xi x}\left\{(\eta\cdots\omega)\cdot\sum\pm\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial y_2}\cdots\frac{\partial}{\partial u_n}\right\} \\ &= D_{\omega u}\cdots D_{\zeta z}D_{\eta y}D_{\xi x}\cdot\sum\pm D_{x\xi}D_{y\eta}D_{z\zeta}\cdots D_{u\omega}, \end{aligned}$$

insofern, was ja immer erlaubt ist, die Functionen auf die man die Operation H ausüben will, als von den Hülfsvariabeln $\xi,\eta,\cdots,\omega$ ganz unabhängig angesehen werden.

*) Ibid. pag. 27.

Es handelt sich nunmehr darum, die Hülfsreihen $\xi, \eta, \cdots, \omega$ mittelst der Fundamentalformeln:

$$D_{\nu q} D_{p\nu} - D_{p\nu} D_{\nu q} = D_{pq},$$
$$D_{qp} D_{pq} - D_{pq} D_{qp} = D_{pp} - D_{qq}$$

zu eliminiren, ohne doch die Form von H als Aggregat von elementaren Polaroperationen zu beeinträchtigen.

3. Zu diesem Zwecke schreiben wir zuerst, indem wir uns, der Einfachheit halber, auf vier Variabelreihen x, y, z, t beschränken:

$$H = D_{\tau t} D_{\zeta z} D_{\eta y} D_{\xi x} \begin{vmatrix} D_{x\tau} & D_{x\zeta} & D_{x\eta} & D_{x\xi} \\ D_{y\tau} & D_{y\zeta} & D_{y\eta} & D_{y\xi} \\ D_{z\tau} & D_{z\zeta} & D_{z\eta} & D_{z\xi} \\ D_{t\tau} & D_{t\zeta} & D_{t\eta} & D_{t\xi} \end{vmatrix}$$

und denken uns dabei, dass von den in der Determinante rechts enthaltenen Elementaroperationen zuerst ausgeführt werden müssen die der letzten Verticalreihe, dann die der vorletzten u. s. f.

Vertauscht man zuerst die Operation $D_{\xi x}$ mit den nächstfolgenden Elementaroperationen der ersten Verticalreihe, und führt man der Kürze wegen die Bezeichnungen ein

$$K_1 = \begin{vmatrix} D_{y\xi} & D_{y\zeta} & D_{y\eta} \\ D_{z\xi} & D_{z\zeta} & D_{z\eta} \\ D_{t\xi} & D_{t\zeta} & D_{t\eta} \end{vmatrix}, \quad K_2 = \begin{vmatrix} D_{y\tau} & D_{y\xi} & D_{y\eta} \\ D_{z\tau} & D_{z\xi} & D_{z\eta} \\ D_{t\tau} & D_{t\xi} & D_{t\eta} \end{vmatrix}, \quad K_3 = \begin{vmatrix} D_{y\tau} & D_{y\zeta} & D_{y\xi} \\ D_{z\tau} & D_{z\zeta} & D_{z\xi} \\ D_{t\tau} & D_{t\zeta} & D_{t\xi} \end{vmatrix},$$

so erhält man

$$H = D_{\tau t} D_{\zeta z} D_{\eta y} \begin{vmatrix} D_{x\tau} & D_{\xi x}\cdot D_{x\zeta} & D_{x\eta} & D_{x\xi} \\ D_{y\tau} & D_{\xi x}\cdot D_{y\zeta} & D_{y\eta} & D_{y\xi} \\ D_{z\tau} & D_{\xi x}\cdot D_{z\zeta} & D_{z\eta} & D_{z\xi} \\ D_{t\tau} & D_{\xi x}\cdot D_{t\zeta} & D_{t\eta} & D_{t\xi} \end{vmatrix} - D_{\tau t} D_{\zeta z} D_{\eta y}\cdot D_{\xi\tau}\cdot K_1.$$

Wird nun die Operation $D_{\xi x}$ mit den Elementaroperationen der zweiten Verticalreihe vertauscht, so erhält man weiter:

$$H = D_{\tau t} D_{\zeta z} D_{\eta y} \begin{vmatrix} D_{x\tau} & D_{x\zeta} & D_{\xi x}\cdot D_{x\eta} & D_{x\xi} \\ D_{y\tau} & D_{y\zeta} & D_{\xi x}\cdot D_{y\eta} & D_{y\xi} \\ D_{z\tau} & D_{z\zeta} & D_{\xi x}\cdot D_{z\eta} & D_{z\xi} \\ D_{t\tau} & D_{t\zeta} & D_{\xi x}\cdot D_{t\eta} & D_{t\xi} \end{vmatrix}$$
$$- D_{\tau t} D_{\zeta z} D_{\eta y}\cdot D_{\xi\tau}\cdot K_1 - D_{\tau t} D_{\zeta z} D_{\eta y}\cdot D_{\xi\zeta}\cdot K_2,$$

und vertauscht man zuletzt die Operation $D_{\xi x}$ mit denen der vorletzten Verticalreihe, so ist das Resultat folgendes:

$$H = D_{\tau t} D_{\zeta z} D_{\eta y} \begin{vmatrix} D_{x\tau} & D_{x\zeta} & D_{x\eta} & D_{\xi x} \cdot D_{x\xi} \\ D_{y\tau} & D_{y\zeta} & D_{y\eta} & D_{\xi x} \cdot D_{y\xi} \\ D_{z\tau} & D_{z\zeta} & D_{z\eta} & D_{\xi x} \cdot D_{z\xi} \\ D_{t\tau} & D_{t\zeta} & D_{t\eta} & D_{\xi x} \cdot D_{t\xi} \end{vmatrix}$$

$$- D_{\tau t} D_{\zeta z} D_{\eta y} [D_{\xi\tau} K_1 + D_{\xi\zeta} K_2 + D_{\xi\eta} K_3].$$

Die noch übrig bleibende Vertauschung von $D_{\xi x}$ mit den Operationen der letzten Verticalreihe gestaltet sich nun ganz anders als die bisher gemachten. Man hat nämlich

$$\begin{aligned} D_{\xi x} \cdot D_{x\xi} &= D_{xx} - D_{\xi\xi} + D_{x\xi} \cdot D_{\xi x}, \\ D_{\xi x} \cdot D_{y\xi} &= D_{yx} + D_{y\xi} \cdot D_{\xi x}, \\ D_{\xi x} \cdot D_{z\xi} &= D_{zx} + D_{z\xi} \cdot D_{\xi x}, \\ D_{\xi x} \cdot D_{t\xi} &= D_{tx} + D_{t\xi} \cdot D_{\xi x}. \end{aligned}$$

Man braucht aber nur von allen Operationen rechts nur die ersten beizubehalten, indem die Operation H auf Functionen ausgeübt werden soll, die von den ξ unabhängig sind, und folglich von den Elementaroperationen des Typus $D_{\xi p}$ annullirt werden. Man hat also:

$$H = D_{\tau t} D_{\zeta z} D_{\eta y} \begin{vmatrix} D_{x\tau} & D_{x\zeta} & D_{x\eta} & D_{xx} \\ D_{y\tau} & D_{y\zeta} & D_{y\eta} & D_{yx} \\ D_{z\tau} & D_{z\zeta} & D_{z\eta} & D_{zx} \\ D_{t\tau} & D_{t\zeta} & D_{t\eta} & D_{tx} \end{vmatrix}$$

$$- D_{\tau t} D_{\zeta z} D_{\eta y} [D_{\xi\tau} K_1 + D_{\xi\zeta} K_2 + D_{\xi\eta} K_3].$$

Da aber, wie leicht zu erkennen:

$$D_{\xi\tau} K_1 = D_{\xi\zeta} K_2 = D_{\xi\eta} K_3 = \begin{vmatrix} D_{y\tau} & D_{y\zeta} & D_{y\eta} \\ D_{z\tau} & D_{z\zeta} & D_{z\eta} \\ D_{t\tau} & D_{t\zeta} & D_{t\eta} \end{vmatrix},$$

so schliesst man endlich:

$$H = D_{\tau t} D_{\zeta z} D_{\eta y} \begin{vmatrix} D_{x\tau} & D_{x\zeta} & D_{x\eta} & 3 + D_{xx} \\ D_{y\tau} & D_{y\zeta} & D_{y\eta} & D_{yx} \\ D_{z\tau} & D_{z\zeta} & D_{z\eta} & D_{zx} \\ D_{t\tau} & D_{t\zeta} & D_{t\eta} & D_{tx} \end{vmatrix}$$

Will man nunmehr die zweite Hülfsreihe eliminiren, so braucht man nur die Operation $D_{\eta y}$ auf ganz ähnliche Weise successive mit den Elementaroperationen der drei ersten Verticalreihen zu vertauschen, und man wird nach einem ganz ähnlichen Verfahren erhalten:

$$H = D_{\tau t} D_{\zeta z} \begin{vmatrix} D_{x\tau} & D_{x\zeta} & D_{xy} & 3 + D_{xx} \\ D_{y\tau} & D_{y\zeta} & 2 + D_{yy} & D_{yx} \\ D_{z\tau} & D_{z\zeta} & D_{zy} & D_{zx} \\ D_{t\tau} & D_{t\zeta} & D_{ty} & D_{tx} \end{vmatrix}.$$

Vertauscht man zuletzt, ganz wie oben, die Operation $D_{\zeta z}$ successive mit den Elementaroperationen der zwei ersten Verticalreihen, so gelangt man zum schliesslichen Resultat:

$$H = D_{\tau t} \cdot \begin{vmatrix} D_{x\tau} & D_{xz} & D_{xy} & 3+D_{xx} \\ D_{y\tau} & D_{yz} & 2+D_{yy} & D_{yx} \\ D_{z\tau} & 1+D_{zz} & D_{zy} & D_{zx} \\ D_{t\tau} & D_{tz} & D_{ty} & D_{tx} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} D_{xt} & D_{xz} & D_{xy} & 3+D_{xx} \\ D_{yt} & D_{yz} & 2+D_{yy} & D_{yx} \\ D_{zt} & 1+D_{zz} & D_{zy} & D_{zx} \\ D_{tt} & D_{tz} & D_{ty} & D_{tx} \end{vmatrix}.$$

Somit ist der Beweis des von uns ausgesprochenen Satzes erledigt, indem man von letzter Determinantenform durch einfache Permutationen der x, y, z, t untereinander, welche die im Bezug auf x, y, z, t symmetrische Operation H ungeändert lassen, zu der unserem Satze entsprechenden Form

$$H = \begin{vmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xz} & D_{xt} \\ D_{yx} & 1+D_{yy} & D_{yz} & D_{yt} \\ D_{zx} & D_{zy} & 2+D_{zz} & D_{zt} \\ D_{tx} & D_{ty} & D_{tz} & 3+D_{tt} \end{vmatrix}$$

unmittelbar übergehen kann.

II.

4. Schreibt man den im vorigen Paragraphen gefundenen Determinantenausdruck von H wie folgt:

$$(3') \qquad \begin{vmatrix} (n-1)+D_{uu} & \cdots & D_{zu} & D_{yu} & D_{xu} \\ . & \cdots & . & . & . \\ D_{uz} & \cdots & 2+D_{zz} & D_{yz} & D_{xz} \\ D_{uy} & \cdots & D_{zy} & 1+D_{yy} & D_{xy} \\ D_{ux} & \cdots & D_{zx} & D_{yx} & D_{xx} \end{vmatrix}$$

und versucht man die Determinante nach derselben Anordnung der Verticalreihen zu entwickeln, wie es schon erklärt worden ist, so erhält man einen, nur dem Scheine nach, von dem vorigen verschiedenen Ausdruck. So würde man z. B., für den Fall von drei Variabelreihen,

$$\begin{vmatrix} 2+D_{zz} & D_{yz} & D_{xz} \\ D_{zy} & 1+D_{yy} & D_{xy} \\ D_{zx} & D_{yx} & D_{xx} \end{vmatrix}$$

$$= (2+D_{zz})(1+D_{yy})D_{xx} + D_{zx}D_{yz}D_{xy} + D_{zy}D_{yx}D_{xz}$$
$$- D_{zy}D_{yz}D_{xx} - D_{zx}(1+D_{yy})D_{xz} - (2+D_{zz})D_{yx}D_{xy}$$

erhalten. Dieser Ausdruck stimmt mit dem oben gefundenen in allen Gliedern überein mit Ausnahme des Theiles

$$D_{zx} D_{yz} D_{xy} + D_{zy} D_{yx} D_{xz},$$

an dessen Platze dort die Anordnung

$$D_{zx} D_{xy} D_{yz} + D_{yx} D_{zy} D_{xz}$$

vorhanden war. Da aber, wie man leicht nachweisen kann,

$$D_{zx} D_{yz} D_{xy} + D_{zy} D_{yx} D_{xz} = D_{zx} D_{xy} D_{yz} + D_{yx} D_{zy} D_{xz},$$

so schliesst man, für den betrachteten Fall, dass der Determinantenausdruck von H auch auf letztere Weise entwickelt werden darf.

5. Um das Uebereinstimmen der Determinantenausdrücke (3) und (3′) mit einander im Allgemeinen zu beweisen, gehen wir von dem Ausdrucke

$$H = D_{\zeta z} D_{\eta y} D_{\xi x} \begin{vmatrix} D_{\tau t} \cdot D_{t\xi} & D_{z\xi} & D_{y\xi} & D_{x\xi} \\ D_{\tau t} \cdot D_{t\eta} & D_{z\eta} & D_{y\eta} & D_{x\eta} \\ D_{\tau t} \cdot D_{t\zeta} & D_{z\zeta} & D_{y\zeta} & D_{x\zeta} \\ D_{\tau t} \cdot D_{t\tau} & D_{z\tau} & D_{y\tau} & D_{x\tau} \end{vmatrix}$$

aus. Vertauscht man die zwei Elementaroperationen in jedem Gliede der ersten Verticalreihe mit einander, so erhält man:

$$H = D_{\zeta z} D_{\eta y} D_{\xi x} \begin{vmatrix} D_{t\xi} & D_{\tau t} \cdot D_{z\xi} & D_{y\xi} & D_{x\xi} \\ D_{t\eta} & D_{\tau t} \cdot D_{z\eta} & D_{y\eta} & D_{x\eta} \\ D_{t\zeta} & D_{\tau t} \cdot D_{z\zeta} & D_{y\zeta} & D_{x\zeta} \\ D_{t\tau} & D_{\tau t} \cdot D_{z\tau} & D_{y\tau} & D_{x\tau} \end{vmatrix}$$

$$+ D_{\zeta z} D_{\eta y} D_{\xi x} \begin{vmatrix} -D_{\tau\xi} & D_{z\xi} & D_{y\xi} & D_{x\xi} \\ -D_{\tau\eta} & D_{z\eta} & D_{y\eta} & D_{x\eta} \\ -D_{\tau\zeta} & D_{z\zeta} & D_{y\zeta} & D_{x\zeta} \\ -D_{\tau\tau} + D_{tt} & D_{z\tau} & D_{y\tau} & D_{x\tau} \end{vmatrix}.$$

Man findet weiter, indem man die Operation $D_{\tau t}$ in der ersten Determinante rechts successive mit allen Elementaroperationen der drei letzten Verticalreihen vertauscht:

$$\begin{vmatrix} D_{t\xi} & D_{\tau t} \cdot D_{z\xi} & D_{y\xi} & D_{x\xi} \\ D_{t\eta} & D_{\tau t} \cdot D_{z\eta} & D_{y\eta} & D_{x\eta} \\ D_{t\zeta} & D_{\tau t} \cdot D_{z\zeta} & D_{y\zeta} & D_{x\zeta} \\ D_{t\tau} & D_{\tau t} \cdot D_{z\tau} & D_{y\tau} & D_{x\tau} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} D_{t\xi} & D_{z\xi} & D_{y\xi} & D_{x\xi} \\ D_{t\eta} & D_{z\eta} & D_{y\eta} & D_{x\eta} \\ D_{t\zeta} & D_{z\zeta} & D_{y\zeta} & D_{x\zeta} \\ 0 & D_{zt} & D_{yt} & D_{xt} \end{vmatrix}.$$

Folglich kann man schreiben:

$$H = D_{\zeta s} D_{\eta y} D_{\xi x} \begin{vmatrix} D_{t\xi} & D_{s\xi} & D_{y\xi} & D_{x\xi} \\ D_{t\eta} & D_{s\eta} & D_{y\eta} & D_{x\eta} \\ D_{t\zeta} & D_{s\zeta} & D_{y\zeta} & D_{x\zeta} \\ D_{tt} & D_{st} & D_{yt} & D_{xt} \end{vmatrix}$$

$$+ D_{\zeta s} D_{\eta y} D_{\xi x} \begin{vmatrix} -D_{\tau\xi} & D_{s\xi} & D_{y\xi} & D_{x\xi} \\ -D_{\tau\eta} & D_{s\eta} & D_{y\eta} & D_{x\eta} \\ -D_{\tau\zeta} & D_{s\zeta} & D_{y\zeta} & D_{x\zeta} \\ -D_{\tau\tau} & D_{s\tau} & D_{y\tau} & D_{x\tau} \end{vmatrix}.$$

Es ist aber, insofern man die Operationen nur auf Functionen anwendet die von der Variabelreihe τ unabhängig sind:

$$\begin{vmatrix} -D_{\tau\xi} & D_{s\xi} & D_{y\xi} & D_{x\xi} \\ -D_{\tau\eta} & D_{s\eta} & D_{y\eta} & D_{x\eta} \\ -D_{\tau\zeta} & D_{s\zeta} & D_{y\zeta} & D_{x\zeta} \\ -D_{\tau\tau} & D_{s\tau} & D_{y\tau} & D_{x\tau} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -D_{\tau\xi} & D_{s\xi} & D_{y\xi} & D_{x\xi} \\ -D_{\tau\eta} & D_{s\eta} & D_{y\eta} & D_{x\eta} \\ -D_{\tau\zeta} & D_{s\zeta} & D_{y\zeta} & D_{x\zeta} \\ 0 & D_{s\tau} & D_{y\tau} & D_{x\tau} \end{vmatrix}$$

$$= -3 \begin{vmatrix} D_{s\xi} & D_{y\xi} & D_{x\xi} \\ D_{s\eta} & D_{y\eta} & D_{x\eta} \\ D_{s\zeta} & D_{y\zeta} & D_{x\zeta} \end{vmatrix},$$

wie aus den Gleichheiten

$$\begin{vmatrix} -D_{\tau\xi} & D_{y\xi} & D_{x\xi} \\ -D_{\tau\eta} & D_{y\eta} & D_{x\eta} \\ -D_{\tau\zeta} & D_{y\zeta} & D_{x\zeta} \end{vmatrix} \cdot D_{s\tau} = \begin{vmatrix} D_{\tau\xi} & D_{s\xi} & D_{x\xi} \\ D_{\tau\eta} & D_{s\eta} & D_{x\eta} \\ D_{\tau\zeta} & D_{s\zeta} & D_{x\zeta} \end{vmatrix} \cdot D_{y\tau}$$

$$= \begin{vmatrix} -D_{\tau\xi} & D_{s\xi} & D_{y\xi} \\ -D_{\tau\eta} & D_{s\eta} & D_{y\eta} \\ -D_{\tau\zeta} & D_{s\zeta} & D_{y\zeta} \end{vmatrix} \cdot D_{x\tau} = - \begin{vmatrix} D_{s\xi} & D_{y\xi} & D_{x\xi} \\ D_{s\eta} & D_{y\eta} & D_{x\eta} \\ D_{s\zeta} & D_{y\zeta} & D_{x\zeta} \end{vmatrix}$$

unmittelbar folgt.

Man schliesst also:

$$H = D_{\zeta s} D_{\eta y} D_{\xi x} \begin{vmatrix} D_{t\xi} & D_{s\xi} & D_{y\xi} & D_{x\xi} \\ D_{t\eta} & D_{s\eta} & D_{y\eta} & D_{x\eta} \\ D_{t\zeta} & D_{s\zeta} & D_{y\zeta} & D_{x\zeta} \\ 3 + D_{tt} & D_{st} & D_{yt} & D_{xt} \end{vmatrix}.$$

5. Geht man jetzt dazu über, die zweite Variabelreihe ξ nach ganz ähnlichem Verfahren zu eliminiren, so findet man zuerst:

$$H = D_{\eta y} D_{\xi x} \begin{vmatrix} D_{t\xi} & D_{z\xi} & D_{y\xi} & D_{x\xi} \\ D_{t\eta} & D_{z\eta} & D_{y\eta} & D_{x\eta} \\ D_{tz} & D_{zz} & D_{yz} & D_{xz} \\ 3 + D_{tt} & D_{zt} & D_{yt} & D_{xt} \end{vmatrix}$$

$$+ D_{\eta y} D_{\xi x} \begin{vmatrix} D_{t\xi} & -D_{\zeta\xi} & D_{y\xi} & D_{x\xi} \\ D_{t\eta} & -D_{\zeta\eta} & D_{y\eta} & D_{x\eta} \\ D_{t\zeta} & -D_{\zeta\zeta} & D_{y\zeta} & D_{x\zeta} \\ 3 + D_{tt} & -D_{\zeta t} & D_{yt} & D_{xt} \end{vmatrix}.$$

Bemerkt man weiter, dass die zweite Determinante rechts sich auch folgendermassen schreiben lässt:

$$\begin{vmatrix} D_{t\xi} & -D_{\zeta\xi} & D_{y\xi} & D_{x\xi} \\ D_{t\eta} & -D_{\zeta\eta} & D_{y\eta} & D_{x\eta} \\ 0 & 0 & D_{y\zeta} & D_{x\zeta} \\ 3 + D_{tt} & -D_{\zeta t} & D_{yt} & D_{xt} \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} D_{t\xi} & D_{y\xi} & D_{x\xi} \\ D_{t\eta} & D_{y\eta} & D_{x\eta} \\ 3 + D_{tt} & D_{yt} & D_{xt} \end{vmatrix},$$

so schliesst man endlich

$$H = D_{\eta y} D_{\xi x} \begin{vmatrix} D_{t\xi} & D_{z\xi} & D_{y\xi} & D_{x\xi} \\ D_{t\eta} & D_{z\eta} & D_{y\eta} & D_{x\eta} \\ D_{tz} & 2 + D_{zz} & D_{yz} & D_{xz} \\ 3 + D_{tt} & D_{zt} & D_{yt} & D_{xt} \end{vmatrix}$$

u. s. f.

Neapel, December 1886.

Ueber die totalen algebraischen Differentialausdrücke.

Von

M. Noether in Erlangen.

Herr E. Picard hat vor einiger Zeit für algebraische Flächen

$$F(x, y, z) = 0$$

ein neues Forschungsgebiet betreten, indem er die Integrale von zu F gehörigen totalen Differentialen, nämlich von integrablen Ausdrücken der Form

$$Pdx + Qdy,$$

in welchen P und Q rationale Functionen der Grössen x, y, z sind, zwischen denen die Gleichung $F(x, y, z) = 0$ besteht, der Untersuchung unterwarf*). Seine unten angeführte Abhandlung beschäftigt sich in ihren beiden ersten Theilen mit der Bedingung der *Integrabilität* dieses Ausdrucks und mit den Bedingungen, dass das Integral für *alle* Punkte der Fläche *endliche* Werthe habe. Diese Bedingungen können für *nicht-specielle* Flächen $F = 0$ nicht erfüllt werden**), aber sie gestatten, für eine speciell vorgelegte Fläche die Frage nach der Existenz solcher Integrale erster Gattung zu entscheiden.

Die schwierige Frage nach *allen* Flächenclassen, welche Integrale erster Gattung zulassen, wird in der genannten Abhandlung nicht berührt. Indessen kann man sehr leicht hierher gehörige Flächen anführen, welche *ein* solches Integral besitzen***); und ferner gehört hierher die interessante Classe von Flächen, deren Coordinaten sich

---

*) In den C. R. der Pariser Acad. vom 1. und 29. Dec. 1884, und eingehend in der Abhandlung: „Sur les intégrales de différentielles totales algébriques de première espèce", Liouv. Journ. de Mathem., Sér. IV, t. I, 1885.

**) Dieser Umstand war mir, wie zu bemerken erlaubt sei, schon seit 1868 bekannt und wurde damals für mich die Veranlassung, diese Art von Integralen fallen zu lassen und mich den einer algebraischen Fläche $F = 0$ zugehörigen Doppelintegralen zuzuwenden.

***) Vgl. z. B. Poincaré in den C. R. vom 29. Dec. 1884.

eindeutig, und — bis auf Periodenvielfache — eindeutig umkehrbar, als vierfach periodische Functionen zweier Parameter ausdrücken lassen*), Flächen, für welche diese beiden Parameter von einander unabhängige endliche Integrale sind. Diese Classe zeigt schon die Wichtigkeit der Untersuchung des Herrn Picard; seine Abhandlung beschäftigt sich daher im 3ten Theile eingehend mit solchen Flächen, welche (in dem von mir in diesen Annalen Bde. II und VIII**) definirten Sinne) das „Flächengeschlecht" 1 haben und zwei endliche Integrale besitzen, und welche, wie das Umkehrproblem der zugehörigen Differentialausdrücke zeigt, auf jene Flächenclasse zurückführen.

Auch für weitere Anwendungen, insbesondere Differentialgleichungen — von denen der 4te Theil jener Abhandlung ein Beispiel giebt — kann die neue Theorie von Bedeutung werden. —

Indessen ist die von Hrn. Picard gegebene Grundlegung dafür noch nicht genügend allgemein. Er führt für die Singularitäten der Flächen F eine Reihe von Annahmen ein, welche das Gebiet der hier zu behandelnden Flächen allzusehr einschränken, und welche auch für die von ihm benutzte Methode der *Reihenentwicklung* nicht durchaus erforderlich sind. Am einfachsten sieht man dies durch Anwendung einer anderen Methode, der auch sonst von mir vielfach benutzten Methode der *rational-eindeutigen Transformation* der Fläche F, durch welche sich unmittelbar der volle Grad der Allgemeinheit ergiebt, welchen man der auf F bezüglichen Theorie ertheilen darf. Dies rührt nach meiner Auffassung daher, dass die Reihenentwicklungen selbst erst, offen oder verdeckt, als aus rationaler Transformation hervorgegangen anzusehen sind — wovon auch die Beispiele in der Schlussnummer 26. meines vorliegenden Aufsatzes wieder zeugen —, und dass gerade der erste Theil dieses doppelten Processes, die Transformation, schon die Resultate liefert.

Die Transformationsmethode hat noch den weiteren Vortheil, die Untersuchung theilweise auf schon bekannte Resultate zurückzuführen, indem sie den Zusammenhang der Picard'schen Betrachtungen im 3ten Theil seiner Arbeit mit den Betrachtungen klarlegt, welche ich in dem o. c. Aufsatze im VIII. Bd. dieser Annalen über die zu F „adjungirten Flächen φ_F" und die „ausgezeichneten Curven" von F angestellt habe.

Aus diesen Gründen halte ich es für angezeigt, im Folgenden die

*) Für diese Flächen vgl. Schleiermacher, „Ueber Thetafunctionen mit zwei Variabeln", Ber. der Erlanger Soc. v. 15. Febr. 1886.

**) In meinen Abhandlungen: „Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde von beliebig vielen Dimensionen", Math. Ann. II, und „Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde, 2ter Aufsatz", Math. Ann. VIII.

Resultate der drei ersten Theile der Picard'schen Abhandlung, aber in der allgemeinst zulässigen Form und nach der Transformationsmethode, von Neuem abzuleiten*). Der vorliegende Aufsatz soll also nur eine Art von Commentar zu jener Abhandlung sein, wesshalb ich es auch hier unterlasse, auf die einzelnen Abweichungen hinzuweisen. Ich will nur erwähnen, dass ich die Untersuchung für die Fläche und ihre Differentiale meistens in der homogenen Form der Ausdrücke führe**); dass ich die Integrale 1^{ter} Gattung von den übrigen nicht getrennt behandle; und dass ich die Bedingungen der Endlichkeit der Integrale in den mehrfachen Elementen der Fläche nicht, wie es in der Abhandlung geschieht, aus der Existenzbedingung ((5), Nr. 1 dieses Aufsatzes) entwickle, sondern diese beiden Arten von Bedingungen möglichst trenne (vgl. auch Nr. 17 dieses Aufsatzes). Im § 8 zeige ich von *allen* Flächen vom Flächengeschlecht 1, welche zwei unabhängige endliche Integrale u, u' besitzen, nur die Eigenschaft, dass ihre Coordinaten sich als *eindeutige* Functionen der u, u', mit rationalem Charakter für alle endlichen Werthe dieser Grössen, darstellen lassen, ohne auf die einfache Folgerung (für welche ich auf Hrn. Picard's Abhandlung verweisen kann) einzugehen, dass diese Ausdrücke 4-fach periodisch werden. § 8, Nr. 26 enthält einige Beispiele zu den Singularitäten, welche bei solchen eindeutigen Functionen von zwei Variablen vorkommen können.

§ 1.

Form der Differentialausdrücke.

1. Die Gleichung einer Fläche n^{ter} Ordnung

$$(1) \qquad F(x, y, z) = 0$$

werde zunächst in nicht-homogenen Coordinaten zu Grunde gelegt. Um keine der Variablen auszuzeichnen, werde ein zugehöriger totaler Differentialausdruck sogleich in der Form angenommen:

$$du = K dx + L dy + M dz,$$

unter der Bedingung

$$(2) \qquad F_x' dx + F_y' dy + F_z' dz = 0,$$

wo

$$F_x' = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad F_y' = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad F_z' = \frac{\partial F}{\partial z}$$

und wobei K, L, M rationale Functionen von x, y, z bedeuten.

---

*) Einen kurzen Auszug davon habe ich in den Berichten der Erlanger Soc. vom 15. Febr. 1886 mitgetheilt.

**) Ueber diesen Punkt ist auch eine kurze Note von Hrn. Cayley in dem Bull. des sciences math. vom März 1886 erschienen.

Die allgemeinste Form für du ergiebt sich dann zu

$$du = (K + \lambda F_x')\,dx + (L + \lambda F_y')\,dy + (M + \lambda F_z')\,dz,$$

wo λ noch ganz beliebig angenommen werden kann. Wir setzen, unter Einführung von drei beliebigen Grössen k, l, m:

$$\lambda = -\frac{kK + lL + mM}{kF_x' + lF_y' + mF_z'},$$

und erhalten, mit den Bezeichnungen

(3) $\quad LF_z' - MF_y' = A', \quad MF_x' - KF_z' = B', \quad KF_y' - LF_x' = C'$

für du die Form:

$$du = \frac{\begin{vmatrix} k & A' & dx \\ l & B' & dy \\ m & C' & dz \end{vmatrix}}{kF_x' + lF_y' + mF_z'}.$$

Für A', B', C' folgt aus (3), da K, L, M noch keiner Bedingung unterworfen waren, nur die Bedingung:

$$A'F_x' + B'F_y' + C'F_z' = 0,$$

welche nur mit Hülfe von (1) erfüllt zu sein braucht.

Setzt man aus A', B', C' einen gemeinsamen Nenner N heraus, so hat man

(4)
$$du = \frac{\begin{vmatrix} k & A & dx \\ l & B & dy \\ m & C & dz \end{vmatrix}}{\mathsf{N}(kF_x' + lF_y' + mF_z')},$$

wo die ganzen Functionen A, B, C so zu bestimmen sind, dass mit Hülfe von $F = 0$ wird

(5)
$$AF_x' + BF_y' + CF_z' = 0.$$

Insbesondere kann man schreiben:

$$du = \frac{B\,dz - C\,dy}{\mathsf{N}\,.\,F_x'} = \frac{C\,dx - A\,dz}{\mathsf{N}\,.\,F_y'} = \frac{A\,dy - B\,dx}{\mathsf{N}\,.\,F_z'};$$

und umgekehrt folgt die Relation (5) aus dem Umstande, dass sich du nothwendig in solche drei Formen muss schreiben lassen, die vermöge (2) aus einander hervorgehen. Weitere Bestimmungen für A, B, C werden in Nr. 3 gegeben werden.

2. Auch für die homogene Gleichungsform einer Fläche n^{ter} Ordnung

(6)
$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

soll die Form eines totalen Differentialausdrucks zunächst unabhängig von der vorhergehenden Entwicklung hergestellt werden. Schreibt man wieder, unter den K_i rationale Functionen von x_1, x_2, x_3, x_4 verstanden,

$$du = \sum_i^{1\ldots 4} K_i\, dx_i,$$

unter der Bedingung

(7)
$$\sum_i^{1\ldots 4} f_i\, dx_i = 0, \quad \text{wo} \quad f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

und unter der weiter zwischen den Differentialen der homogenen Variablen beliebig anzunehmenden linearen Relation

$$\sum \varrho_i\, dx_i = 0,$$

so wird die allgemeinste Form für du zu:

$$du = \sum_i (K_i + \lambda \cdot f_i + \mu \cdot \varrho_i)\, dx_i,$$

wobei λ und μ noch beliebig sind. Wir setzen:

$$\mu = -\frac{\sum K_i x_i}{\sum \varrho_i x_i}, \qquad \lambda = -\frac{\sum k_i (K_i + \mu \varrho_i)}{\sum k_i f_i},$$

wobei die $k_1, \ldots, k_4$ beliebige Grössen vorstellen; so wird

$$du = \frac{\sum_{h,l}^{l>h} Q_{hl}(k_h\, dx_l - k_l\, dx_h)}{\sum \varrho_i x_i \cdot \sum k_i f_i},$$

wobei gesetzt ist:

$$Q_{hl} = (f_h K_l - f_l K_h) \cdot \sum \varrho_i x_i - (f_h \varrho_l - f_l \varrho_h) \cdot \sum K_i x_i.$$

Aber für diese Ausdrücke hat man, vermöge $f \equiv \frac{1}{n} \sum f_i x_i = 0$:

$$Q_{12} x_2 + Q_{13} x_3 + Q_{14} x_4 = 0, \qquad Q_{21} x_1 + Q_{23} x_3 + Q_{24} x_4 = 0,$$
$$Q_{31} x_1 + Q_{32} x_2 + Q_{34} x_4 = 0, \qquad Q_{41} x_1 + Q_{42} x_2 + Q_{43} x_3 = 0;$$

d. h. es müssen vier Functionen A_1', A_2', A_3', A_4' existiren, für welche wird:

(8)
$$\begin{cases} Q_{12} = A_3' x_4 - A_4' x_3, & Q_{13} = A_4' x_2 - A_2' x_4, & Q_{14} = A_2' x_3 - A_3' x_2, \\ Q_{23} = A_1' x_4 - A_4' x_1, & Q_{24} = A_3' x_1 - A_1' x_3, & Q_{34} = A_1' x_2 - A_2' x_1. \end{cases}$$

Hiermit geht du über in

$$du = \frac{\sum \pm k_1 A_2' x_3\, dx_4}{\sum \varrho_i x_i \cdot \sum k_i f_i}.$$

Zwischen den vier Functionen A_i' selbst herrscht noch eine Beziehung. Denn damit der vorstehende Ausdruck von du von den willkürlichen Grössen k_i nur formell abhängig wird, muss neben

$$\sum f_i x_i = 0, \qquad \sum f_i dx_i = 0$$

nothwendig noch die Relation

$$\sum f_i A_i' = 0$$

bestehen. In der That folgt aus drei der Gleichungen (8):

$$x_4 \sum A_i' f_i = A_4' \sum f_i x_i + (Q_{23} f_1 + Q_{31} f_2 + Q_{12} f_3),$$

und neben $\sum f_i x_i = 0$ wird auch das zweite Glied der rechten Seite nach den obigen Werthen der Q_{hi} zu 0.

Bringt man noch die A_i' auf gemeinsamen Nenner und vereinigt diesen mit $\sum \varrho_i x_i$, so nimmt der Differentialausdruck die Form an:

$$(9) \qquad du = \frac{\sum \pm k_1 A_2 x_3 dx_4}{N \cdot \sum k_i f_i},$$

wo $N, A_1, \ldots, A_4$ rationale ganze Functionen der $x_1, \ldots, x_4$ sind, für welche, mit Hülfe von $f = 0$, die Relation zu erfüllen ist:

$$(10) \qquad \sum A_i f_i = 0.$$

Da der Ausdruck du nur von den Verhältnissen der homogenen Coordinaten abhängen kann, so werden, wenn N eine ganze Function von $x_1, \ldots, x_4$ vom Grade ν ist, die $A_1, \ldots, A_4$ ganze Functionen von $x_1, \ldots, x_4$ vom Grade $n + \nu - 3$.

3. Die Entwickelung von Nr. 2 liefert noch weitere Bestimmungen für die Formen der ganzen Functionen A, B, C von x, y, z in Nr. 1, (4).

Setzt man in Nr. 2:

$$\frac{x_1}{x_4} = x, \quad \frac{x_2}{x_4} = y, \quad \frac{x_3}{x_4} = z, \quad f(x_1, \ldots, x_4) = x_4^n \cdot F(x, y, z),$$
$$f_1 = x_4^{n-1} F_x', \quad f_2 = x_4^{n-1} F_y', \quad f_3 = x_4^{n-1} F_z',$$
$$f_4 = x_4^{n-1}(nF - xF_x' - yF_y' - zF_z'),$$

so geht, indem man in der Determinante $\sum \pm k_1 A_2 x_3 dx_4$ von den drei ersten Horizontalreihen die vierte, bez. mit x, y, z multiplicirt, abzieht, der Ausdruck (9) in (4) über, wenn man noch k, l, m für $k_1 - xk_4$, $k_2 - yk_4$, $k_3 - zk_4$ schreibt. Dabei werden, wenn man

$$A_i(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4^{n+\nu-3} \cdot \mathsf{A}_i(x, y, z),$$
$$N(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4^{\nu}\, \mathsf{N}(x, y, z)$$

setzt, A, B, C von der Form:

$$(11) \qquad A = x\mathsf{A}_4 - \mathsf{A}_1, \qquad B = y\mathsf{A}_4 - \mathsf{A}_2, \qquad C = z\mathsf{A}_4 - \mathsf{A}_3,$$

d. h. wenn das N in (4) vom Grade ν ist, so steigen A, B, C auf den Grad $n + \nu - 2$, aber die Glieder $(n + \nu - 2)^{\text{ter}}$ Dimension sind bezüglich von den Formen

$$x\mathsf{A}_4, \quad y\mathsf{A}_4, \quad z\mathsf{A}_4.$$

Auch (10) geht hierdurch in (5) über. —

Es wäre auch leicht, die Formen (11) von A, B, C direct zu ermitteln, ohne erst auf Nr. 2 Bezug zu nehmen; wonach sich dann umgekehrt die Entwicklungen von Nr. 2 einfach ergäben.

Nimmt man zu diesem Zwecke an, dass A, B, C vom Grade $n + \nu + \varrho - 3$ seien und setzt $x = \frac{x_1}{x_4}$, $y = \frac{x_2}{x_4}$, $z = \frac{x_3}{x_4}$ in (4), so nimmt dieser Ausdruck die Form an

$$(12) \qquad du = \frac{\begin{vmatrix} k & A' & x_4dx_1 - x_1dx_4 \\ l & B' & x_4dx_2 - x_2dx_4 \\ m & C' & x_4dx_3 - x_3dx_4 \end{vmatrix}}{x_4^{\varrho} \cdot N(kf_1 + lf_2 + mf_3)},$$

wo N eine ganze Function ν^{ten}, die A', B', C' solche $(n+\nu+\varrho-3)^{\text{ten}}$ Grades von $x_1, \ldots, x_4$ werden. Setzt man, was erlaubt, $dx_4 = 0$, so sieht man, da der Schnitt von $x_4 = 0$ mit $f = 0$ nicht ausgezeichnet ist, also x_4 sich aus du herausheben muss, dass

$$\varrho = 1$$

ist. Setzt man weiter $x_4 = 0$, $dx_4 = 0$, so dass sich du auf die Schnittcurve von $f = 0$ mit $x_4 = 0$ beziehen soll, so weiss man, dass du von der Form wird

$$du = \frac{A_4 \cdot \begin{vmatrix} k & x_1 & dx_1 \\ l & x_2 & dx_2 \\ m & x_3 & dx_3 \end{vmatrix}}{N(kf_1 + lf_2 + mf_3)},$$

wo A_4 vom Grade $n + \nu - 3$. D. h. für $x_4 = 0$ werden A', B', C' bezüglich zu A_4x_1, A_4x_2, A_4x_3, oder sie sind von der Form

$$A' = A_4x_1 - A_1x_4, \quad B' = A_4x_2 - A_2x_4, \quad C' = A_4x_3 - A_3x_4,$$

was die Formeln (11) sind.

Alsdann geht die Relation (5) vermöge (11) unmittelbar in die Relation (10)

$$\sum A_i f_i = 0$$

über, und du schreibt sich

$$du = \frac{\sum \pm A_2 x_3 dx_4}{N \cdot f_1},$$

was vermöge

$$\sum f_i x_i = 0, \quad \sum f_i dx_i = 0, \quad \sum f_i A_i = 0$$

den Ausdruck (9) liefert.

4. Nach dem Ausdruck (9) können die Functionen A_i überhaupt nur bis auf Grössen der Form

$$x_1 Q, \quad x_2 Q, \quad x_3 Q, \quad x_4 Q,$$

wo Q eine beliebige ganze Function $(n + \nu - 4)^{\text{ten}}$ Grades ist, bestimmt werden, da diese Grössen sich aus (9) wieder wegheben.

Aus diesem Grunde kann in der mit Hülfe von $f = 0$ zu erfüllenden Relation (10), d. h. in der Relation

$$\sum A_i f_i = R \cdot f,$$

der Factor R von f, auf der rechten Seite, zu einer ganz beliebigen ganzen Function $(n + \nu - 4)^{\text{ten}}$ Grades gemacht werden; denn ersetzt man die A_i durch die

$$\Theta_i = A_i + x_i Q,$$

so wird

$$\sum \Theta_i f_i = (R + nQ) f.$$

Insbesondere kann man, was auch R sei, $Q = -\frac{1}{n} R$ setzen, wonach

$$\sum \Theta_i f_i \equiv 0$$

wird, ohne Hülfe von $f = 0$. Der nächste Paragraph wird eine nähere Beziehung des Factors R zu den entsprechenden Grössen A_i liefern.

§ 2.

Bedingung der Integrabilität.

5. Nach Nr. 1 war

(1) $$du = \frac{A dy - B dx}{N \cdot F_z'},$$

wenn A, B, C drei ganze Functionen $(n + \nu - 2)^{\text{ten}}$ Grades von x, y, z, von der Form (11), Nr. 3, vorstellen, für welche vermöge $F(x, y, z) = 0$ die Relation (5), d. h. für welche die eine Identität

(2) $$AF_x' + BF_y' + CF_z' = S \cdot F$$

besteht, wo S eine ganze Function $(n + \nu - 3)^{\text{ten}}$ Grades [nämlich, vermöge (11) $= n\mathsf{A}_4 +$ einer ganzen Function $(n + \nu - 4)^{\text{ten}}$ Grades von x, y, z] wird.

Wir führen jetzt die Bedingung der Integrabilität des totalen Differentials du ein:

$$\left(\frac{\partial \frac{A}{\mathsf{N}F_z'}}{\partial x} + \frac{\partial \frac{A}{\mathsf{N}F_z'}}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \frac{B}{\mathsf{N}F_z'}}{\partial y} + \frac{\partial \frac{B}{\mathsf{N}F_z'}}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{T}{\mathsf{N}^2 F_z'^2}\cdot F, \tag{3}$$

in der T irgend eine ganze Function $(2n+2\nu-5)^{\text{ten}}$ Grades werden kann. Führt man für $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ ihre Werthe aus

$$F_x + F_z\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \qquad F_y + F_z\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

ein, so schreibt sich (3) auch so:

$$\frac{\partial \frac{A}{\mathsf{N}}}{\partial x} + \frac{\partial \frac{B}{\mathsf{N}}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{AF_x' + BF_y'}{\mathsf{N}F_z'}\right] = \frac{T}{\mathsf{N}^2\cdot F_z'^2}\cdot F;$$

aber aus der Identität (2) folgt auch

$$\frac{\partial}{\partial z}\,\frac{AF_x' + BF_y'}{\mathsf{N}F_z'} = -\frac{\partial \frac{C}{\mathsf{N}}}{\partial z} + \frac{\partial \frac{SF}{\mathsf{N}F_z'}}{\partial z}$$

$$= -\frac{\partial \frac{C}{\mathsf{N}}}{\partial z} + \frac{S}{\mathsf{N}} + \frac{\partial \frac{S}{\mathsf{N}F_z'}}{\partial z}\cdot F,$$

so dass die Bedingung der Integrabilität vermöge (2) übergeht in

$$\frac{\partial \frac{A}{\mathsf{N}}}{\partial x} + \frac{\partial \frac{B}{\mathsf{N}}}{\partial y} + \frac{\partial \frac{C}{\mathsf{N}}}{\partial z} = \frac{S}{\mathsf{N}} + \frac{T'}{\mathsf{N}^2 F_z'^2}\cdot F,$$

wo auch T' eine ganze Function $(2n+2\nu-5)^{\text{ten}}$ Grades von x, y, z werden soll. Da die übrigen Glieder ausser dem letzten nur N^2 zum Nenner haben, so muss T' durch $F_z'^2$ theilbar sein, und die Bedingung wird

$$\frac{\partial \frac{A}{\mathsf{N}}}{\partial x} + \frac{\partial \frac{B}{\mathsf{N}}}{\partial y} + \frac{\partial \frac{C}{\mathsf{N}}}{\partial z} = \frac{S}{\mathsf{N}} + \frac{\mathsf{T}}{\mathsf{N}^2}\cdot F, \tag{4}$$

wo T eine ganze Function $(2\nu-3)^{\text{ten}}$ Grades von x, y, z werden soll.

Sei nun zunächst $\nu = 0$, $\mathsf{N} = 1$; so verschwindet T wegen seines Grades, und es folgt für den Factor S in der Identität (2) die Bestimmung:

$$S = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}. \tag{5}$$

Für ein beliebiges ν geht aus der ausführlicher geschriebenen Bedingung (4)

$$(6)\qquad A\frac{\partial \mathsf{N}}{\partial x}+B\frac{\partial \mathsf{N}}{\partial y}+C\frac{\partial \mathsf{N}}{\partial z} =\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}-S\right)\cdot \mathsf{N}-\mathsf{T}\cdot F$$

hervor, dass eine Identität existiren muss der Form:

$$(7)\qquad A\frac{\partial \mathsf{N}}{\partial x}+B\frac{\partial \mathsf{N}}{\partial y}+C\frac{\partial \mathsf{N}}{\partial z}=G\cdot \mathsf{N}+H\cdot F,$$

wo G und H ganze Functionen von x, y, z, bez. vom Grade $n+\nu-3$ und $2\nu-3$ werden sollen; und alsdann ergiebt sich für S in (2) ein Ausdruck der Form:

$$(8)\qquad S=\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}-G-G'\cdot F,$$

wo G die in (7) stehende ganze Function $(n+\nu-3)^{\text{ten}}$ Grades, G' eine ganze Function $(\nu-3)^{\text{ten}}$ Grades von x, y, z werden soll.

Man kann offenbar $G'=0$ annehmen, indem man $G'F$ sowohl in (7) als in (8) in G eingehen lässt.

Im Ganzen hat man so für A, B, C, N zwei Identitäten zu erfüllen; nämlich für A, B, C eine Relation der Form (2), und mit dem nach (8) daraus hervorgehenden G für N, A, B, C eine Relation der Form (7). Für $\nu=0$ hat man nur (2) und (5) zu erfüllen.

6. Es sollen jetzt für die homogene Darstellung $f(x_1, x_2, x_3, x_4)=0$ der Fläche die Bedingungen der vorigen Nummer entwickelt werden.

Schreibt man die (2) entsprechende Gleichung wie in Nr. 4:

$$(9)\qquad \sum A_i f_i=R\cdot f,$$

so wird durch den Vergleich mit (2), vermöge der Substitutionen von Nr. 3:

$$R=\frac{nA_4-x_4^{n+\nu-3}\cdot S}{x_4}.$$

Hiermit geht die Bedingungsgleichung (6), indem man N durch $\frac{N}{x_4^{\nu}}$, T durch $\frac{\mathsf{T}'}{x_4^{2\nu-3}}$ ersetzt, (11), Nr. 3 benutzt, und $\frac{\partial N}{\partial x_i}=\mathsf{N}_i$ schreibt über in:

$$\begin{aligned}(A_4x_1-A_1x_4)\,N_1&+(A_4x_2-A_2x_4)\,N_2+(A_4x_3-A_3x_4)\,N_3\\ =\Big\{\frac{\partial}{\partial x_1}(A_4x_1-A_1x_4)&+\frac{\partial}{\partial x_2}(A_4x_2-A_2x_4)+\frac{\partial}{\partial x_3}(A_4x_3-A_3x_4)\\ &-nA_4+Rx_4\Big\}\,N-\mathsf{T}'\cdot f,\end{aligned}$$

oder, ausgeführt, in:

$$\sum_i^{1..4} A_i N_i = \left(\sum_i^{1...4} \frac{\partial A_i}{\partial x_i} - R\right) \cdot N + \frac{\mathsf{T}'}{x_4} \cdot f.$$

Diese Relation zeigt zunächst, dass T' durch x_4 theilbar sein muss; dass also T in (4) oder (6), Nr. 5, nur vom Grade $2\nu - 4$ in x, y, z war. Setzt man $\frac{\mathsf{T}'}{x_4} = T_1$, so hat man als Bedingung der Integrabilität hier:

$$(10) \qquad \sum A_i N_i = \left(\sum \frac{\partial A_i}{\partial x_i} - R\right) \cdot N + T_1 \cdot f.$$

In (9) und (10) können R und T_1 irgend welche ganze Functionen, bez. $(n+\nu-4)^{\text{ten}}$ und $(2\nu-4)^{\text{ten}}$ Grades, von x_1, x_2, x_3, x_4 sein.

Die Bedingungen (9) und (10) lassen sich noch vereinfachen, wenn man, wie in Nr. 4, die Grössen A_i durch die Grössen

$$\Theta_i = A_i + x_i Q,$$

wo Q eine willkürliche ganze Function $(n + \nu - 4)^{\text{ten}}$ Grades von $x_1, \ldots, x_4$ ist, ersetzt. Dann wird aus (9) und (10)

$$(9') \qquad \sum \Theta_i f_i = (R + nQ) \cdot f,$$

$$(10') \qquad \sum \Theta_i N_i = \left(\sum \frac{\partial \Theta_i}{\partial x_i} - R - nQ\right) \cdot N + T_1 f.$$

Setzt man also

$$Q = \frac{1}{n}\left(\sum \frac{\partial \Theta_i}{\partial x_i} - R\right),$$

so ergeben sich die beiden zu erfüllenden Identitäten für N und $\Theta_1, \ldots, \Theta_4$ in der Form

$$(11) \qquad \begin{cases} \sum \Theta_i f_i = f \cdot \sum \dfrac{\partial \Theta_i}{\partial x_i}, \quad \text{oder} \quad \sum \dfrac{\partial \frac{\Theta_i}{f}}{\partial x_i} = 0, \\ \sum \Theta_i N_i = f \cdot T_1. \end{cases}$$

Setzt man aber

$$Q = -\frac{1}{n} R,$$

so folgt statt dessen einfacher:

$$(11') \qquad \begin{cases} \sum \Theta_i f_i = 0, \\ \sum \Theta_i N_i = N \sum \dfrac{\partial \Theta_i}{\partial x_i} + T_1 f, \quad \text{oder} \quad \sum \dfrac{\partial \frac{\Theta_i}{N}}{\partial x_i} = -\dfrac{T_1}{N^2} f. \end{cases}$$

Hat man die den Bedingungen (11) oder den Bedingungen (11') identisch genügenden Grössen Θ_i gefunden, wobei T_1 eine beliebige ganze Function $(2\nu-4)^{\text{ten}}$ Grades werden darf, so werden die allgemeinsten Werthe der A_i:

$$A_i = \Theta_i + x_i \psi,$$

wenn für ψ eine willkürliche ganze Function $(n+\nu-4)^{\text{ten}}$ Grades von $x_1 \dots x_4$ gesetzt wird.

Insbesondere hat man für $\nu=0$, $N=1$ nach (9) und (10) nur die eine Identität

$$\sum A_i f_i = f \cdot \sum \frac{\partial A_i}{\partial x_i} \tag{12}$$

zu erfüllen, die sich nach (11') auch durch die beiden

$$\left\{\begin{aligned} &\sum \Theta_i f_i = 0, \\ &\sum \frac{\partial \Theta_i}{\partial x_i} = 0 \end{aligned}\right. \tag{12'}$$

ersetzen lässt. Die Summen $\sum$ sind überall über $i=1,2,3,4$ zu erstrecken.

§ 3.

Umformung des Differentialausdrucks.

7. Man nehme drei ganze Functionen r^{ten} Grades von x_1, x_2, x_3, x_4 an:

$$\varphi,\ \varphi',\ \psi,$$

und setze im Ausdruck (9), Nr. 2, von du die willkürlichen Grössen k_1, k_2, k_3, k_4 den bezügl. 3-reihigen Determinanten aus den Differentialquotienten dieser drei Functionen gleich, nämlich

$$\sum k_i f_i = \sum \pm f_1 \varphi_2 \varphi_3' \psi_4.$$

Dann wird

$$du = \frac{r \cdot \begin{vmatrix} \sum A_i \varphi_i & \varphi & d\varphi \\ \sum A_i \varphi_i' & \varphi' & d\varphi' \\ \sum A_i \psi_i & \psi & d\psi \end{vmatrix}}{N \cdot \sum \pm f_1 \varphi_2 \varphi_3' \psi_4}.$$

Führt man nun zwei Parameter λ und μ ein mittels

$$\frac{\varphi}{\psi} = \lambda, \quad \frac{\varphi'}{\psi} = \mu,$$

so geht der Ausdruck von du, indem man die Zählerdeterminante desselben nach der ersten Verticalreihe ordnet, über in:

$$du = \frac{r\psi}{N\cdot\sum\pm f_1\varphi_2\varphi_3'\psi_4}\cdot\Big\{\Big(\psi\sum A_i\varphi_i'-\varphi'\sum A_i\psi_i\Big)d\lambda$$
$$-\Big(\psi\sum A_i\varphi_i-\varphi\sum A_i\psi_i\Big)d\mu\Big\}$$
$$=\frac{r\psi^3}{N\cdot\sum\pm f_1\varphi_2\varphi_3'\psi_4}\cdot\sum A_i\Big(\frac{\partial\mu}{\partial x_i}d\lambda-\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}d\mu\Big),$$

wobei noch (9) und (10) von Nr. 6 zu erfüllen sind. —

Führt man ebenso direct in (4), Nr. 1 zwei gebrochene Functionen Φ und Ψ von x, y, z als neue Variable ein, so wird du, indem man Zähler und Nenner mit $\sum\pm\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\Psi}{\partial z}$ multiplicirt, zu

$$du=\frac{\begin{vmatrix}\sum k\frac{\partial F}{\partial x}, & \sum k\frac{\partial\Phi}{\partial x}, & \sum k\frac{\partial\Psi}{\partial x}\\ \sum A\frac{\partial F}{\partial x}, & \sum A\frac{\partial\Phi}{\partial x}, & \sum A\frac{\partial\Psi}{\partial x}\\ 0 & d\Phi & d\Psi\end{vmatrix}}{\mathrm{N}\cdot\sum k\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\sum\pm\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\Psi}{\partial z}},$$

wo $\sum k\frac{\partial F}{\partial x}$ für $k\frac{\partial F}{\partial x}+l\frac{\partial F}{\partial y}+m\frac{\partial F}{\partial z}$, etc., steht. Wenn man also k, l, m so wählt, dass

$$\sum k\frac{\partial\Phi}{\partial x}=0,\qquad \sum k\frac{\partial\Psi}{\partial x}=0,$$

so folgt

$$du=\frac{\Big(A\frac{\partial\Phi}{\partial x}+B\frac{\partial\Phi}{\partial y}+C\frac{\partial\Phi}{\partial z}\Big)d\Psi-\Big(A\frac{\partial\Psi}{\partial x}+B\frac{\partial\Psi}{\partial y}+C\frac{\partial\Psi}{\partial z}\Big)d\Phi}{\mathrm{N}\cdot\sum\pm\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\Psi}{\partial z}},$$

unter den Bedingungen (2) und (6) von Nr. 5.

§ 4.

Eindeutige Transformation des Differentialausdrucks.

8. In Erweiterung von Nr. 7 soll das Verhalten des Differentialausdrucks bei der allgemeinsten rationalen Transformation von f untersucht werden.

Vermöge einer rationalen Substitution

(1) $$x_i=\psi_i(y_1, y_2, y_3, y_4),\quad (i=1,2,3,4),$$

wo die ψ_i rationale ganze Functionen r^{ten} Grades von vier neuen homogenen Variablen y_1, y_2, y_3, y_4 vorstellen, werde die Fläche f, mit der Gleichung

$$(2) \qquad f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,$$

in die Fläche F, mit der Gleichung

$$(3) \qquad F(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0$$

transformirt, nämlich

$$(4) \qquad f(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) = M(y_1, y_2, y_3, y_4) \cdot F(y_1, y_2, y_3, y_4),$$

oder

$$f = M \cdot F.$$

Sei auch

$$\frac{\partial F}{\partial y_h} = F_h$$

gesetzt. Aus (4) wird, vermöge $F = 0$:

$$(5) \qquad \sum_i f_i \frac{\partial \psi_i}{\partial y_h} = M F_h,$$

also

$$(6) \qquad M \cdot \sum_h^{1\ldots4} c_h F_h = \sum_i^{1\ldots4} k_i f_i,$$

wenn man zwischen den willkürlichen Grössen k_i und den eben so willkürlichen Grössen c_h die Beziehungen herstellt

$$(7) \qquad k_i = \sum_h c_h \frac{\partial \psi_i}{\partial y_h}, \quad (i = 1, \ldots, 4).$$

Seien ebenso vier neue ganze rationale Functionen C_1, C_2, C_3, C_4 der $y_1 \ldots y_4$ eingeführt, welche mit den vier Functionen A_1, A_2, A_3, A_4 der $x_1 \ldots x_4$ aus Nr. 2 vermöge der Beziehungen zusammenhängen:

$$(8) \qquad \frac{\Delta}{r} \cdot A_i = \sum_h C_h \frac{\partial \psi_i}{\partial y_h}, \quad (i = 1, \ldots, 4),$$

wobei

$$(9) \qquad \Delta = \sum \pm \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} \frac{\partial \psi_2}{\partial y_2} \frac{\partial \psi_3}{\partial y_3} \frac{\partial \psi_4}{\partial y_4};$$

so wird

$$(10) \qquad \sum \pm k_1 A_2 x_3 \, dx_4 = \sum \pm c_1 C_2 y_3 \, dy_4.$$

Somit erhält man

$$(11) \qquad du = \frac{\sum \pm k_1 A_2 x_3 \, dx_4}{N \cdot \sum_i k_i f_i} = \frac{\sum \pm c_1 C_2 y_3 \, dy_4}{M \cdot N \cdot \sum_h c_h F_h}.$$

Diese Form von du muss noch eine Vereinfachung zulassen; denn in den, von der Transformation abhängenden, Punkten von $F = 0$,

in welchen $M = 0$ wird, wird u nicht unendlich, da u in den entsprechenden Punkten von $f = 0$ nicht unendlich wird. Nach der bekannten Theorie der Abel'schen Integrale bei *einer* Variablen wird in der That, wenn man für die neuen Variablen $y_1, \ldots, y_4$ nicht-homogene ξ, η, ζ einführt und das transformirte du also in der Form schreibt:

$$du = \frac{Q\,d\xi - P\,d\eta}{M \cdot \mathsf{N} \cdot \frac{\partial F}{\partial \zeta}},$$

vermöge $F = 0$ die Grösse P für *jedes gegebene* ξ und die Grösse Q für *jedes gegebene* η durch M theilbar, d. h. es werden vermöge $F = 0$ beide Grössen P und Q für alle Werthe von ξ und η durch M theilbar. Für die homogene Form (11) von du heisst diess: *es müssen alle Grössen $C_h y_k - C_k y_h$ vermöge $F = 0$ durch M theilbar und die Quotienten wieder auf die analoge Form zu bringen sein.*

Man hat also identische Relationen der Form:

$$(12) \qquad C_h y_k - C_k y_h = (B_h y_k - B_k y_h) \cdot M + L_{hk} \cdot F,$$

in welchen die B_h wieder ganze Functionen der $y_1, \ldots, y_4$ werden; ebenso die L_{hk}. Da ferner aus (12) Relationen der Art folgen:

$$L_{23} y_1 + L_{31} y_2 + L_{12} y_3 = 0, \quad \text{etc.},$$

so werden auch die L_{hk} von der Form:

$$(12') \qquad L_{hk} = R_h y_k - R_k y_h,$$

wo man für die R_h ganze Functionen der y setzen kann. Man kann also (12) auch so schreiben:

$$y_k(C_h - B_h M - R_h F) = y_h(C_k - B_k M - R_k F),$$

d. h. es wird

$$(13) \qquad C_h = B_h \cdot M + R_h \cdot F + y_h \cdot \psi,$$

wenn ψ eine ganze Function der y ist.

Setzt man noch

$$(14) \quad C_h - y_h \psi = C_h', \quad N(x_1, x_2, x_3, x_4) = \mathsf{N}(y_1, y_2, y_3, y_4),$$

so wird mit Hülfe von $F = 0$:

$$(15) \quad du = \frac{\sum \pm c_1 C_2 y_3 dy_4}{M \cdot \mathsf{N} \cdot \sum\limits_h c_h F_h} = \frac{\sum \pm c_1 C_2' y_3 dy_4}{M \cdot \mathsf{N} \cdot \sum c_h F_h} = \frac{\sum \pm c_1 B_2 y_3 dy_4}{\mathsf{N} \cdot \sum c_h F_h}.$$

Eine weitere Umformung des letzten Ausdrucks wird in Nr. 11 gegeben werden.

9. Für die transformirten Grössen F, B_h und N sind natürlich die den Identitäten (9) und (10), Nr. 6, d. h.

$$(16) \qquad \sum_i A_i f_i = R \cdot f, \quad \sum_i \frac{\partial \frac{A_i}{N}}{\partial x_i} = \frac{R}{N} - \frac{T_1}{N^2} \cdot f,$$

entsprechenden Identitäten erfüllt, sobald dies für die f, A_i und N der Fall ist. Es ist indess nicht ohne Interesse, dies auch durch die Rechnung nachzuweisen.

Zunächst hat man aus (4) statt (5) die Identität:

$$\sum_i f_i \frac{\partial \psi_i}{\partial y_h} = F_h \cdot M + M_h \cdot F,$$

daher aus (8):

$$\frac{\Delta}{r} \sum_i A_i f_i = \sum_{h,i} C_h f_i \frac{\partial \psi_i}{\partial y_h} = M \sum_h C_h F_h + F \sum_h C_h M_h,$$

und nach (16) und (4):

$$(17) \qquad \sum_h C_h F_h = \left(\frac{1}{r} \Delta R - \frac{\sum C_h M_h}{M} \right) F = \mathrm{P} \cdot F.$$

Sei ferner

$$\Delta' = \frac{1}{\Delta} = \sum \pm \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \frac{\partial y_3}{\partial x_3} \frac{\partial y_4}{\partial x_4},$$

so wird

$$\frac{1}{r} A_i = \Delta' \sum_h C_h \frac{\partial x_i}{\partial y_h},$$

$$\frac{1}{r} \sum_i \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = \Delta' \sum_{h,i,k} \frac{\partial C_h}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_h} + \Delta' \sum_{h,i,k} C_h \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_h \partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_i}$$
$$+ \sum_{h,i,k,l} \Delta'_{kl} C_h \frac{\partial^2 y_k}{\partial x_l \partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_h},$$

wo Δ'_{kl} die Unterdeterminante von Δ' nach dem Element $\frac{\partial y_k}{\partial x_l}$ bedeutet.

Benutzt man nun die Relationen

$$\sum_i \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_h} = {1 \atop 0}, \text{ je nachdem } h = k \text{ oder verschieden von } k,$$

und die durch Differentiation nach x_l daraus hervorgehende, so wird das dritte Glied der rechten Seite gleich und entgegengesetzt dem zweiten, und es folgt:

$$\sum_i \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = \frac{r}{\Delta} \sum_h \frac{\partial C_h}{\partial y_k}.$$

Ebenso:

$$\sum_i \frac{\partial \frac{A_i}{N}}{\partial x_i} = \frac{r}{\Delta} \sum_h \frac{\partial \frac{C_h}{\mathrm{N}}}{\partial y_k},$$

also nach (16) und (17):

$$(18)\qquad \sum_h \frac{\partial \frac{C_h}{\mathsf{N}}}{\partial y_h} = \frac{1}{\mathsf{N}}\left(\mathsf{P} + \frac{\sum\limits_h C_h M_h}{M}\right) - \frac{\Delta}{r}\cdot\frac{T_1 M}{\mathsf{N}^2}\cdot F.$$

Für die B_h liefert dann (13) zunächst aus (17):

$$(19)\qquad \sum_h B_h F_h = \frac{1}{M}\Big(\mathsf{P} - \sum_h R_h F_h - n'\psi\Big)\cdot F = S\cdot F,$$

wenn n' die Ordnung von F bedeutet; und dann aus (18) und (19):

$$\sum_h \frac{\partial \frac{B_h}{\mathsf{N}}}{\partial y_h} = \sum_h \frac{\partial \frac{C_h}{M\mathsf{N}}}{\partial y_h} - F\cdot\sum_h \frac{\partial \frac{R_h}{M\mathsf{N}}}{\partial y_h} - \frac{1}{M\mathsf{N}}\sum_h R_h F_h$$
$$- (\varrho+4)\frac{\psi}{M\mathsf{N}},$$
$$= \frac{1}{M}\left\{\sum \frac{\partial \frac{C_h}{\mathsf{N}}}{\partial y_h} - \frac{1}{\mathsf{N}}\Big(\frac{\Sigma C_h M_h}{M} + \sum R_h F_h + (\varrho+4)\psi\Big)\right\}$$
$$- \sum_h \frac{\partial \frac{R_h}{M\mathsf{N}}}{\partial y_h}\cdot F,$$
$$= \frac{1}{\mathsf{N}}\{S + (n'-\varrho-4)\psi M\} - \left\{\frac{\Delta}{r}\frac{T_1}{\mathsf{N}^2} + \sum_h \frac{\partial \frac{R_h}{M\mathsf{N}}}{\partial y_h}\right\}\cdot F,$$

wo ϱ die Dimension von $\frac{\psi}{M\mathsf{N}}$ ist. Nun wird, wenn M von der Ordnung μ ist, $n' = nr - \mu$, ferner ψ von der Ordnung $(n+\nu)r - 4$, also die Ordnung von $\frac{\psi}{M\mathsf{N}}$ zu $\varrho = (n+\nu)r - 4 - \mu - \nu r = n' - 4$. Somit hat man eine Relation:

$$(20)\qquad \sum_h \frac{\partial \frac{B_h}{\mathsf{N}}}{\partial y_h} = \frac{S}{\mathsf{N}} - \frac{T_2}{\mathsf{N}^2}\cdot F,$$

und in (19) und (20) die (16) genau entsprechenden Identitäten für F, N und die B_h.

§ 5.

Endlichkeitsbedingungen der Differentialausdrücke in den mehrfachen Elementen der Fläche.

10. Die Integrale u unserer Differentialausdrücke (4), Nr. 1 oder (9), Nr. 2, werden einmal in den Punkten der Fläche unendlich, in

welchen N verschwindet; und könnten auch dort unendlich werden, wo der Nenner $\sum k_i f_i$ Null wird. Dieses Letztere kann, wegen der Unabhängigkeit der Integralwerthe von den Grössen k_i, nur da eintreten, wo alle f_i zugleich verschwinden, also in den *mehrfachen* Elementen der Fläche. Wie nun die Differentialausdrücke, d. h. die Grössen A_i von Nr. 2, (oder die Grössen A, B, C von Nr. 1), zu normiren sind, damit die Integrale nicht wegen des Nenners $\sum k_i f_i$ in den mehrfachen Elementen von f zu unendlich werden, kann man *aus den Formeln der eindeutigen Transformation* in Nr. 8 erschliessen.

Dies kann nach folgendem Gesichtspunkte geschehen:

Sei die auf die Fläche $F(y) = 0$, also auf die Grössen B_h von (15), Nr. 8, bezügliche Normirung gesucht. Durch die Transformation (1) von Nr. 8 gehen alle auf $f(x) = 0$ bezüglichen Integrale in solche über, die zur Fläche $F(y) = 0$ gehören; und ist, wie wir nun annehmen wollen, die Transformation (1) mit Hülfe von $F(y) = 0$ eine eindeutig umkehrbare, so gehen auch *alle* zu $F(y) = 0$ gehörigen Integrale in zu $f(x) = 0$ gehörige Integrale über. Bei einer Transformation (1) bleiben die Werthe der Integrale erhalten; sind dieselben insbesondere in einem Punkte von $f(x) = 0$ *endlich*, so tritt dasselbe für die transformirten Integrale in dem entsprechenden Punkte von $F(y) = 0$ ein.

Nun nehmen wir die bei gegebener Fläche $F(y) = 0$ noch willkürlichen Substitutionsformen $\psi_i(y)$ von (1), Nr. 8, die auch von beliebig hohem Grade r sind, so an, dass die Flächen $\psi_i(y) = 0$ durch alle vielfachen Elemente von $F(y) = 0$ *einfach* hindurchgehen, aber gegeneinander und gegen $F(y) = 0$ keine weitere Specialität haben. Alsdann werden einer vielfachen Curve oder einem isolirten vielfachen Punkt Σ von $F(y) = 0$ auf $f(x) = 0$ Curven S entsprechen, in welchen $f(x) = 0$ eine *einfachere* Singularität hat, als es bei $F(y) = 0$ in den entsprechenden Gebilden Σ der Fall war*). Kennt man also die zur Endlichkeit in den Gebilden S nöthige Normirung der auf $f(x) = 0$ bezüglichen Integrale, oder der A_i, so kann man daraus mittels der Formeln (1) — (13) von Nr. 8 die in den Gebilden Σ erforderliche Normirung für die B_h ermitteln.

In dem Falle, dass die Gebilde Σ gewöhnliche mehrfache Elemente von $F(y) = 0$, ohne weitere Singularität, sind, werden die entsprechenden Curven S einfache, nicht-specielle Curven von $f(x) = 0$. Längs dieser Curven haben aber die A_i überhaupt keine besondere Bedingung für die Endlichkeit der u zu erfüllen; so dass unsere einfache Trans-

---

*) Vergl. meine in der Einleitung citirte Abhandlung aus Math. Ann. II, ferner meine Note, Gött. Nachr. 1871, Nr. 9, und den Aufsatz über die singulären Werthsysteme, Math. Ann. IX.

formation unmittelbar das Verhalten der B_h in jenen Gebilden Σ liefert. Dieser Fall wird in Nummer 11 — 14 behandelt werden. — Bei höherer Singularität der Σ ist die Fläche $f(x) = 0$ erst noch analog weiter zu transformiren, bis man Σ entsprechende, nichtsinguläre, Curven erhält.

11. $F(y) = 0$ besitze eine *gewöhnliche j-fache Curve* Σ_j.

Die Flächen $\psi_i(y) = 0$, von der Ordnung r, sollen Σ_j zur einfachen Curve haben. Die entsprechende Curve S von $f(x) = 0$ wird eine einfache Curve für f.

Die Ordnung von F sei n', n die von f, μ die von M; so ist $n' = nr - \mu$. Für die $f(\psi_1, \ldots \psi_4)$ wird Σ_j eine n-fache Curve; daher ergiebt die Identität $f \equiv MF$ (Nr. 8), dass Σ_j für $M(y)$ zur $(n-j)$-fachen Curve wird. Für $N(\psi_1 \ldots \psi_4)$ wird Σ_j zur ν-fachen Curve; für die $A_i(\psi)$ zur $(n + \nu - 3)$-fachen Curve; für die $A_i\psi_k - A_k\psi_i$ also zur $(n + \nu - 2)$-fachen Curve.

Ferner ist bekannt*), dass $\Delta(y)$ die Curve Σ_j längs deren alle ψ_i einfach verschwinden, zur 3-fachen Curve hat, während die Unterdeterminanten Δ_{kl} von Δ dieselbe nur zur 1-fachen Curve haben. Nach den aus (8) folgenden Ausdrücken für die C_h.

$$C_h = \frac{1}{r} \Sigma_i A_i \Delta_{ih}$$

wird also die Curve Σ_j für die C_h mindestens zur $(n + \nu - 2)$-fachen Curve.

Eine genauere Betrachtung zeigt nun, dass der Grad der Vielfachkeit von Σ_j für die $C_h y_k - C_k y_h$ noch höher steigt. Zu dem Zwecke betrachte man die Gleichungen (10) und (7):

$$\Sigma \pm c_1 C_2 y_3 dy_4 = \Sigma \pm k_1 A_2 x_3 dx_4, \quad k_i = \Sigma_h c_h \frac{\partial \psi_i}{\partial y_h}.$$

Aendert man in der ersten Gleichung nur y_h, so folgt

$$(cCy)_h = \Sigma \pm k_1 A_2 x_3 \frac{\partial x_4}{\partial y_h},$$

wo $(cCy)_h$ den Factor von dy_h in $\Sigma \pm c_1 C_2 y_3 dy_4$ bedeutet; und die Vergleichung der Coefficienten der willkürlichen Grössen c_h liefert Beziehungen der Form:

$$\begin{aligned} C_1 y_2 - C_2 y_1 &= \left| A_i \quad x_i \quad \frac{\partial x_i}{\partial y_3} \quad \frac{\partial x_i}{\partial y_4} \right|, \\ C_3 y_4 - C_4 y_3 &= \left| A_i \quad x_i \quad \frac{\partial x_i}{\partial y_1} \quad \frac{\partial x_i}{\partial y_2} \right|, \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

wo rechts Determinanten stehen, deren Horizontalreihen aus der hin-

*) S. den § 5 meines in der Einleitung citirten Aufsatzes, Math. Ann. Bd. II.

geschriebenen für $i = 1, 2, 3, 4$ hervorgehen. Nun sei für einen Punkt P der Curve Σ_j:

$$y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ ay_3 - by_4 = 0,$$

und die Tangente der Curve Σ_j an dieser Stelle sei

$$y_1 = y_2 = 0;$$

dann hat man in der Nähe von P:

$$\psi_i = y_1 P_i + y_2 Q_i + \text{Terme höherer Dimension},$$

also

$$\Delta = \left| P_i + y_1 \frac{\partial P_i}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial Q_i}{\partial y_1},\ Q_i + y_1 \frac{\partial P_i}{\partial y_2} + y_2 \frac{\partial Q_i}{\partial y_2},\right.$$
$$\left. y_1 \frac{\partial P_i}{\partial y_3} + y_2 \frac{\partial Q_i}{\partial y_3},\qquad y_1 \frac{\partial P_i}{\partial y_4} + y_2 \frac{\partial Q_i}{\partial y_4} \right|.$$
$$(i = 1, 2, 3, 4),$$

In P verschwinden daher auch alle *zweiten* Unterdeterminanten von Δ, ausgenommen die der Art

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial y_1} \frac{\partial \psi_k}{\partial y_2} - \frac{\partial \psi_i}{\partial y_2} \frac{\partial \psi_k}{\partial y_1};$$

d. h. alle Ausdrücke $C_h y_k - C_k y_h$, ausgenommen $C_3 y_4 - C_4 y_3$, müssen P zum $(n+\nu-1)$-fachen Punkt haben. Aber auch $C_3 y_4 - C_4 y_3$ verhält sich so; denn es wird dieser Ausdruck zu

$$\left| A_i,\ x_i,\ \frac{\partial x_i}{\partial y_1},\ \frac{\partial x_i}{\partial y_2} \right| = | A_i,\ y_1 P_i + y_2 Q_i,\ P_i,\ Q_i | + T = T$$

wo T in P einen $(n+\nu-1)$-fachen Punkt hat.

Sei jetzt für P etwa $y_1 = y_2 = y_3 = 0$. Aus dem Umstande, dass P für die C_h mindestens ein $(n+\nu-2)$-facher Punkt, für die $C_1 y_4 - C_4 y_1$, $C_2 y_4 - C_4 y_2$, $C_3 y_4 - C_4 y_3$ ein $(n+\nu-1)$-facher Punkt ist, folgt weiter, dass P für C_1, C_2, C_3 ein $(n+\nu-1)$-facher Punkt, nur für C_4 ein $(n+\nu-2)$-facher Punkt wird. Und hieraus folgt wieder, dass die drei Ausdrücke

$$C_1 y_2 - C_2 y_1,\quad C_1 y_3 - C_3 y_1,\quad C_2 y_3 - C_3 y_1$$

den Punkt P zum $(n+\nu)$-fachen, die übrigen drei P zum $(n+\nu-1)$-fachen Punkt haben.

Wegen (12), Nr. 8, und weil M in Σ_j eine $(n-j)$-fache Curve hat, ergiebt sich daher für die Ausdrücke $B_h y_k - B_k y_h$ von (15), Nr. 8:

Die Flächen $B_h y_k - B_k y_h$ treffen $F = 0$ in der j-fachen Curve Σ_j von F wie Flächen mit $[(n+\nu-1) - (n-j)]$- $= (\nu+j-1)$*-facher Curve Σ_j.*

12. Diese Eigenschaft erlaubt nun, den Differentialausdruck (15) von Nr. 8 für $F(y) = 0$ noch einfacher zu schreiben. Denn

$$N(\psi_1, \ldots \psi_4) = \mathsf{N}(y) = 0$$

möge die Fläche $F(y) = 0$ ausser in den vielfachen Curven Σ_j von F noch in der einfachen Curve Σ^0 von F schneiden; so sei $\mathsf{N}'(y) = 0$ die Gleichung irgend einer Fläche, welche nur der *einen* Eigenschaft zu genügen hat, durch Σ^0 zu gehen. Man hat alsdann eine Identität:

$$\mathsf{N}' \cdot (B_h y_k - B_k y_h) = \mathsf{N}\,(B_h' y_k - B_k' y_h) + K_{hk} \cdot F,$$

da sich die linke Seite in jeder j-fachen Curve von F, die eine ν-fache Curve von N ist, nach dem Obigen wie eine Fläche mit $(n+j-1)$-facher Curve verhält.*) Der Ausdruck (15) geht mit Hülfe von $F = 0$ über in

$$du = \frac{\Sigma \pm c_i B_i' y_l dy_l}{\mathsf{N}' \cdot \Sigma_h c_h F_h}.$$

Dabei werden die $B_h' y_k - B_k' y_h = 0$ Flächen, welche sich längs Σ_j wie Flächen mit $(\alpha+j-1)$-facher Curve verhalten, wenn $\mathsf{N}' = 0$ diese Curve zur α-*fachen* Curve hatte; *insbesondere wird Σ_j für die*

$$B_h' y_k - B_k' y_h = 0$$

nur eine $(j-1)$-fache Curve, d. h. diese Flächen sind in den Σ_j zu F adjungirt, wenn, was möglich ist, die Fläche $\mathsf{N}' = 0$ durch die vielfachen Curven Σ_j von F gar nicht hindurchgelegt wird.

Das entsprechende Verhalten der B_k' soll ebenfalls erwähnt werden. Ordnet man in einem Punkte P von Σ_j, welcher die Coordinaten $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ habe, die B_h' nach absteigenden Dimensionen von y_4, und führt die Bedingungen ein, dass die drei Ausdrücke

$$B_1' y_4 - B_4' y_1, \quad B_2' y_4 - B_4' y_2, \quad B_3' y_4 - B_4' y_3,$$

nach y_4 entwickelt, mit Gliedern $(j-1)^{\text{ter}}$ Dimension in y_1, y_2, y_3 beginnen, so ergeben sich für die B_h' Ausdrücke der Art:

$$B_1' = y_1 L + G_{j-1}^{(1)}, \quad B_2' = y_2 L + G_{j-1}^{(2)}, \quad B_3' = y_3 L + G_{j-1}^{(3)},$$
$$B_4' = y_4 L + G_{j-2}.$$

wo $G_{j-1}^{(i)}, G_{j-2}$ Ausdrücke sind, die mit Gliedern $(j-1)^{\text{ter}}$, bez. $(j-2)^{\text{ter}}$ Dimension in y_1, y_2, y_3 beginnen, während L willkürlich ist. Man sieht, dass alsdann die drei Ausdrücke

$$B_1' y_2 - B_2' y_1, \quad B_1' y_3 - B_3' y_1, \quad B_2' y_3 - B_3' y_2,$$

---

*) Vergl. meinen „Satz aus der Theorie der algebraischen Functionen", Math. Ann. Bd. VI.

nach aufsteigenden Dimensionen in y_1, y_2, y_3 entwickelt, von selbst mit Gliedern der Dimension j anfangen.

Die für die B_h' einzuführenden, für die *Endlichkeit* der Integrale in den vielfachen Curven Σ_j, für welche N' nicht verschwindet, nothwendigen und hinreichenden Bedingungen sind also eben die, dass die Flächen $B_h' y_k - B_k' y_h$ die Curven Σ_j bez. zu $(j-1)$-fachen Curven haben. —

Alsdann wird der Integralwerth auch in keinem Punkte dieser Curven *unbestimmt*. Denn in den entsprechenden einfachen Punkten von $f(x) = 0$ sind diese Werthe bestimmte.

Indessen bedarf diese Aussage noch einer näheren Erklärung. Die in Nr. (11) und (12) gegebenen Entwicklungen beziehen sich auf alle die Fälle, in welchen einer mehrfachen Curve Σ_j von F durch eine einfache Transformation der Art (1), Nr. 8, eine *einfache* Curve von f entspricht. Dieses findet zunächst dann statt, wenn längs Σ_j die j Tangentenebenen eines jeden Punktes, einzelne Punkte ausgenommen, endlich getrennte sind. Den j getrennten Blättern an einer solchen Stelle von F entsprechen dann j endlich verschiedene Punkte von f; so dass das Integral an dieser Stelle im Allgemeinen j verschiedene bestimmte Werthe annimmt, bez. den j Elementen von F zugehörig.

Wenn dann, wie es im Allgemeinen geschieht, die Tangentenebenen von F längs Σ_j von Punkt zu Punkt variiren, so wird es immer eine endliche Zahl von Stellen von Σ_j geben, an welchen zwei oder mehr der j Tangentenebenen consecutive werden. An einer solchen Stelle werden nur die entsprechenden der j Werthe von u einander gleich.

Aber die Transformation in die einfache Curve von f findet auch dann statt, wenn die j Tangentenebenen an *jeder* Stelle von Σ_j consecutive werden, vorausgesetzt nur, dass keine weitere Singularität hinzutritt. Also z. B. im Fall einer gewöhnlichen Rückkehr-(Cuspidal-)curve Σ_2 von F; denn einer solchen Curve Σ_2 entspricht auf f eine einfache Curve S, und zwar den zwei Elementen von F an einer Stelle Π von Σ_2 zwei benachbarte Flächenelemente von f, von denen eines an einer Stelle P von S, das andere in einer festen, im Allgemeinen nicht mit der von S zusammenfallenden, Richtung dem Punkt P benachbart liegt. Dann hat das Integral an jeder Stelle von Σ_j nur *einen* bestimmten Werth.

13. $F(y) = 0$ besitze einen *j-fachen conischen Knotenpunkt K_j*.

Indem man auch hier, wie in Nr. 11, die Flächen r^{ter} Ordnung, $\psi_i = 0$, durch K_j einfach hindurchlegt, folgt, wie dort, dass K_j für M ein $(n-j)$-facher, für die $A_i(\psi)$ ein $(n+\nu-3)$-facher, für die $A_i\psi_k - A_k\psi_i$ ein $(n+\nu-2)$-facher, für N ein ν-facher Punkt wird.

Giebt man dem Punkt K_j die Coordinaten

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 0$$

so wird:

$$\psi_i = y_1 P_i + y_2 Q_i + y_3 R_i,$$

also

$$\Delta = \left| P_i + y_1 \frac{\partial P_i}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial Q_i}{\partial y_1} + y_3 \frac{\partial R_i}{\partial y_1}, \quad Q_i + y_1 \frac{\partial P_i}{\partial y_2} + y_2 \frac{\partial Q_i}{\partial y_2} + y_3 \frac{\partial R_i}{\partial y_2}, \right.$$
$$\left. R_i + y_1 \frac{\partial P_i}{\partial y_3} + y_2 \frac{\partial Q_i}{\partial y_3} + y_3 \frac{\partial R_i}{\partial y_3}, \qquad y_1 \frac{\partial P_i}{\partial y_4} + y_2 \frac{\partial Q_i}{\partial y_4} + y_3 \frac{\partial R_i}{\partial y_4} \right|.$$

Daher wird K_j für Δ ein Doppelpunkt, für die Δ_{i4} $(i = 1,2,3,4)$ ein 0-facher Punkt, für die Δ_{i1}, Δ_{i2}, Δ_{i3} ein einfacher Punkt; woraus schon folgt, dass derselbe für C_4 zum $(n + \nu - 3)$-fachen, für C_1, C_2, C_3 zum $(n + \nu - 2)$-fachen Punkt, für die $C_h y_k - C_k y_h$ also zum $(n + \nu - 2)$-fachen oder höheren Punkt wird. Betrachtet man aber noch, nach Nr. 11, die Formel

$$C_1 y_2 - C_2 y_1 = \left| A_i, \; y_1 P_i + y_2 Q_i + y_3 R_i, \; R_i + y_1 \frac{\partial P_i}{\partial y_3} + y_2 \frac{\partial Q_i}{\partial y_3} + y_3 \frac{\partial R_i}{\partial y_3}, \right.$$
$$\left. y_1 \frac{\partial P_i}{\partial y_4} + y_2 \frac{\partial Q_i}{\partial y_4} + y_3 \frac{\partial R_i}{\partial y_4} \right|$$
$$= \left| A_i, \frac{1}{r-1} \left(y_1 \sum_k^{1,2,3} \frac{\partial P_i}{\partial y_k} y_k + y_2 \sum_k^{1,2,3} \frac{\partial Q_i}{\partial y_k} y_k + y_3 \sum_k^{1,2,3} \frac{\partial R_i}{\partial y_k} y_k \right), \right.$$
$$\left. R_i + \cdots, \; y_1 \frac{\partial P_i}{\partial y_4} + y_2 \frac{\partial Q_i}{\partial y_4} + y_3 \frac{\partial R_i}{\partial y_4} \right|,$$

so sieht man, dass

$$C_1 y_2 - C_2 y_1, \quad C_1 y_3 - C_3 y_1, \quad C_2 y_3 - C_3 y_2$$

den Punkt K_j zum $(n + \nu)$-fachen Punkt haben. Hieraus folgt:

Die $B_h y_k - B_k y_h$ treffen F in K_j im Allgemeinen wie Flächen mit $(\nu + j - 2)$-fachem Punkte; $B_1 y_2 - B_2 y_1$, $B_1 y_3 - B_3 y_1$, $B_2 y_3 - B_3 y_2$ wie Flächen mit $(\nu + j)$-fachem Punkte.

Führt man dann weiter, wie in Nr. 12, N′ statt N ein, wo die Fläche N′ die Fläche F in K_j nur wie eine Fläche mit α-fachem Punkte trifft, so werden die entsprechenden Flächen $B_h' y_k - B_k' y_h$ sich in K_j auch nur wie Flächen mit $(\alpha + j - 2)$-fachem Punkte,

$$B_1' y_2 - B_2' y_1, \quad B_1' y_3 - B_3' y_1, \quad B_2' y_3 - B_3' y_2$$

wie Flächen mit $(\alpha + j)$-fachem Punkte verhalten, wobei $\alpha = 0$ wird, sobald N′ durch K_j nicht hindurchzugehen braucht.

Ordnet man die B_k' wieder nach absteigenden Potenzen von y_4 und führt, im Falle $\alpha = 0$ ist, erst die Bedingungen ein, dass die $B_1' y_4 - B_4' y_1$ etc. den Punkt zum $(j - 2)$-fachen Punkt, dann die,

dass die $B_1'y_2 - B_2'y_1$ etc. denselben zum j-fachen Punkt haben, so ergiebt sich für die B_k'

$$B_1' = y_1 L + G_{j-1}^{(1)},\quad B_2' = y_2 L + G_{j-1}^{(2)},\quad B_3' = y_3 L + G_{j-1}^{(3)},$$
$$B_4' = y_4 L + G_{j-3}$$

wo $G_{j-1}^{(i)}$, G_{j-3} niedrigstens mit Gliedern $(j-1)^{\text{ter}}$, bez. $(j-3)^{\text{ter}}$ Dimension in y_1, y_2, y_3 beginnen und L willkürlich ist.

Daher werden, wenn $\alpha = 0$ *ist, die Glieder* $(j-2)^{\text{ter}}$ *Dimension in* y_1, y_2, y_3 *von*

$$B_1'y_4 - B_4'y_1,\quad B_2'y_4 - B_4'y_2,\quad B_3'y_4 - B_4'y_3$$

bezüglich von der Form:

$$y_1 X_{j-3},\quad y_2 X_{j-3},\quad y_3 X_{j-3},$$

wo X_{j-3} *für die drei Ausdrücke dasselbe ist,* nämlich das Glied niedrigster Dimension aus $-\, G_{j-3}$.

Im Fall eines *Doppelpunktes*, $j = 2$, werden in K_2: $B_1' = 0$, $B_2' = 0$, $B_3' = 0$, also *alle* Ausdrücke $B_h'y_k - B_k'y_h$ in K_2 verschwinden.

14. Was den *Werth* des Integrals u in dem j-fachen Punkt K_j betrifft, so wird derselbe im Allgemeinen *unbestimmt*, d. h. er variirt von Element zu Element in den unendlich vielen, zu K_j gehörigen, Elementen der Fläche F. Denn diese Werthe sind diejenigen, welche das Integral u in den unendlich vielen Elementen der Curve j^{ten} Grades, S, hat, welche dem Punkt K_j auf f entspricht; in dieser Curve S wird aber u nach dem Vorhergehenden zu einem gewöhnlichen allenthalben endlichen Abel'schen Integral, das von Punkt zu Punkt variiren wird. Im Falle des *Doppelpunkts*, $j = 2$, wird S eine Curve 2^{ten} Grades*), bei der kein von einer Constanten verschiedenes endliches Integral u existirt; so dass alsdann u in K_j nur *einen* Werth hat.

Dasselbe ergiebt sich auch unmittelbar aus den obigen Formeln für die B_k'. Denn hiernach wird, indem N' constant wird:

$$du = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & G_{j-1}^{(1)} & y_1 & dy_1 \\ c_2 & G_{j-1}^{(2)} & y_2 & dy_2 \\ c_3 & G_{j-1}^{(3)} & y_3 & dy_3 \\ c_4 & G_{j-3} & y_4 & dy_4 \end{vmatrix}}{\sum\limits_i^{1\ldots 4} c_i F_i} = \frac{-X_{j-3}\cdot \Sigma \pm c_1 y_2 dy_3}{\sum\limits_i^{1\ldots 3} c_i T_i} + dQ,$$

wo dQ in K_j einwerthig und der erste Theil ein gewöhnliches Abel'sches Curvendifferential ist, das sich auf den Tangentenkegel $T = 0$ in K_j bezieht und das $= 0$ wird für $j = 2$.

*) Vergl. meine o. c. Abh. in Math. Ann. Bd. II, § 1.

Zugleich erkennt man die für die Endlichkeit nothwendige Modification, wenn der Tangentenkegel T von F in K_j mehrfache Kanten enthalten sollte. Dem entsprechen Punkte von derselben Vielfachheit in der Curve S von f (da nach unserer Annahme über die ψ_i sich die Transformation des Kegels in S wie eine lineare verhält), in welchen also der Zähler des Differentialausdrucks sich *adjungirt* verhalten muss; d. h. X_{j-3} muss zum Tangentenkegel T von K_j adjungirt sein. Ist insbesondere dieser Kegel in K_j vom Geschlecht 0, so wird u in K_j nur *einen* Werth haben.

§ 6.

Andere Methoden zur Untersuchung der Endlichkeitsbedingungen des § 5.

15. An Stelle der Untersuchung Nr. 11—12 über die Endlichkeitsbedingungen der Integrale längs einer vielfachen Curve der Fläche lässt sich eine wesentlich einfachere Betrachtung setzen, nämlich die Zurückführung auf die bekannte Normirung der Abel'schen Curvenintegrale.

Soll u, wo, wie in Nr. 1:

$$du = \frac{A\,dy - B\,dx}{\mathsf{N}\,.\,F_z'}$$

sei, in allen Punkten einer j-fachen Curve Σ_j einer Fläche $F(x,y,z)=0$, für welche N nicht verschwinde, endlich sein, so ist jedenfalls nothwendige Bedingung, dass die Fläche $A=0$ von der Ebene $x=a$ in einer Curve geschnitten werde, welche die Schnittpunkte von Σ_j mit $x=a$ zu $(j-1)$-fachen Punkten hat, was auch a sei; d. h. aber, dass A die Curve Σ_j zur $(j-1)$-fachen Curve habe. Dasselbe folgt für B wenn man die Schnitte mit $x=b$, bei beliebigem b, betrachtet.

Somit ergeben sich die Bedingungen von Nr. 12 für A, B, C. Dass dieselben zur Endlichkeit auch hinreichend sind, ersieht man daraus, dass an einem Punkt von Σ_j die Richtung $x=a$, in welcher die Endlichkeit stattfindet, bei dem willkürlichen Coordinatensystem jede beliebige Richtung in diesem Punkte vorstellt.

Zugleich aber erledigt sich auf diesem Wege der Fall einer ganz *beliebig singulären* vielfachen Curve von

$$F(x,y,z)=0 \qquad \text{oder} \qquad f(x_1,x_2,x_3,x_4)=0.$$

Betrachtet man auch hier die Schnittcurven der Fläche F mit dem Ebenenbüschel $x=a$, bez. $y=b$, so ergiebt sich:

Zur Endlichkeit der Integrale längs einer Curve Σ von F oder f, in der N nicht verschwindet, ist nothwendig und hinreichend, dass die Flächen A, B, C zu F, oder die Flächen $A_i x_k - A_k x_i$ zu f, längs Σ adjungirt sind.

16. Auch die am Schlusse von Nr. 13 gewonnenen Resultate, die Bedingungen für die in einem Knotenpunkte K_j endlichen Integrale,

lassen sich durch eine, der von Nr. 14 analoge, Betrachtung nun unmittelbar einsehen. Geht man von dem auf $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ bezüglichen Ausdruck (12), Nr. 3, aus, in dem man $dx_4 = 0$ setzen darf:

$$du = \frac{\begin{vmatrix} k & A_4 x_1 - A_1 x_4 & dx_1 \\ l & A_4 x_2 - A_2 x_4 & dx_2 \\ m & A_4 x_3 - A_3 x_4 & dx_3 \end{vmatrix}}{N.(kf_1 + lf_2 + mf_3)},$$

und betrachtet denselben, wenn ein j-facher Knotenpunkt K_j von f die Coordinaten $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ hat, für kleine Werthe von x_1, x_2, x_3, so muss sich u, wie schon in Nr. 14 gesagt ist, wenn es in K_j nicht unendlich werden soll, in der Nähe von $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ verhalten wie ein auf den Tangentenkegel T von f in K_j bezügliches gewöhnliches Abel'sches Integral v. Der Nenner des Differentials dieses Integrals v wird, wenn $N = 0$ den Punkt K_j zum α-fachen Punkt hat, also

$$N = x_4^{\nu-\alpha} N_\alpha + \cdots$$

ist, zu

$$N_\alpha (kT_1 + lT_2 + mT_3),$$

der Zähler also zu

$$X_{j+\alpha-3} \cdot \begin{vmatrix} k & x_1 & dx_1 \\ l & x_2 & dx_2 \\ m & x_3 & dx_3 \end{vmatrix},$$

wo $\frac{X_{j+\alpha-3}}{N_\alpha}$ ein Ausdruck der Dimension $j-3$ in x_1, x_2, x_3 ist, welcher sich zu $T = 0$ adjungirt verhalten muss, wenn das Integral v in den vielfachen Kanten von $T = 0$ endlich bleiben soll. Damit sich aber du für kleine Werthe von x_1, x_2, x_3 auf dieses Differential von v für jeden Werth von k, l, m reducirt, wird nothwendig bis auf Glieder höherer Dimension in x_1, x_2, x_3, mit Hülfe von $f = 0$:

$$A_4 x_1 - A_1 x_4 = x_1 X_{j+\alpha-3}, \quad A_4 x_2 - A_2 x_4 = x_2 X_{j+\alpha-3},$$
$$A_4 x_3 - A_3 x_4 = x_3 X_{j+\alpha-3},$$

was für den Fall $\alpha = 0$ die am Schlusse von Nr. 13 angegebene Form ist.

Sollte aber $f = 0$ in K_j eine höhere, etwa uniplanare, Singularität besitzen, so reicht die Betrachtung dieser Nummer nicht aus, man muss dieselbe vielmehr auf dem Wege von Nr. 13 weiter verfolgen.

17. Auch die in Nr. 4 gegebene Forderung, dass sich vier solche ganze Functionen $(n + \nu - 3)^{\text{ten}}$ Grades in x_1, x_2, x_3, x_4:

$$\Theta_i = A_i + x_i Q$$

bestimmen lassen, für welche

$$\sum_i \Theta_i f_i \equiv 0,$$

ohne Hülfe von $f = 0$, liefert eine Reihe von Eigenschaften für die Ausdrücke Θ_i oder die $A_i x_k - A_k x_i$, darunter auch Bedingungen der Endlichkeit der Integrale.

So folgt zuerst, dass in einem Punkt der Fläche f, welcher

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0$$

zur Tangentenebene hat, auch

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 + a_4 A_4$$

verschwindet. Denn sei der Punkt etwa $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ mit der Tangentenebene $x_1 = 0$, so wird in diesem Punkte $f_2 = 0$, $f_3 = 0$, $f_4 = 0$, also $\Theta_1 = 0$ und $A_1 = 0$; hieraus weiter auch $A_1 x_4 - A_4 x_1 = 0$ oder $A = 0$.

Sei ferner K_2 ein konischer Doppelpunkt von f, ohne Doppelkante, mit den Coordinaten $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Entwickelt man den Ausdruck $\Sigma \Theta_i f_i$ nach absteigenden Dimensionen von x_4, so folgt schon aus dem Gliede 1ter Dimension in x_1, x_2, x_3, dass $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$, also auch A_1, A_2, A_3 und alle $A_i x_k - A_k x_i$ im Doppelpunkt K_2 verschwinden müssen.

Hat aber K_2 eine Doppelkante, so dass der Kegel in K_2 etwa zu $x_1 x_2$ wird, so ergeben die Glieder erster Dimension von $\Sigma \Theta_i f_i$ nur das Verschwinden von Θ_1, Θ_2 in K_2; die Glieder 2ter Dimension dann, sobald in der Entwicklung von f:

$$f = x_4^{n-2} \cdot x_1 x_2 + x_4^{n-3} \psi_3 + x_4^{n-4} \psi_4 + \cdots$$

die Grösse ψ_3 nicht für $x_1 = x_2 = 0$ verschwindet, auch das Verschwinden von Θ_3 in K_2, und ferner für die Glieder erster Dimension von Θ_1, Θ_2 die Formen

$$\Theta_1 = a_1 x_1, \quad \Theta_2 = a_2 x_2.$$

In diesem Falle verschwinden also ebenfalls alle $A_i x_k - A_k x_i$ im Doppelpunkt und $A_1 x_4 - A_4 x_1$, $A_2 x_4 - A_4 x_2$, d. h. A und B, haben daselbst bez. x_1 und x_2 zur Tangentenebene.

Auch für den conischen j-fachen Punkt ergeben sich auf diese Weise die in Nr. 13 gefundenen Bedingungen.

Wie man sieht, zeigt dieser Weg zwar, dass die im Früheren als solche gefundenen *Endlichkeits*bedingungen der Integrale in den vielfachen Elementen der Fläche nicht unabhängig sind von den *Existenz*bedingungen der Integrale selbst; aber auf der einen Seite trennt derselbe die beiden Classen von Bedingungen nicht von einander, auf der andern Seite kann er auch nicht in allen Fällen alle Endlichkeitsbedingungen liefern.

Das letztere tritt zum Beispiel bei einer mehrfachen Curve auf. Ist f etwa eine Kegelfläche mit mehrfachen Kanten:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

wo f kein x_4 enthält, so wird die obige Identität bei *beliebigem* Θ_4 befriedigt durch $\Theta_1 = 0$, $\Theta_2 = 0$, $\Theta_3 = 0$; und selbst die Hinzunahme der Bedingung der Integrabilität $\sum \frac{\partial \Theta_i}{\partial x_i} = 0$, wenn $N = 1$ ist, verlangt nur, dass Θ_4 von x_4 unabhängig genommen werde. Aber das daraus hervorgehende Differential

$$du = \frac{\Theta_4 \cdot \Sigma \pm k_1 x_2 dx_3}{\Sigma k_i f_i}$$

liefert nur dann ein endliches Integral, wenn Θ_4 ausserdem noch die Bedingung erfüllt, in den vielfachen Kanten von $f = 0$ zu f adjungirt zu sein.

§ 7.

Beziehungen zwischen verschiedenen Differentialausdrücken.

18. Zwei zu einer Fläche F, bez. f, gehörige Differentialausdrücke

$$du = \frac{A\,dy - B\,dx}{\mathrm{N} \cdot F_z'} = \frac{\Sigma \pm k_1 A_2 x_3 dx_4}{N \cdot \Sigma k_i f_i},$$

$$du' = \frac{A' dy - B' dx}{\mathrm{N}' \cdot F_z'} = \frac{\Sigma \pm k_1 A_2' x_3 dx_4}{N' \cdot \Sigma k_i f_i},$$

und deren Integrale u, u', sollen dann *von einander unabhängig* heissen, wenn die Functionaldeterminante von u, u':

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u'}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u'}{\partial x},$$

also auch

$$AB' - BA',$$

nicht für alle Punkte von F verschwindet. Da aus

$$A F_x' + B F_y' + C F_z' = 0,$$
$$A' F_x' + B' F_y' + C' F_z' = 0$$

folgt:

$$\frac{BC' - CB'}{F_x'} = \frac{CA' - AC'}{F_y'} = \frac{AB' - BA'}{F_z'},$$

so hat man dann auch

$$BC' - CB' \neq 0, \qquad CA' - AC' \neq 0.$$

Nach § 1, (11) wird

$$x_4^{2n+\nu+\nu'-6}(AB' - BA') = \begin{vmatrix} A_1 & A_1' & x_1 \\ A_2 & A_2' & x_2 \\ A_4 & A_4' & x_4 \end{vmatrix},$$

so dass sich die Bedingung auch schreibt: es soll

$$\Sigma \pm k_1\, A_2 A_3' x_4,$$

bei irgend *einem* Werthsystem der k_i nicht für *alle* Punkte von f verschwinden.

19. Es soll nun bewiesen werden, dass der von den k_i unabhängige Ausdruck

$$\frac{\Sigma \pm k_1 A_2 A_3' x_4}{\Sigma k_i f_i} = Q$$

eine *ganze* Function der Coordinaten wird (mit Hülfe von $f = 0$) und dass $\frac{Q}{N \cdot N'}$ sich zu f adjungirt verhält.

Zunächst möge f wieder nur gewöhnliche vielfache Curven enthalten. Eine solche j-fache Curve von f, Σ_j, wird für $\Sigma k_i f_i$ eine $(j-1)$-fache Curve, für $\Sigma \pm k_1 A_2 A_3' x_4$ aber, wie $AB' - BA'$ zeigt, wie $[2(j-1)+\alpha+\alpha']$-fache Curve sein, wenn N und N' bez. α- und α'-fach hindurchgehen. Folglich wird, nach meinem in Nr. 12 citirten Satze aus Math. Ann. Bd. VI.

$$\Sigma \pm k_1 A_2 A_3' x_4 = Q \cdot \Sigma k_i f_i + L \cdot f,$$

wobei Q eine *ganze* Function ist, welche noch $(j-1+\alpha+\alpha')$-fach durch Σ_j geht. $\frac{Q}{N N'}$ wird also ein rationaler Ausdruck, der $(n-4)^{\text{ten}}$ Dimension, der sich in Σ_j adjungirt verhält.

Nach Nr. 13 verhält sich in einem isolirten j-fachen Punkte von f der Ausdruck $\frac{\Sigma \pm k_1 A_2 A_3' x_4}{N \cdot N'}$ wie eine Fläche mit $(2j-3)$-fachem Punkte, $\frac{Q}{N N'}$ also wie eine Fläche mit $(j-2)$-fachem Punkte, d. h. zu f adjungirt; und verschwindet noch ausserdem in einem Doppelpunkt von f.

Zur Erledigung einer singulären vielfachen Curve schlagen wir wieder den Weg von Nr. 10 ein, indem wir eine solche Curve Σ_j auf einer Fläche $F(y)$ untersuchen, der auf f eine nicht-singuläre Curve S entspricht.

Nun wird mit den Bezeichnungen der Nr. 8:

$$\Sigma \pm k_1 A_2 A_3' x_4$$

$$= \left| \sum_h c_h \frac{\partial \psi_i}{\partial y_h}, \quad \frac{r}{\Delta} \sum_h C_h \frac{\partial \psi_i}{\partial y_h}, \quad \frac{r}{\Delta} \sum_h C_h' \frac{\partial \psi_i}{\partial y_h}, \quad \frac{1}{r} \sum_h y_h \frac{\partial \psi_i}{\partial y_h} \right|$$

$$(i = 1, 2, 3, 4)$$

$$= \frac{r}{\Delta} \Sigma \pm c_1 C_2 C_3 y_4 = \frac{r}{\Delta} M^2 \Sigma \pm c_1 B_2 B_3' y_4,$$

also

$$\frac{\Sigma \pm k_1 A_2 A_3' x_4}{N \cdot N' \cdot \Sigma k_i f_i} = \frac{rM}{\Delta} \cdot \frac{\Sigma \pm c_1 B_2 B_3' y_4}{\mathsf{N} \cdot \mathsf{N}' \cdot \Sigma c_h F_h},$$

vermöge

$$F = 0,$$

wobei

$$N(\psi) \cdot N'(\psi) = \mathsf{N}(y) \cdot \mathsf{N}'(y)$$

ist.

Für die Fläche f dürfen wir annehmen, dass

$$\frac{\Sigma \pm k_1 A_2 A_3 x_4}{\Sigma k_i f_i} = Q$$

vermöge $f = 0$ eine ganze Function wird, und dass $\frac{Q}{NN'}$, ein Ausdruck $(n-4)^{\text{ter}}$ Dimension, zu f adjungirt sei. Nun ist aber, nach meinem in der Einleitung citirten Aufsatz, Math. Ann. Bd. VIII, § 9:

$$Q(\psi_1, \cdots \psi_4) \cdot \Delta = M \cdot Q',$$

wo Q' vermöge $F = 0$ eine ganze Function der Coordinaten y wird, und wo $\frac{Q'}{\mathsf{N} \cdot \mathsf{N}'}$ sich zu F adjungirt verhält, wenn $\frac{Q}{N \cdot N'}$ sich zu f so verhält; zugleich wird $\frac{Q'}{\mathsf{N} \cdot \mathsf{N}'}$ von der $(n'-4)^{\text{ten}}$ Dimension, wenn F vom Grade n' ist. Dies sagt also aus, dass

$$\frac{r \Sigma \pm c_1 B_2 B_3' y_4}{\Sigma c_h F_h} = Q'$$

und $\frac{Q'}{\mathsf{N}\mathsf{N}'}$ längs der singulären Curve Σ_j von $F(y)$ die im Satze verlangten Eigenschaften besitzen.

Man erkennt hierdurch zugleich das sehr specielle Verhalten der Ausdrücke $AB' - A'B$ oder $\Sigma \pm k_1 A_2 A_3' x_4$ längs einer singulären Curve von f. So haben dieselbe eine Rückkehrcurve von f, in der N und N' nicht verschwinden mögen, nicht nur zur Doppelcurve, sondern berühren noch an jeder Stelle dieser Curve mit *einem* Blatt das Element der Fläche f.

20. Als unmittelbare Anwendung von Nr. 19 folgt, dass eine Fläche 4^{ter} Ordnung, $f = 0$, nicht zwei von einander unabhängige *endliche* Integrale (Integrale *erster* Gattung) besitzen kann. Denn für diese wäre $N = 1$, $N' = 1$ zu setzen und

$$\Sigma \pm k_1 A_2 A_3' x_4 \equiv Q \sum_i k_i f_i,$$

eine Gleichung, welche *ohne* Hülfe von $f = 0$ erfüllt sein müsste, da das Ganze nur von der 3^{ten} Dimension in den Coordinaten ist; und in welcher weiter die Constante Q nicht $= 0$ sein darf, da die Integrale von einander unabhängig sein sollen. Setzt man aber die willkürlichen Grössen $k_i = x_i$, so geht dieselbe über in

$$f \equiv 0 \text{ für } \textit{alle} \text{ Werthsysteme der } x_i.$$

21. In meinem o. c. Aufsatze, Math. Ann. Bd. VIII, habe ich das *Flächengeschlecht* p einer Fläche f, n^{ter} Ordnung definirt durch die Anzahl p der linear-unabhängigen, zu f adjungirten Flächen $(n-4)^{\text{ter}}$ Ordnung, φ_f. Zu diesen Flächen φ_f gehören die in Nr. 19 gefundenen Flächen Q, für den Fall zweier unabhängiger *endlicher* Integrale, also für $N = 1$, $N' = 1$.

Hat eine Fläche mehr als zwei unabhängige endliche Integrale, so sind, im Sinne von Nr. 18, die übrigen natürlich von diesen zwei, u, u', abhängig, können aber *linear*-unabhängig von denselben sein. Lineare homogene Verbindungen von u und u' sollen nicht als neue Integrale bezeichnet werden. Dann hat man den Satz:

Eine Fläche vom Flächengeschlecht 1 kann höchstens zwei endliche Integrale besitzen.

Denn im Falle $p=1$ existirt nur *eine* Fläche $\varphi_f = Q$. Für drei Integrale u, u', u'' muss also sein:

$$A'B'' - B'A'' = \alpha Q \cdot F'_z, \quad A''B - B''A = \alpha' Q \cdot F'_z,$$
$$AB' - BA' = \alpha'' Q \cdot F'_z,$$

wo die $\alpha, \alpha', \alpha''$ Constanten werden; und hieraus:

$$\alpha A + \alpha' A' + \alpha'' A'' = 0, \quad \alpha B + \alpha' B' + \alpha'' B'' = 0,$$

d. h.

$$\alpha u + \alpha' u' + \alpha'' u'' = 0.$$

§ 8.

Die Flächen vom Flächengeschlecht 1 mit zwei unabhängigen endlichen Integralen.

22. In vorhergehender Nummer ist bewiesen worden, dass eine Fläche F vom Flächengeschlecht 1 höchstens zwei unabhängige totale Differentiale du, du' erster Gattung besitzen kann, indem alle übrigen zu F gehörigen Differentiale dieser Art lineare homogene Functionen von du, du' werden müssen.

Jetzt soll gezeigt werden, *dass, im Falle eine Fläche F vom Flächengeschlecht 1 zwei unabhängige totale Differentialausdrücke erster Gattung du, du' besitzt, die Coordinaten der Fläche sich als eindeutige Functionen der beiden Integrale u, u' ausdrücken lassen, welche für alle endlichen Werthe der u, u' den Charakter von rationalen Functionen haben.*

Seien

$$(1) \qquad du = \frac{A\,dy - B\,dx}{F'_z}, \quad du' = \frac{A'dy - B'dx}{F'_z}$$

die beiden zu

$$(2) \qquad F(x, y, z) = 0$$

gehörigen Differentialausdrücke erster Gattung, deren Integrale u, u' für alle Punkte von $F=0$ endliche und bestimmte Werthe haben (in dem in Nr. 12 und Nr. 14 näher bezeichneten Sinn); dabei soll, wegen der Unabhängigkeit von u, u',

$$(3) \qquad AB' - BA' = Q \cdot F'_z$$

nicht für alle Punkte von $F=0$ verschwinden.

Die Umkehrung der beiden Ausdrücke schreibt sich

$$(4)\qquad dx = \frac{A'du - Adu'}{Q}, \quad dy = \frac{B'du - Bdu'}{Q},$$

oder allgemeiner, wenn $\chi(x, y, z)$ irgend eine Function von x, y, z vorstellt:

$$(5)\qquad Q\,d\chi = \left(A'\frac{\partial\chi}{\partial x} + B'\frac{\partial\chi}{\partial y} + C'\frac{\partial\chi}{\partial z}\right)du$$
$$- \left(A\frac{\partial\chi}{\partial x} + B\frac{\partial\chi}{\partial y} + C\frac{\partial\chi}{\partial z}\right)du'.$$

Geht man von irgend einem Werthsystem $u = u_0$, $u' = u_0'$ aus, für welches die zugehörigen Werthe der Coordinaten $x = a$, $y = b$, $z = c$ endlich sind, ohne dass darin die ganze Function Q der Coordinaten x, y, z verschwindet, so wird nach (4), (5) für dieses Werthsystem auch keiner der höheren Differentialquotienten der Coordinaten nach u, u' zu unendlich. Somit sind — nach Cauchy — x, y an dieser Stelle holomorphe Functionen von u, u'; nämlich solche, die daselbst den Charakter von ganzen rationalen Functionen haben, also sich nach ganzen Potenzen von $u - u_0$ und $u' - u_0'$ entwickeln lassen. Zur Fortsetzung dieser Functionen bleiben also nur die Werthsysteme u, u' zu betrachten, für welche eine der zugehörigen x, y, z zu ∞ wird oder der Punkt (x, y, z) auf die Fläche $Q = 0$ zu liegen kommt.

23. Beide Fälle sollen mittels rational-eindeutiger Transformation der Fläche F nach Nr. 10 behandelt werden Eine rationale Substitution

$$(6)\qquad \xi = \psi_1(x, y, z), \quad \eta = \psi_2(x, y, z), \quad \zeta = \psi_3(x, y, z),$$

die vermöge $F(x, y, z) = 0$ eindeutig umkehrbar sei in eine ebensolche

$$(7)\qquad x = \chi_1(\xi, \eta, \zeta), \quad y = \chi_2(\xi, \eta, \zeta), \quad z = \chi_3(\xi, \eta, \zeta),$$

führe $F = 0$ über in eine Fläche

$$(8)\qquad f(\xi, \eta, \zeta) = 0.$$

So erhalte man nach Nr. 10:

$$(9)\qquad du = \frac{\mathsf{A}\,d\eta - \mathsf{B}\,d\xi}{f'_\zeta}, \quad du' = \frac{\mathsf{A}'d\eta - \mathsf{B}'d\xi}{f'_\zeta},$$

$$(10)\qquad \mathsf{AB}' - \mathsf{BA}' = Q' f'_\zeta,$$

$$(11)\qquad d\xi = \frac{\mathsf{A}'du - \mathsf{A}du'}{Q'}, \quad d\eta = \frac{\mathsf{B}'du - \mathsf{B}du'}{Q'}.$$

Vermöge dieser Transformation erledigt sich der erste Fall unmittelbar. Denn wird x, y oder z zu unendlich, so führe man, etwa nach (5), Nr. 22, statt x, y, z solche drei Grössen, etwa

$$\xi = \frac{1}{x}, \quad \eta = \frac{y}{x}, \quad \zeta = \frac{z}{x},$$

ein, welche im betreffenden Werthsystem u_0, u_0' endlich, also, nach Nr. 22, holomorphe Functionen von $u - u_0$, $u' - u_0'$ werden. Die Grössen

$$x = \frac{1}{\xi}, \quad y = \frac{\eta}{\xi}, \quad z = \frac{\zeta}{\xi}$$

haben also an dieser Stelle den Charakter von rationalen Functionen von u, u'.

24. Wir betrachten nun die Punkte von $F = 0$, in welchen die ganze Function Q verschwindet.

$Q = 0$ ist die Gleichung der *einen* existirenden Fläche $(n-4)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche zur Fläche n^{ter} Ordnung, $F = 0$, adjungirt ist. $Q = 0$ geht in unserem Falle (Nr. 19) auch noch durch etwaige isolirte Doppelpunkte von $F = 0$ hindurch und wird noch, ausser den vielfachen Curven von F, in einer Reihe von *einfachen* Curven von F, $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$, schneiden können.

Einer *mehrfachen* Curve Σ_j von F lassen wir auf $f = 0$ (Nr. 23, (8)) eine einfache Curve S entsprechen, durch welche — nach unseren früheren Betrachtungen (Nr. 11—12), oder auch nach der schon in Nr. 19 citirten, in meinem Aufsatze Math. Ann. Bd. VIII ausgeführten, Transformation von Q in Q' — die Fläche Q' von (10), Nr. 23 gar nicht hindurchgeht. Folglich werden längs der Curve S die Grössen ξ, η, ζ den Charakter von rationalen Functionen von u, u' haben; also auch ebenso x, y, z, die selbst rationale Functionen von ξ, η, ζ sind, längs Σ_j; d. h. sie werden sich an jeder Stelle von Σ_j als Quotienten zweier Potenzreihen nach $u - u_0$, $u' - u_0'$ darstellen lassen.

Genau dasselbe gilt für die isolirten k-fachen Punkte P_k von F $(k > 2)$. Auch sind diejenigen Elemente von Σ_j oder Richtungen eines k-fachen Punktes P_k, in welchen eine der Curven $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ eintrifft, in die Betrachtung eingeschlossen.

Dagegen scheinen zunächst solche einzelne Punkte von Σ_j oder Richtungen von P_k ausgeschlossen, welchen auf $f = 0$ wieder in vielfache Elemente von f fallende Punkte entsprechen; in welchen also $f'_\zeta = 0$, $AB' - BA' = 0$ würden. Da man aber diese Punkte von Σ_j oder Richtungen von P_k auf diesen Gebilden ganz beliebig variiren lassen kann, indem man die willkürliche Transformation von Nr. 23 ändert, bilden sie in Wirklichkeit keine Ausnahme.

25. Um endlich die Curven $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ von Nr. 24, und die isolirten Doppelpunkte von F, welche auf diesen Curven liegen müssen, zu erledigen, sind nur Transformationsbetrachtungen anzustellen, welche ich schon in meinem wiederholt citirten Aufsatze in Math. Ann. Bd. VIII, §§ 9—12, eingehend dargelegt habe. Daselbst habe ich diejenigen *einfachen* Curven einer Fläche F, n^{ter} Ordnung, von beliebigem Flächengeschlecht p, untersucht, durch welche *alle* zu F adjungirten Flächen

φ_F vermöge der Adjunctionsbedingungen noch von selbst hindurchgehen, Curven, welche ich als „ausgezeichnete" Curven von F bezeichnet habe. Ich habe gezeigt, dass diese Curven die einzigen sind, welchen bei einer rational-eindeutigen Transformation von F in eine Fläche f *einfache Punkte von* f als Fundamentalpunkte der Transformation entsprechen können.

Zu den „ausgezeichneten" Curven gehören nun die Curven $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ auf der hier zu betrachtenden Fläche F. Denn da $p = 1$ ist, existirt überhaupt hier nur *eine* zu F adjungirte Fläche φ_F, die Fläche $Q = 0$, und diese durch die Adjunctionsbedingung bestimmte Fläche geht alsdann noch durch eine Reihe von einfachen Curven von F, welche eben mit $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ bezeichnet sind.

Nimmt man auf f einen nicht-speciellen einfachen Punkt Π_1 an — d. h. einen solchen, durch welchen die zu f gehörige Fläche φ_f, $Q' = 0$, *nicht* hindurchgeht — und lässt in diesem Punkt den Nenner und die Zähler der drei Ausdrücke χ_1, χ_2, χ_3 in (7), Nr. 23 einfach verschwinden, so entspricht diesem Punkte, nach meinem Aufsatze über eindeutiges Entsprechen in Math. Ann. Bd. II, eine *Gerade* Γ_1 von F, und zwar den Richtungen von f in Π_1 einzeln die Punkte der Gerade Γ_1. Giebt man überhaupt dem Nenner und den Zählern der Ausdrücke χ_1, χ_2, χ_3 in Π_1 einen ϱ-fachen Punkt, so erhält man auf F eine *rationale Raumcurve* Γ_1 der ϱ^{ten} Ordnung, deren Punkte wiederum eindeutig den Richtungen von f in Π_1 entsprechen.

Die Coordinaten ξ, η, ζ sind aber an der nicht-singulären Stelle Π_1, oder $u = u_0$, $u' = u_0'$, holomorphe Functionen von u, u'; also behalten für $u = u_0$, $u' = u_0'$ die Grössen x, y, z, als rationale Functionen von ξ, η, ζ, den Charakter als rationale Functionen von u, u', obwohl sie daselbst unbestimmt werden.

Solcher einfacher getrennter Punkte $\Pi_1, \Pi_2, \ldots$ kann man beliebig viele auf f als Fundamentalpunkte einer Transformation (7), Nr. 23 nehmen, und erhält dann eine Fläche F mit beliebig vielen rationalen Curven $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$, die ausgezeichnete einfache Curven von F werden, in denen Q zu Null wird. Diese Curven $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ werden einander nicht schneiden, ausser in k-fachen Punkten P_k $(k > 2)$ von F, durch welche die Fläche Q, als zu F adjungirt, von selbst hindurchgeht. Denn schneiden sich Γ_1 und Γ_2 in einem Punkt P, der isolirter Doppelpunkt oder einfacher Punkt von F ist, so ist dieser Punkt zunächst, da ihm jedenfalls *zwei* getrennte Punkte Π_1, Π_2 entsprechen, auch Fundamentalpunkt von F für die Substitutionsformeln (6), Nr. 23, so dass ihm eine Curve G auf f entspricht, welche durch Π_1 und Π_2 hindurchgeht; durch diese Curve G muss dann die Fläche φ_f, oder Q', einfach oder doppelt gehen, je nachdem P ein Doppelpunkt oder ein einfacher Punkt von F ist, weil $\varphi_f = Q$ durch P einfach geht,

bez. dort F berührt*) — entgegen der Voraussetzung, dass die Punkte Π_1, Π_2 nicht auf $Q' = 0$ angenommen sind. Aus demselben Grunde kann auch die Curve Γ_1 sich nicht selbst in einem Punkte P von F schneiden, welcher von den k-fachen Punkten ($k > 2$) verschieden ist; denn auch diesem Punkte P müsste eine ausgezeichnete Curve von f entsprechen, welche durch Π_1 sogar mit zwei Zweigen geht.

Ein anderes Verhalten der Curven $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ von F kann also nur eintreten:

α) wenn zwei Fundamentalpunkte Π_1, Π_2 von f unendlich nahe zusammenrücken, d. h. wenn für die Transformationsformeln χ von (7) eine *Fundamentalrichtung* existirt; in diesem Falle rücken auch die entsprechenden Curven Γ_1, Γ_2 von F einander unendlich nahe, d. h. die Fläche Q *berührt* F *längs* Γ_1;

β) wenn der einfache Punkt Π_1 von f selbst auf einer ausgezeichneten Curve G von f liegt; in diesem Falle aber zeigen wiederum die § 19 citirten Formeln des § 9 meines eben genannten Aufsatzes für die Transformation von Q', dass $Q = 0$ durch die entsprechende Curve Γ_1 *doppelt* hindurchgeht, d. h. F längs Γ_1 berührt. Auch hier kann man dann — indem man f weiter in eine Fläche f' überführt, auf welcher der Curve G von f ein einfacher Punkt entspricht — F so in eine Fläche f' transformiren, dass Γ_1 zwei benachbarte Fundamentalpunkte von f' entsprechen; so dass der Fall β) auf den Fall α) zurückführt.

Da nun die benachbarten Punkte Π_1, Π_2 von f an einer nichtspeciellen Stelle von f liegen, so sind ξ, η, ζ auch hier holomorph als Functionen von u, u', und für x, y, z bleibt wiederum der rationale Charakter als Functionen von u, u' erhalten, so singulär auch die Zuordnung der unendlich vielen Werthsysteme der x, y, z zu dem *einen* entsprechenden Werthsystem $u = u_0$, $u' = u_0'$ wird.

Durch Nr. 23, 24, 25 ist aber der Satz von Nr. 22 für alle Punkte von $F = 0$ bewiesen.

26. Dass in dem in Nr. 25 unter α) betrachteten Falle ein Schneiden von Curven Γ_1, Γ_2, und zwar in einem einfachen oder Doppelpunkte von F, eintreten kann, aber nur, wenn Q wenigstens längs *einer* der beiden Curven Γ_1, Γ_2 die Fläche F berührt, will ich an den einfachsten Fällen entwickeln. Diese Darlegung ist übrigens nichts weiter als eine Fortsetzung der Entwicklungen meines in der Einleitung citirten Aufsatzes, Math. Ann. Bd. II. Ich werde die Darstellung so halten, dass sie zugleich einen Einblick giebt in die einfachsten Arten der Unbestimmtheit, welche bei den eindeutigen Functionen von zwei Variablen u, u' eintreten können, ohne den rationalen Charakter dieser Functionen zu stören.

---

*) Vergl. meinen Aufsatz, Math. Ann. Bd. VIII, § 9.

Der Einfachheit halber lege ich in der Transformation von Nr. 23 den Fundamentalpunkt auf $f(\xi, \eta, \zeta) = 0$ in den Punkt Π mit den Coordinaten

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0;$$

und schreibe

$$0 = f(\xi, \eta, \zeta) \equiv \zeta + f_2 + f_3 + \cdots \tag{12}$$

wo f_i eine homogene Function i^{ter} Ordnung von ξ, η, ζ vorstellt. Die Substitutionsformeln (7) zwischen $f = 0$ und $F(x, y, z) = 0$ seien hier geschrieben:

$$x = \frac{\chi_1(\xi, \eta, \zeta)}{\chi_4(\xi, \eta, \zeta)}, \quad y = \frac{\chi_2(\xi, \eta, \zeta)}{\chi_4(\xi, \eta, \zeta)}, \quad z = \frac{\chi_3(\xi, \eta, \zeta)}{\chi_4(\xi, \eta, \zeta)}, \tag{13}$$

wo die χ_i ganze nicht-homogene Functionen von ξ, η, ζ bedeuten.

Durch Entwicklung von (12) ergebe sich

$$\zeta = L_2 + L_3 + \cdots, \tag{14}$$

wo die L_i ganze homogene Functionen i^{ter} Ordnung von ξ, η sind, und zwar

$$\begin{cases} L_2 = a_0 \xi^2 + a_1 \xi\eta \ + a_2 \eta^2, \\ L_3 = b_0 \xi^3 + b_1 \xi^2 \eta + b_2 \xi \eta^2 + b_3 \eta^3, \quad \text{etc.} \end{cases} \tag{14'}$$

Ferner sei, indem man zunächst die von $\xi = 0$ verschiedenen Richtungen an Π behandelt, zuerst gesetzt:

$$\eta = \mu\xi + \mu_1 \xi^2 + \mu_2 \xi^3 + \cdots, \tag{15}$$

also

$$\zeta = \nu_1 \xi^2 + \nu_2 \xi^3 + \cdots, \tag{16}$$

wo

$$\nu_1 = a_0 + a_1 \mu + a_2 \mu^2, \quad \nu_2 = a_1 \mu_1 + 2 a_2 \mu \mu_1 + b_0 + b_1 \mu + b_2 \mu^2 + b_3 \mu^3, \quad \text{etc.} \tag{16'}$$

Indem man die Richtung $\xi = 0$ als eine für die Transformation nicht-ausgezeichnete annimmt, braucht man sie nicht besonders zu untersuchen, was andernfalls durch gleichzeitige Entwicklung von ξ und η nach ganzen Potenzen eines Parameters t geschehen würde. Weiterhin werden wir übrigens auch für die von $\xi = 0$ verschiedenen Richtungen diese allgemeineren Entwicklungen in besonderen Fällen anzuwenden haben.

Für die *Integrale* u, u' hat man im Punkt Π eine Entwicklung

$$\begin{cases} u - u_0 \ = (\alpha\, \xi + \beta\, \eta) + M_2 + \cdots, \\ u' - u_0' = (\alpha' \xi + \beta' \eta) + M_2' + \cdots, \end{cases} \tag{17}$$

wo

$$\alpha\beta' - \beta\alpha' \neq 0,$$

oder

$$\begin{cases} u - u_0 = (\alpha + \beta\, \mu)\xi + \xi^2 \tau(\xi), \\ u' - u_0' = (\alpha' + \beta' \mu)\xi + \xi^2 \tau'(\xi), \end{cases} \tag{17'}$$

wobei $\tau(\xi)$, $\tau'(\xi)$ holomorph in ξ sind; und aus (17) ergiebt die Umkehrung für ξ, η Potenzreihen in $u - u_0$, $u' - u_0'$, welche mit linearen Gliedern beginnen.

α) Die χ_i von (13) mögen in Π in erster Ordnung verschwinden, ohne Fundamentalrichtung auf f.

Schreibt man

$$\chi_i = k_i\xi + l_i\eta + m_i\zeta + \chi_i',$$

wo χ_i' von höherer als 1ter Dimension in ξ, η, ζ, so wird vermöge (15), (16):

$$(18) \qquad x = \frac{k_1 + l_1\mu}{k_4 + l_4\mu} + \xi\lambda_1(\xi), \quad y = \frac{k_2 + l_2\mu}{k_4 + l_4\mu} + \xi\lambda_2(\xi),$$
$$z = \frac{k_3 + l_3\mu}{k_4 + l_4\mu} + \xi\lambda_3(\xi),$$

wo die $\lambda_i(\xi)$ holomorphe Functionen von ξ (Reihen, die nach ganzen positiven Potenzen von ξ fortschreiten) vorstellen. Dem Punkt Π entspricht also die *Gerade* Γ von F:

$$(19) \qquad x = \frac{k_1 + l_1\mu}{k_4 + l_4\mu}, \quad y = \frac{k_2 + l_2\mu}{k_4 + l_4\mu}, \quad z = \frac{k_3 + l_3\mu}{k_4 + l_4\mu};$$

gehört zur Richtung $\mu = \mu_0$ der Punkt $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, so liefert (18) an dieser Stelle genauer:

$$(20) \qquad \begin{cases} x - x_0 = (\alpha_1 + \beta_1\mu_1)\xi + \xi^2\sigma_1(\xi), \\ y - y_0 = (\alpha_2 + \beta_2\mu_1)\xi + \xi^2\sigma_2(\xi), \\ z - z_0 = (\alpha_3 + \beta_3\mu_1)\xi + \xi^2\sigma_3(\xi), \end{cases}$$

wo die $\sigma_i(\xi)$ holomorph in ξ sind; Entwicklungen nach ganzen Potenzen von ξ und $\mu_1\xi$, wo

$$\mu_1 = \lim \frac{\eta - \mu_0\xi}{\xi^2} \qquad \left(\xi = 0, \lim \frac{\eta}{\xi} = \mu_0\right),$$

während die Coefficienten von μ_0 abhängen. Die Umkehrungen derselben ergeben ξ und $\mu_1\xi$ als Potenzreihen in $x - x_0$, $y - y_0$, die mit linearen Gliedern, $\eta - \mu_0\xi$ als Potenzreihe, die mit quadratischem Gliede anfängt.

Für die *Integrale* u, u' sind die zugehörigen Entwicklungen in (17') und (20) gegeben, wenn man in jenen $\mu = \mu_0$ setzt. Setzt man die obengenannten Reihen von ξ und η nach Potenzen von $x - x_0$, $y - y_0$ in (17) ein, so wird

$$u - u_0 = \frac{\alpha + \beta\mu_0}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}\left[\alpha_2(x - x_0) - \beta_2(y - y_0)\right] + U_2,$$

$$u' - u_0' = \frac{\alpha' + \beta'\mu_0}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}\left[\alpha_2(x - x_0) - \beta_2(y - y_0)\right] + U_2',$$

wo U_2, U_2' Potenzreihen in $x - x_0$, $y - y_0$ sind, welche mit Gliedern quadratischer Dimension anfangen. Umgekehrt lassen sich hieraus $x - x_0$ und $y - y_0$ als Potenzreihen in

$$u - u_0$$

und

$$\frac{(u' - u_0') - v_0(u - u_0)}{u - u_0}$$

darstellen, wo

$$v_0 = \frac{\alpha' + \beta' \mu_0}{\alpha + \beta \mu_0}.$$

Für den Fall, dass die χ_i in Π alle einen ϱ-fachen Punkt haben, bleibt das Gesagte wesentlich erhalten; nur dass die Ausdrücke (19) μ bis zur ϱ^{ten} Ordnung hin enthalten, also eine rationale Curve Γ, ϱ^{ter} Ordnung, auf F liefern.

β) Die χ_i von (13) mögen zwei benachbarte einfache Punkte von f, Π und Π_1, als einfache Fundamentalpunkte besitzen; d. h. die χ_i sollen durch Π gehen und die Richtung $\Pi\Pi_1$ von f alle zur Tangente haben.

Für diese Richtung, welche eine Fundamentalrichtung der Transformation von f in F sein wird, nehmen wir

$$\zeta = 0, \quad \eta = 0,$$

und schreiben — was vermöge linearer Transformation möglich ist —

$$\begin{aligned}
\chi_1 &= \zeta + k_1 \xi^2 + l_1 \xi \eta + m_1 \eta^2 + \cdots = (\nu_1 + k_1 + l_1 \mu + m_1 \mu^2) \xi^2 + \xi^3 \lambda_1(\xi),\\
\chi_2 &= \qquad k_2 \xi^2 + l_2 \xi \eta + m_2 \eta^2 + \cdots = (k_2 + l_2 \mu + m_2 \mu^2) \xi^2 + \xi^3 \lambda_2(\xi),\\
\chi_3 &= \qquad k_3 \xi^2 + l_3 \xi \eta + m_3 \eta^2 + \cdots = (k_3 + l_3 \mu + m_3 \mu^2) \xi^2 + \xi^3 \lambda_3(\xi),\\
\chi_4 &= \eta + k_4 \xi^2 + l_4 \xi \eta + m_4 \eta^2 + \cdots = \mu \xi + (\mu_1 + k_4 + l_4 \mu + m_4 \mu^2) \xi^2 + \xi^3 \lambda_4(\xi).
\end{aligned}$$

β') Sei μ von 0 verschieden. Dann wird:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{\nu_1 + k_1 + l_1 \mu + m_1 \mu^2}{\mu} \xi + \xi^2 \sigma_1(\xi),\\
y &= \frac{k_2 + l_2 \mu + m_2 \mu^2}{\mu} \xi + \xi^2 \sigma_2(\xi),\\
z &= \frac{k_3 + l_3 \mu + m_3 \mu^2}{\mu} \xi + \xi^2 \sigma_3(\xi),
\end{aligned}$$

(Ausdrücke, die sich auch als ganze Functionen von

$$\frac{\xi}{\sqrt{\eta}} \quad \text{und} \quad \sqrt{\eta}$$

oder als ganze Functionen von

$$\frac{\xi^2}{\eta} \quad \text{und} \quad \frac{\eta}{\xi}$$

schreiben lassen).

Hieraus folgt zunächst, dass diesen verschiedenen Richtungen μ in Π hier die Richtungen in dem *einen* Punkt P von F mit den Coordinaten $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$ entsprechen. Da für kleine Werthe von ξ die Grössen x, y, z quadratische Functionen des Parameters μ werden, so folgt weiter, dass die entsprechenden Tangentenrichtungen in P einen Kegel zweiter Ordnung bilden, dass also F in P einen *Doppelpunkt* erhält, und zwar einen isolirten Doppelpunkt mit im Allgemeinen nicht-zerfallendem Tangentenkegel. Denn wenn

$$\begin{vmatrix} v_1 + k_1 & l_1 & m_1 \\ k_2 & l_2 & m_2 \\ k_3 & l_3 & m_3 \end{vmatrix} = \Delta$$

und die Unterdeterminanten von Δ mit Δ_{ik} bezeichnet werden, so hat man

$$\begin{aligned} \Delta \cdot \frac{\xi}{\mu} \qquad\quad &= \Delta_{11} x + \Delta_{21} y + \Delta_{31} z + \cdots, \\ \Delta \cdot \xi \qquad\quad &= \Delta_{12} x + \Delta_{22} y + \Delta_{32} z + \cdots, \\ \Delta \eta = \Delta \cdot \mu \xi + \cdots &= \Delta_{13} x + \Delta_{23} y + \Delta_{33} z + \cdots, \end{aligned}$$

also als Gleichung des Tangentenkegels von F in P:

$$(\Delta_{12} x + \Delta_{22} y + \Delta_{32} z)^2 - (\Delta_{11} x + \Delta_{21} y + \Delta_{31} z)(\Delta_{13} x + \Delta_{23} y + \Delta_{33} z) = 0.$$

Der Richtung μ in Π entspricht die eine bewegliche Richtung, in welcher dieser Kegel von

$$(\Delta_{13} x + \Delta_{23} y + \Delta_{33} z) - \mu(\Delta_{12} x + \Delta_{22} y + \Delta_{32} z) = 0$$

geschnitten wird.

Für die Integrale wird:

$$\begin{aligned} u - u_0 = \frac{1}{\Delta} \{ & (\alpha \Delta_{12} + \beta \Delta_{13}) x + (\alpha \Delta_{22} + \beta \Delta_{23}) y \\ & + (\alpha \Delta_{32} + \beta \Delta_{33}) z \} + \cdots, \\ u' - u_0' = \frac{1}{\Delta} \{ & (\alpha' \Delta_{12} + \beta' \Delta_{13}) x + (\alpha' \Delta_{22} + \beta' \Delta_{23}) y \\ & + (\alpha' \Delta_{32} + \beta' \Delta_{33}) z \} + \cdots \end{aligned}$$

Im Besonderen kann auch $\Delta = 0$ werden, wonach dann der Tangentenkegel in eine doppelte Ebene übergeht.

β'') Sei nun $\mu = 0$ betrachtet, also die Richtung $\zeta = 0$, $\eta = 0$ von Π. Dann wird

$$\begin{aligned} \eta &= \mu_1 \xi^2 + \mu_2 \xi^3 + \cdots, \quad \zeta = a_0 \xi^2 + (a_1 \mu_1 + b_0) \xi^3 + \cdots, \\ \chi_1 &= (a_0 + k_1) \xi^2 + [(a_1 + l_1) \mu_1 + f_1] \xi^3 + \cdots, \\ \chi_2 &= \qquad k_2 \xi^2 + (l_2 \mu_1 + f_2) \xi^3 + \cdots, \\ \chi_3 &= \qquad k_3 \xi^2 + (l_3 \mu_1 + f_3) \xi^3 + \cdots, \\ \chi_4 &= (\mu_1 + k_4) \xi^2 + (l_4 \mu_1 + f_4 + \mu_2) \xi^3 + \cdots, \end{aligned}$$

also, wenn man setzt

$$x_0 = \frac{a_0 + k_1}{\mu_1 + k_4}, \quad y_0 = \frac{k_2}{\mu_1 + k_4}, \quad z_0 = \frac{k_3}{\mu_1 + k_4}:$$

$$x - x_0 = (-\mu_2 x_0 + m_1)\frac{\xi}{\mu_1 + k_4} + \cdots,$$

$$y - y_0 = (-\mu_2 y_0 + m_2)\frac{\xi}{\mu_1 + k_4} + \cdots,$$

$$z - z_0 = (-\mu_2 z_0 + m_3)\frac{\xi}{\mu_1 + k_4} + \cdots,$$

wo die Grössen m_1, m_2, m_3 einfach von μ_1 abhängen. Hieraus folgt, dass der *einen* Richtung $\lim \frac{\eta}{\xi} = \mu = 0$ von Π unendlich viele Punkte von F entsprechen, welche eine *Gerade* Γ bilden. Deren Punkte (x_0, y_0, z_0) entsprechen den verschiedenen Werthen von $\lim \frac{\eta}{\xi^2} = \mu_1$. In einem solchen Punkte von F, also bei festem μ_1, liefern die letzten Formeln die Entwicklung der Coordinaten nach Potenzen von ξ und $\mu_2 \xi$; und die Umkehrung liefert ξ und $\mu_2 \xi$, also auch ξ und η, als ganze Potenzreihen in $x - x_0$ und $y - y_0$. Für die Integrale hat man zugleich bei festem μ_1 Entwicklungen der Form:

$$u - u_0 = \alpha \xi + (\beta \mu_1 + \beta_1)\xi^2 + (\beta \mu_2 + \beta_2)\xi^3 + \cdots,$$
$$u' - u_0' = \alpha' \xi + (\beta' \mu_1 + \beta_1')\xi^2 + (\beta' \mu_2 + \beta_2')\xi^3 + \cdots,$$

wo $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ die Grössen von (17), die $\beta_1, \beta_1', \beta_2 \ldots$ von μ_2 unabhängig sind. Da

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial u'}{\partial(\mu_2 \xi)} - \frac{\partial u'}{\partial \xi}\frac{\partial u}{\partial(\mu_2 \xi)} = 2(\alpha\beta' - \beta\alpha')\xi^2 + \cdots$$

mit Gliedern zweiter Dimension anfängt, kann man dasselbe in Bezug auf die Entwicklung von

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u'}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u'}{\partial x} = (AB' - A'B) : \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2$$

nach Potenzen von $x - x_0$, $y - y_0$ schliessen — was sich durch Fortsetzung der Rechnung auch direct ergäbe —; d. h. die Fläche

$$AB' - BA' = 0$$

berührt die Fläche F in jedem Punkte der Geraden Γ.

γ) Die Flächen χ_i von (13) mögen den einfachen Punkt Π von f zum Doppelpunkt besitzen und zugleich die Richtung $\Pi\Pi_1$ von f gemeinsam haben, so dass dieselbe Fundamentalrichtung der Transformation wird.

Sei wieder diese Richtung im Punkt Π oder $(\xi = \eta = \zeta = 0)$ als $\zeta = 0$, $\eta = 0$ genommen; so wird

$$\chi_i = \eta(k_i \xi + l_i \eta) + \zeta(m_i \xi + p_i \eta + q_i \zeta) + r_i \xi^3 + \cdots$$

γ') Sei zuerst die Richtung $\lim \frac{\eta}{\xi} = \mu$ von 0 verschieden.

Dann wird

$$x = \frac{k_1 + l_1\mu}{k_4 + l_4\mu} + \xi\lambda_1(\xi),\ y = \frac{k_2 + l_2\mu}{k_4 + l_4\mu} + \xi\lambda_2(\xi),\ z = \frac{k_3 + l_3\mu}{k_4 + l_4\mu} + \xi\lambda_3(\xi),$$

woraus genau dieselben Schlüsse, wie in α) folgen, nämlich dass den verschiedenen Richtungen μ ($\mu \neq 0$) durch Π die Punkte einer Geraden Γ_1 entsprechen, längs deren $AB' - BA'$ zu 0 wird, etc.

γ'') Sei nun $\mu = 0$; und η und ζ wie in β'').

Dann hat man

$$\chi_i = (\mu_1 k_i + a_0 m_i + r_i)\xi^3 + \cdots,$$

also

$$x = \frac{\mu_1 k_1 + (a_0 m_1 + r_1)}{\mu_1 k_4 + (a_0 m_4 + r_4)} + \xi\sigma_1(\xi),$$

und analog y und z. Dies liefert, den verschiedenen Werthen von μ_1 entsprechend, eine zweite Gerade Γ_2 von F, welche mit der ersten Geraden Γ_1 den Punkt P mit $\mu = 0$, $\mu_1 = \infty$, d. h. mit

$$x_0 = \frac{k_1}{k_4},\ y_0 = \frac{k_2}{k_4},\ z_0 = \frac{k_3}{k_4},$$

gemeinsam hat, einen Punkt, den wir in γ''') weiter betrachten werden. Für einen von $\mu_1 = \infty$ verschiedenen Punkt dieser Geraden Γ_2 gelten genau dieselben Schlüsse, wie in β'').

γ''') $\mu = 0$, $\mu_1 = \infty$. Zur Untersuchung des in γ'') genannten Punktes P:

$$x_0 = \frac{k_1}{k_4},\ y_0 = \frac{k_2}{k_4},\ z_0 = \frac{k_3}{k_4}$$

kann, wegen $\mu_1 = \infty$, nicht mehr eine Entwicklung von η nach ganzen Potenzen von ξ dienen; vielmehr tritt hier der, schon oben zu (16) bemerkte Fall ein, dass man für ξ und η Reihen setzen muss, die nach ganzen Potenzen eines Parameters t fortlaufen. Es genügt hier, wo $\lim \frac{\eta}{\xi} = 0$, $\lim \frac{\eta}{\xi^2} = \infty$, zu setzen:

$$\xi = t^2,\ \ \eta = \varrho t^3 + \varrho_1 t^4 + \cdots,$$

wonach

$$\zeta = a_0 t^4 + \varrho a_1 t^5 + \cdots$$

Ferner wird

$$\chi_i = \varrho k_i t^5 + (\varrho k_i + \varrho^2 l_i + a_0 m_i + r_i)t^6 + \cdots$$

also

$$x - x_0 = \frac{1}{k_4^2}\{k_4(l_1\varrho^2 + a_0 m_1 + r_1) - k_1(l_4\varrho^2 + a_0 m_4 + r_4)\}\frac{t}{\varrho} + \cdots$$

und analog $y - y_0$ und $z - z_0$. Diese Entwicklungen gehen also fort nach ganzen Potenzen von ϱt und $\frac{t}{\varrho}$, oder auch nach solchen von

$$\frac{\eta}{\xi} \text{ und } \frac{\xi^2}{\eta},$$

und fangen mit linearen Gliedern in beiden Grössen an, so dass der Punkt P im Allgemeinen ein *einfacher* Punkt von f wird.

Diese Grössen lassen sich also auch umgekehrt in Reihen nach ganzen Potenzen von $x-x_0$ und $y-y_0$ entwickeln, welche mit linearen Gliedern anfangen, von der Form:

$$\frac{\eta}{\xi} = \lambda_1(x-x_0) + \lambda_2(y-y_0) + \cdots,$$
$$\frac{\xi^2}{\eta} = \lambda_1'(x-x_0) + \lambda_2'(y-y_0) + \cdots,$$

so dass man erhält:

$$\xi = \{\lambda_1(x-x_0)+\lambda_2(y-y_0)\} \cdot \{\lambda_1'(x-x_0)+\lambda_2'(y-y_0)\} + \cdots,$$
$$\eta = \{\lambda_1(x-x_0)+\lambda_2(y-y_0)\}^2 \cdot \{\lambda_1'(x-x_0)+\lambda_2'(y-y_0)\} + \cdots.$$

Für die Integrale hat man, wenn man noch

$$\varrho t = t_1, \quad \frac{t}{\varrho} = t_2$$

setzt:

$$u - u_0 = \alpha t^2 + \beta \varrho t^3 + \cdots = \alpha t_1 t_2 + \beta t_1^2 t_2 + \cdots,$$
$$u' - u_0' = \alpha' t^2 + \beta' \varrho t^3 + \cdots = \alpha' t_1 t_2 + \beta' t_1^2 t_2 + \cdots,$$

demnach

$$\frac{\partial u}{\partial t_1}\frac{\partial u'}{\partial t_2} - \frac{\partial u}{\partial t_2}\frac{\partial u'}{\partial t_1} = \frac{1}{\lambda_1\lambda_2'-\lambda_1'\lambda_2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u'}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u'}{\partial x}\right)$$
$$= \frac{1}{(\lambda_1\lambda_2'-\lambda_1'\lambda_2)\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}(AB'-BA') = (\alpha'\beta-\alpha\beta')t_1^2 t_2 + \cdots$$
$$= (\alpha'\beta-\alpha\beta')\varrho t^3 + \cdots,$$

d. h. die Fläche $Q=0$ trifft $F=0$ im einfachen Punkt P wie eine Fläche mit 3-fachem Punkt.

Nimmt man z. B. die direct, ohne Hülfe von $f=0$, eindeutig umkehrbare Substitution

$$x = \frac{\eta}{\xi}, \quad y = l\frac{\eta}{\xi} + \frac{\xi^2}{\eta}, \quad z = m\frac{\eta}{\xi} + \frac{\zeta}{\xi},$$

woraus

$$\xi = x(y-lx), \quad \eta = x^2(y-lx), \quad \zeta = x(y-lx)(z-mx),$$

deren Determinante

$$\Delta = -x^3(y-lx)^2,$$

so geht eine Fläche

$$0 = f(\xi,\eta,\zeta) \equiv \zeta + f_2 + f_3 + \cdots,$$

nach Weglassung des Factors

$$M = x(y-lx)$$

über in

$$0 = F(x,y,z) \equiv (z-mx) + F_2 + F_3 + \cdots$$

wo die F_i homogen von der i^{ten} Dimension in x, y, z sind und den

Factor $x(y-lx)$ besitzen. Ist dann $Q'(\xi, \eta, \zeta) = 0$ die zu f gehörige Fläche φ_f, so wird Q' für $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ nicht verschwinden; sei also

$$Q'(\xi, \eta, \zeta) = K(x, y, z),$$

so wird auch K für die beiden entsprechenden Geraden von F:

$$\Gamma_1 : z - mx = 0, \quad y - lx = 0$$

und

$$\Gamma_2 : z = 0, \quad x = 0$$

nicht verschwinden. Die zu F gehörige Fläche φ_F wird dann:

$$Q(x, y, z) = \frac{K \cdot \Delta}{M} = -Kx^2(y-lx) = 0;$$

diese Fläche geht also in der That durch Γ_1 und berührt F längs Γ_2 in erster Ordnung, im Schnittpunkte ($x=0$, $y=0$, $z=0$) von Γ_1 und Γ_2 in zweiter Ordnung.

Erlangen, 1886.

Ueber einen Beweis der Zeuthen'schen Verallgemeinerung des Satzes von der Erhaltung des Geschlechts.

Von

Wilhelm Weiss, z. Z. in Erlangen.

Der Riemann'sche Satz, dass zwei algebraische Curven, deren Punkte sich gegenseitig eindeutig entsprechen, von gleichem Geschlechte sein müssen, ist von Zeuthen (Mathemat. Annalen Band III) in folgender Weise verallgemeinert worden:

Findet zwischen den Punkten zweier algebraischer Curven vom Geschlechte p_1, beziehungsweise p_2, ein x_1, x_2-deutiges Entsprechen statt, und treten dabei t_1, beziehungsweise t_2, Coincidenzen auf, so besteht die Beziehung:

$$t_1 - t_2 = 2x_2(p_1 - 1) - 2x_1(p_2 - 1).$$

Für $x_1 = x_2 = 1$, also $t_1 = t_2 = 0$, folgt der Riemann'sche Satz. Dieser Zeuthen'sche Satz soll im folgenden durch eine räumliche Betrachtung bewiesen werden.

Dazu beweisen wir, unmittelbar geometrisch, einen Satz über algebraische Regelflächen, der auch sonst vielfach angewendet werden kann:

Enthält eine algebraische Regelfläche vom Geschlechte p eine k-fache Curve vom Geschlechte π, die von jeder Erzeugenden nur einmal geschnitten wird, und liegen auf dieser Curve „t" Spitzen (pinch points, sommets) der Regelfläche, so besteht immer die Beziehung:

$$\text{(a)} \qquad 2p - 2 = t + 2k(\pi - 1).$$

Es sei N die Ordnung, R der Rang der Regelfläche vom Geschlechte p, n die Ordnung der k-fachen Curve C_n^π vom Geschlechte π.

Wir betrachten die von den Tangentialebenen der Regelfläche in allen Punkten der C_n^π gebildete (der Regelfläche längs der C_n^π umschriebene) Developpable. Indem wir die Classe „c" derselben auf doppelte Weise ausdrücken, werden wir sofort zu der Beziehung (a) gelangen.

Um die Anzahl der Ebenen, welche die Developpable durch einen beliebigen Punkt O des Raumes schickt, zu bestimmen, schneiden wir die Regelfläche mit ihrer ersten Polarfläche bezüglich O. Der durch die vielfachen Curven der Regelfläche nicht absorbirte Theil des Schnittes ist eine Curve Γ_R von der Ordnung R, welche auf jeder Erzeugenden der Regelfläche nur *einen* Punkt hat, den Berührungspunkt m der Verbindungsebene dieser Erzeugenden mit O. Die Γ_R und die C_n^π sind vermöge der Erzeugenden der Regelfläche $(1, k)$-deutig auf einander bezogen und würden daher eine Regelfläche von der Ordnung $R + nk$ erzeugen, wenn sie nicht entsprechend gemeinsame Schnittpunkte hätten. Solche sind aber vorhanden; und zwar, zunächst in den t pinch-points; denn betrachten wir die einem solchen zugehörige Erzeugende (Torsallinie), so berührt die Verbindungsebene derselben mit O die Regelfläche im pinch-point, und der zugehörige Punkt m der Γ_R fällt somit mit diesem zusammen. Weiter geschieht es, da wir annahmen, dass c Tangentialebenen der Developpablen durch O gehen, genau c mal, dass für eine gewöhnliche Erzeugende der Punkt m der Γ_R auf die C_n^π rückt, was weitere c einfach entsprechend gemeinsame Punkte der C_n^π und Γ_R bedingt. Daher ist die Ordnung der durch die Beziehung beider Curven erzeugten Regelfläche

$$R + n \cdot k - t - c.$$

Da aber diese mit der gegebenen Regelfläche identisch ist, hat man:

$$R + n \cdot k - t - c = N$$

oder

$$c = R - N + n \cdot k - t. \tag{1}$$

Nun bestimmen wir die Classe c der Developpablen auch durch Betrachtung der Classencurve, welche die Tangentialebenen der Regelfläche in den Punkten der C_n^π in eine beliebige Ebene E einschneiden. Sei $r = 2(n-1) + 2\pi$ die Ordnung, von C_r, der Schnittcurve, der Tangentenfläche der C_n^π mit E. Die Schnittcurve der Regelfläche mit E sei C_N.

Durch einen Punkt „α" der C_r geht eine Tangente der C_n^π; ihr Berührungspunkt sei a. Durch a gehen k Erzeugende der Regelfläche, die auf der C_N, k Punkte α' bestimmen. Die Geraden $\alpha\alpha'$ sind Tangenten der zu betrachtenden Classencurve. Auf diese Art werden die C_r und die C_N $(1, k)$-deutig auf einander bezogen und würden daher durch die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte eine Einhüllende von der Classe $n + k \cdot r$ liefern, wenn sie nicht entsprechend gemeinsame Punkte hätten. Von einem Schnittpunkte der C_n^π mit E gehen aber eine Tangente der C_n^π und gleichzeitig k Erzeugende der Regelfläche aus, desshalb zählt ein solcher Punkt genau für k ent-

sprechend gemeinsame Punkte der C_r und C_N. Die wirkliche Classe der Einhüllenden ist also $N + kr - kn$, so dass jetzt folgt:

$$c = N + kr - kn \tag{2}$$

oder

$$c = N + n \cdot k + 2k(\pi - 1). \tag{3}$$

Durch Gleichsetzung auch der rechten Seiten der Gleichungen (1) und (3) folgt, wenn man noch für R seinen Werth $R = 2(N-1) + 2p$ einführt:

$$2p - 2 = t + 2k(\pi - 1),$$

was die zu beweisende Beziehung ist.

Nehmen wir nun an, dass die auf der Regelfläche (N, R, p) liegende k-fache Curve C_n, β Rückkehrpunkte*) hat. Das Geschlecht der Curve sei auch jetzt mit π bezeichnet. Ein Rückkehrpunkt der k-fachen Curve verursacht in der Regelfläche, wie bekannt, entweder k Rückkehrerzeugende (Erzeugung durch Leitcurven) oder k vom Rückkehrpunkte ausgehende, von einander getrennte, Torsallinien (Erzeugung durch punktweises Entsprechen zweier Curven).

Wir haben daher nur anzugeben, wie diese beiden Fälle die Gleichungen (1) und (3) verändern.

Die Verbindungsebene einer Rückkehrerzeugenden mit dem Punkte O berührt die Regelfläche in zwei consecutiven Punkten m dieser Erzeugenden, die aber im allgemeinen nicht in den zugehörigen Rückkehrpunkt der C_n^π fallen. Daher wird das Verhalten der Γ_R gegen die C_n^π gar nicht modificirt; es gilt auch hier die Gleichung:

$$c = R - N + n \cdot k - t, \tag{1'}$$

wo aber jetzt

$$R = 2(N-1) + 2p - \beta \cdot k$$

zu setzen ist.

Im zweiten Falle bewirken die k, vom Rückkehrpunkte ausgehenden, getrennten, Torsallinien, dass man neben den t schon vorhandenen, noch k weitere pinch-points auf der C_n^π anzunehmen hat. Daher lautet hier die Gleichung (1) einfach:

$$c = R - N + nk - t - \beta k. \tag{1''}$$

Die Betrachtung, die zur Gleichung (3) führt, wird durch die β Rückkehrpunkte der C_n^π gar nicht beeinflusst. Man hat hier:

$$c = N + nk + 2k(\pi - 1) - \beta k \tag{2'}$$

weil jetzt bekanntlich $r = 2(n-1) + 2\pi - \beta$ ist.

Durch Gleichsetzung auch der rechten Seiten von (1'), (2'), und (1''), (2'), folgt, *dass die Beziehung* $2p - 2 = t + 2k(\pi - 1)$ *durch Rückkehrpunkte der k-fachen Curve nicht beeinflusst wird.*

---

*) Eigentliche Doppelpunkte bedürfen offenbar keiner Erwähnung.

Es sei endlich die k-fache Curve C_n^π eine *ebene* Curve vom Geschlechte π mit α Doppel- und β Rückkehrpunkten. Dann bleiben die Betrachtungen die zu (1) resp. (1') oder (1'') führen, völlig ungeändert, und auch die Gleichung (2) und damit (3) und (2') behalten ihre Giltigkeit, da jetzt nur unter r die Classe der ebenen Curve

$$r = n(n-1) - 2\alpha - 3\beta = 2(n-1) + 2\pi - \beta$$

zu verstehen ist. (Es tritt offenbar in der früheren beliebigen Ebene E, statt der $(1, k)$-deutigen Beziehung zwischen der C_N und C_r, jetzt die $(1, kr)$-deutige Beziehung zwischen der C_N und der Schnittlinie der Ebene E mit der Ebene der C_n^π auf; der weitere Schluss ist genau wie früher.) —

Dieser Satz über Regelflächen möge nun zum Beweis des Satzes von Zeuthen verwendet werden.

Es seien $C_{n_1}^{\pi_1}$ und $C_{n_2}^{\pi_2}$ zwei algebraische Curven von den Ordnungen n_1, n_2, vom Geschlecht π_1, π_2 und mit β_1, beziehungsweise β_2, Rückkehrpunkten.

Diese beiden Curven sollen so aufeinander bezogen sein, dass einem Punkte der $C_{n_1}^{\pi_1}$, x_2 Punkte auf $C_{n_2}^{\pi_2}$, und einem Punkte der $C_{n_2}^{\pi_2}$, x_1 Punkte auf $C_{n_1}^{\pi_1}$ entsprechen, und dass dabei auf der ersten Curve t_1 und auf der zweiten Curve t_2 Coincidenzen auftreten.

Die $C_{n_1}^{\pi_1}$ und $C_{n_2}^{\pi_2}$ dürfen dabei entweder zwei Raumcurven, oder eine Raumcurve und eine ebene Curve, oder endlich zwei ebene Curven sein, in welch' letzterem Falle wir sie aber in zwei verschiedenen Ebenen liegend annehmen.

Wir verbinden die correspondirenden Punkte beider Curven durch Gerade und erhalten eine Regelfläche. Das Geschlecht derselben sei p.

Auf dieser Fläche ist $C_{n_1}^{\pi_1}$ eine x_2-fache Curve, die von einer Erzeugenden nur einmal getroffen wird, t_2 eigentliche pinch-points enthält und überdies β_1 Rückkehrpunkte hat.

Daher besteht nach vorigem Satze für $C_{n_1}^{\pi_1}$ die Beziehung:

$$2p - 2 = t_2 + 2x_2(\pi_1 - 1),$$

und analog gilt für $C_{n_2}^{\pi_2}$:

$$2p - 2 = t_1 + 2x_1(\pi_2 - 1).$$

Durch Gleichsetzung auch der rechten Seiten folgt:

$$t_1 - t_2 = 2x_2(\pi_1 - 1) - 2x_1(\pi_2 - 1),$$

was der Satz von Zeuthen ist.

Erlangen 14. November 1886.

Ueber hyperelliptische Curven.

Von

Karl Bobek in Prag.

Eine algebraische Curve C_m^p der Ordnung m vom Geschlechte $p > 1$ kann nur eine einzige lineare einfach unendliche Schaar $g_2^{(1)}$ von Gruppen zu zwei Punkten enthalten und ist durch das Auftreten einer solchen als hyperelliptische Curve charakterisirt.*)

Das Vorhandensein der $g_2^{(1)}$ wirkt in gewisser Weise noch auf die zu C_m^p adjungirten Curven der $(m-3)^{\text{ten}}$ Ordnung ein und es besteht der bekannte Satz, welcher die hyperelliptische Curve ebenso charakterisirt, wie das Auftreten einer $g_2^{(1)}$, dass jede adjungirte Curve $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche durch einen Punkt der C_m^p geht noch einen zweiten Punkt der C_m^p enthält. Die einander so zugeordneten Punkte bilden die $g_2^{(1)}$. Einen andern diesbezüglichen Satz für den Fall $2p < m - 1$ habe ich in den Wiener Berichten veröffentlicht.**)

Ich will im Nachstehenden das Vorhandensein einer $g_2^{(1)}$ auf C_m^p dazu benutzen, diese C_m^p durch ihre Paare von $g_2^{(1)}$ auf zwei rationale Curvenschaaren möglichst niedriger Ordnung zu beziehen um so durch den Schnitt entsprechender Curven der Schaaren die C_m^p zu erzeugen.

Im ersten Abschnitte werden diese Curvenschaaren möglichst niedriger Ordnung aufgesucht, im zweiten sodann die Gleichungen zweier hyperelliptischen Curven nebst dem vollständigen System der zu ihnen adjungirten Curven $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung aufgestellt. Der erste Fall bezieht sich auf die allgemeinen hyperelliptischen Curven von der Ordnung m und dem Geschlechte $m-3$, der andere giebt nur specielle Curven vom Geschlechte p und der Ordnung $m = 2p$ sobald $p > 4$.

---

*) Vergl. Brill und Nöther „Ueber algebraische Functionen". Diese Annalen Band VII, pag. 269.

**) Vergl. Sitzungsberichte der k. Akademie der Wissenschaften XCIII. Bd., 18. März 1886.

I.

Specielle Curvenschaaren, welche die $g_2^{(1)}$ ausschneiden.

§ 1.

Das Maximalgeschlecht der hyperelliptischen Curven und die zugehörige Enveloppe $\mathfrak{E}$.

1. *Ist C_m^p hyperelliptisch, so kann eine adjungirte Curve $(m-4)^{ter}$ Ordnung nicht existiren.* Denn da jede adjungirte Curve φ der $(m-3)^{ten}$ Ordnung, welche durch einen Punkt a der C_m^p geht, noch einen weiteren Punkt α der C_m^p enthält, so müsste jede Gerade, welche durch a geht, auch α enthalten, da sie mit der vorausgesetzten adjungirten Curve $(m-4)^{ter}$ Ordnung eine adjungirte $(m-3)^{ter}$ Ordnung bilden würde.

Existirt also eine adjungirte Curve $(m-4)^{ter}$ Ordnung, so kann C_m^p nicht hyperelliptisch sein.

Hieraus folgt, dass für eine hyperelliptische Curve C_m^p stets $m > p+1$ sein muss. Denn wäre $m \leq p+1$, also $m-2 \leq p-1$, so könnte man von einer adjungirten Curve φ der $(m-3)^{ten}$ Ordnung $(m-2)$ Punkte auf einer Geraden annehmen, und φ müsste dann in diese Gerade und in eine adjungirte Curve $(m-4)^{ter}$ Ordnung zerfallen.

Ist für die hyperelliptische Curve C_m^p $m=p+2$, so besitzt C_m^p nothwendig einen p-fachen Punkt.

Jede zu C_m^p adjungirte Curve χ der $(m-2)^{ten}$ Ordnung, welche durch $(p-1)$ Paare der $g_2^{(1)}$ von C_m^p geht, zerfällt in die Curve φ, welche durch die $(p-1)$ Paare geht und in eine Gerade, sobald $m=p+2$ ist.

Denn jede χ schneidet C_m^p in Gruppen von m Punkten, die einer Vollschaar von der Mannigfaltigkeit q angehören mögen. Eine solche Gruppe ist die auf einer beliebigen Geraden gelegene und da diese keine Specialgruppe sein kann, denn bei einer hyperelliptischen Curve können Specialgruppen nur aus Paaren der $g_2^{(1)}$ bestehen, so ist die Mannigfaltigkeit der Vollschaar, welcher sie angehört, nothwendig $m-p=2$, also ist $q=2$, und sämmtliche χ müssen mithin in die feste φ und in die Geraden der Ebene zerfallen.

Nun legen wir durch eine Gruppe a, α der $g_2^{(1)}$ eine adjungirte Curve χ der $(m-2)^{ten}$ Ordnung, dann geht durch den Restschnitt von χ mit C_m^p ein Büschel von Curven χ, welcher die $g_2^{(1)}$ ausschneidet. Wir wählen χ als die Curve, welche aus der Geraden $\overline{a\alpha}$ und einer willkürlichen φ besteht. Da dann alle adjungirten Curven $(m-2)^{ter}$ Ordnung, welche durch die $(p-1)$ Paare von C_m^p auf φ gehen in φ

und eine Gerade zerfallen müssen, so kann nur ein Büschel von Geraden auftreten, welcher durch die $(m-2)$ übrigen Schnittpunkte von $\overline{a\alpha}$ mit C_m^p geht, und die $g_2^{(1)}$ ausschneidet. Daher müssen auf $\overline{a\alpha}$ und ebenso auf jeder Geraden, welche ein Paar der $g_2^{(1)}$ trägt, die $m-2$ übrigen Schnittpunkte mit C_m^p in einen Punkt zusammenfallen, d. h. C_m^p hat einen p-fachen Punkt und die durch ihn gehenden Strahlen schneiden die $g_2^{(1)}$ auf C_m^p aus.

Die Curven φ müssen daher sämmtliche in $(p-1)$ Geraden durch den p-fachen Punkt zerfallen.*) Wir setzen im Folgenden stets $p > m-2$ voraus, da der eben betrachtete Fall $p = m-2$ einfach direct erledigt werden kann, und auch der bei Weitem Bekannteste ist.

---

*) Auch bei anderen hyperelliptischen Curven C_m^p können sämmtliche adjungirte Curven $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung zerfallen. Nimmt man beispielsweise einen Büschel rationaler Curven ν^{ter} Ordnung, welche in den Basispunkten des Büschels ν_i-fache Puncte besitzen, so dass

$$\sum \nu_i^2 = \nu^2, \qquad \sum \nu_i = 3\nu - 2$$

ist, wobei die Σ sich auf alle Basispunkte η an Zahl bezieht und legt ferner durch einige von ihnen eine Curve E der Ordnung ε mit ε_i-fachen Punkten wobei ε_i sich auf denselben Punkt wie ν_i bezieht, so dass $\varepsilon_i \geqq 0$ sein kann und

$$\sum \varepsilon_i^2 = \varepsilon^2, \quad \sum \varepsilon_i = 3\varepsilon, \quad \sum \nu_i \varepsilon_i = \nu\varepsilon$$

ist, E also rational und durch die ε_i-fachen Punkte vollständig bestimmt, sowie von den Curven des Büschels ν^{ter} Ordnung nicht mehr geschnitten wird; so kann man eine Curve C_m der Ordnung

$$m = \nu(p-1) + \varepsilon + 3$$

construiren, welche in dem Punkte i einen

$$\delta_i = \nu_i(p-1) + \varepsilon_i + 1\text{-fachen}$$

Punkt besitzt, denn es sind von der Curve noch

$$\frac{1}{2}\, m(m+3) - \frac{1}{2} \sum \delta_i(\delta_i + 1) = 6(p-1) + 9(2-\eta)$$

Punkte willkürlich, also kann p stets so gross gewählt werden, dass diese Anzahl grösser als Null ist. Nun schneidet aber jede Curve des Büschels die C_m in

$$\nu m - \sum \nu_i \delta_i = 2$$

Punkten und C_m ist also hyperelliptisch. Ihr Geschlecht ergiebt sich

$$\frac{1}{2}(m-1)(m-2) - \frac{1}{2} \sum \delta_i(\delta_i - 1) = p$$

und da jede adjungirte Curve $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung eine Curve des Büschels nicht ausserhalb der vielfachen Punkte schneiden kann, da

$$\nu(m-3) = \sum \nu_i(\delta_i - 1)$$

ist, so zerfällt jede φ in $(p-1)$ Curven des Büschels und in E. Man erhält solche Curven C_m^p wenn man eine ebene Cremonatransformation auf eine hyperelliptische Curve vom Geschlechte p und der Ordnung $p+2$ anwendet.

2. Die Geraden $\overline{a\alpha}$, welche die Punktepaare der $g_2^{(1)}$ von C_m^p tragen, hüllen eine Enveloppe $\mathfrak{C}$ der Classe $c = m - p - 1$ ein, die rational ist, da sie auf einen die $g_2^{(1)}$ ausschneidenden Büschel eindeutig durch ihre Tangenten bezogen ist. Ihre Classe c ergiebt sich aus nachstehender Betrachtung. Projicirt man die Paare der $g_2^{(1)}$ aus einem beliebigen Punkte t der Ebene, so erhält man im Strahlenbüschel t eine $m \ldots m$-deutige Beziehung, welche $2m$ Coincidenzen enthält. Zu diesen zählen die Strahlen, welche t mit den $2p+2$ Coincidenzpunkten der $g_2^{(1)}$ auf C_m^p verbinden. Die $2m - 2p - 2$ übrigen Doppelstrahlen zählen jeder als zwei Coincidenzen, so dass durch t nur $m - p - 1$ Strahlen gehen, welche Paare der $g_2^{(1)}$ auf C_m^p tragen.

Die Enveloppe $\mathfrak{C}$ kann reducibel sein. Und zwar können entweder Punkte von C_m^p zu ihr zählen, dann muss ein solcher Punkt ein vielfacher Punkt von C_m^p sein, so dass einem Punkte auf einem der hindurchgehenden Zweige ein Punkt in $g_2^{(1)}$ entspricht, der auch in den vielfachen Punkt, aber auf einen andern Zweig fällt. Als Beispiel für dieses Auftreten von Punkten, die zu $\mathfrak{C}$ gehören kann eine Curve von der Ordnung m und dem Geschlecht $p < m - 2$ mit einem $(m-2)$-fachen Punkt dienen. Dieselbe besitzt noch $m - p - 2$ Doppelpunkte, die mit dem $(m - 2)$-fachen Punkt zusammen die $\mathfrak{C}$ darstellen, deren Gesammtclasse dann $m - p - 1$ wird.

Oder $\mathfrak{C}$ kann die ν^{te} Potenz einer Enveloppe $\mathfrak{C}'$ der Classe $\frac{c}{\nu}$ sein, wo dann jede Tangente von $\mathfrak{C}'$ ν Paare der $g_2^{(1)}$ trägt. Speciell kann $c = \nu$ werden, also $\mathfrak{C}'$ auf einen Punkt sich reduciren. Beispiele für solche hyperelliptische Curven habe ich in meiner Dissertationsschrift angegeben.*)

Wir setzen im Folgenden $\mathfrak{C}$ irreducibel voraus, so dass also die Tangenten der Enveloppe von einem Parameter rational in der c^{ten} Potenz abhängen. Es ist $c > 1$ da wir $m > p + 2$ voraussetzen.

Unter der gemachten Voraussetzung der Irreducibilität der $\mathfrak{C}$ folgt, dass C_m^p keinen Punkt von grösserer Vielfachheit als c haben kann. Denn gehen durch einen Punkt ϱ Zweige der C_m^p, so entsprechen den ϱ Punkten auf diesen Zweigen ϱ Punkte der $g_2^{(1)}$, von denen keiner in dem vielfachen Punkte auf einem anderen Zweige liegt, da sonst dieser vielfache Punkt zu $\mathfrak{C}$ gehören würde, $\mathfrak{C}$ also reducibel wäre. Die ϱ Geraden, welche den vielfachen Punkt mit den ϱ ihm entsprechenden Punkten verbinden, sind Tangenten von $\mathfrak{C}$: also ist $\varrho \leqq c$.

3. Die Tangenten von $\mathfrak{C}$ bilden offenbar eine Schaar von Curven,

*) Vergl. auch Sitzungsberichte der k. Akademie in Wien: „Ueber gewisse involutorische Transformationen der Ebene". XCI. Band.

welche die $g_2^{(1)}$ aus C_m^p ausschneiden und zwar von Curven niedrigster Ordnung. Sie enthalten einen Parameter λ rational in der c^{ten} Ordnung und ihre Gleichung ist

$$A(\lambda) = 0,$$

wobei A eine lineare Function der Coordinaten ist, die keine willkürlichen Constanten einschliesst, da die Gerade durch das Punktepaar a, α bestimmt ist.

Nehmen wir als Curven nächst höherer Ordnung Kegelschnitte, welche durch das Paar a, α der $g_2^{(1)}$ gehen, so haben diese noch 3 willkürliche Constanten und wir können daher ein lineares Netz von Kegelschnitten beliebig wählen und aus diesem die Schaar von Kegelschnitten bestimmen, von denen je einer durch ein Paar der $g_2^{(1)}$ auf C_m^p geht. Durch jeden Punkt t der Ebene gehen dann $m + c$ Kegelschnitte des Netzes, welche Paare der $g_2^{(1)}$ tragen. Denn in dem Kegelschnittsbüschel durch t tritt, wenn man die $g_2^{(1)}$ von C_m^p durch die Kegelschnitte des Büschels projicirt eine $2m \ldots 2m$-deutige Beziehung auf, die $4m$ Coincidenzen aufweist. $2p + 2$ dieser Coincidenzen liefern die $2p + 2$ Kegelschnitte, welche nach den Coincidenzpunkten der $g_2^{(1)}$ auf C_m^p hingehen, die übrigen $4m - 2p - 2$ zählen jeder als zwei Coincidenzen, so dass $2m - p - 1 = m + c$ Kegelschnitte des Netzes durch einen Punkt gehen, welche Paare der $g_2^{(1)}$ tragen.

Die Kegelschnittsschaar würde also, wenn das Netz der Kegelschnitte willkürlich gewählt wird von einem Parameter, für welchen wir λ wählen können, in der $(m+c)^{\text{ten}}$ Ordnung abhängen. Wir werden zeigen, *dass sich eine Schaar angeben lässt, die von niedrigerer Ordnung in λ ist*, indem wir die *niedrigste* Ordnung von λ angeben, in der es überhaupt auftreten kann.

§ 2.

Gleichungsform der hyperelliptischen Curve.

4. Es sei φ eine zu C_m^p adjungirte Curve der $(m-3)^{\text{ten}}$ Ordnung, welche aus C_m^p die Paare $b_1\beta_1, b_2\beta_2, \cdots, b_{p-1}\beta_{p-1}$ der $g_2^{(1)}$ ausschneidet. $a\alpha$ sei ein von diesen verschiedenes Paar der $g_2^{(1)}$, welches auf der Tangente $A = A(\lambda) = 0$ von $\mathfrak{C}$ liegen soll.

Die Gerade A schneidet C_m^p noch in $(m-2)$ Punkten. Durch diese und die $(p-1)$ Paare $b_i\,\beta_i$ auf φ geht noch genau ein Büschel von Curven $(m-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, welcher die $g_2^{(1)}$ auf C_m^p ausschneidet. Sei $\chi = 0$ die Curve $(m-2)^{\text{ter}}$ Ordnung dieses Büschels, welche das Paar $b_p\beta_p$, das von $b_i\beta_i$ und $a\alpha$ verschieden sein soll, bestimmt. Der

Büschel von Curven $(m-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, welcher die $g_2^{(1)}$ ausschneidet, hat dann die Gleichung

$$A\varphi - \mu\chi = 0 \tag{1}$$

und zwar entspricht jedem μ ein einziges Paar der $g_2^{(1)}$ und umgekehrt.

Es sei ferner $K = 0$ die Gleichung eines willkürlichen Kegelschnittes durch a, α, welcher C_m^p ausserdem noch in $2m-2$ Punkten schneidet. Durch diese und die $(p-1)$ Paare $b_i\beta_i$ auf φ geht ein Büschel von Curven $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welcher die $g_2^{(1)}$ ausschneidet, und seine Gleichung ist

$$K\varphi - \mu\psi = 0, \tag{2}$$

wobei wir voraussetzen wollen, dass die Curve $\psi = 0$ durch das Paar $b_p\beta_p$ geht. Dann können wir demselben μ in (1) und (2) dasselbe Paar von $g_2^{(1)}$ zuordnen und die Büschel (1) und (2) werden durch die Paare der $g_2^{(1)}$ auf einander projectivisch bezogen sein. Ihr Erzeugniss ist ausser der C_m^p noch die Curve φ, da für $\mu = 0$ sie ein Bestandtheil entsprechender Curven der Büschel wird. Ist also $\Phi = 0$ die Gleichung der Curve C_m^p so wird

$$C \cdot \Phi \equiv A\psi - K\chi, \tag{3}$$

wo C eine Constante ist.

5. Die Gleichung (3) lässt uns das Verhalten der Curven ψ und χ in den vielfachen Punkten von C_m^p einfach übersehen, weshalb es hier erwähnt werden mag.

Ist d ein solcher δ-facher Punkt von C_m^p, also für $\psi = 0$ und $\chi = 0$ je $(\delta-1)$-fach, während A und K nicht durch d gehen, so sieht man, dass $\chi = 0$ von $\Phi = 0$ in d in genau soviel Punkten geschnitten wird, wie von $\psi = 0$ d. h. $\psi = 0$ schneidet $\chi = 0$ in d in $\delta(\delta-1)$ Punkten. Da aber beide Curven nur $(\delta-1)$-fache Punkte in d haben, so müssen einander $\psi = 0$ und $\chi = 0$ in jedem Zweige berühren; denn es wird auch umgekehrt $\psi = 0$ in d von $\Phi = 0$ genau in soviel Punkten geschnitten, wie von $\chi = 0$.

Daher folgt: *die Curven der Büschel* (1) *und* (2), *welche demselben* μ *entsprechen, berühren einander in den vielfachen Punkten von* C_m^p. Es ist dies so zu verstehen, dass jeder der $(\delta-1)$ Zweige der einen Curve von einem der $(\delta-1)$ Zweige der anderen Curve berührt wird. Denn aus (3) ergiebt sich durch Multiplication mit φ

$$C\varphi\Phi \equiv (A\varphi - \mu\chi)\,\psi - (K\varphi - \mu\psi)\,\chi$$

und die obige Betrachtung gilt genau in derselben Weise für die Curven

$$A\varphi - \mu\chi = 0 \quad \text{und} \quad K\varphi - \mu\psi = 0.$$

Es ist auch

$$\sum \delta_i(\delta_i - 1) + 2p = (m-1)(m-2)$$

d. h. die Curven $(m-2)^{\text{ter}}$ und $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche sich in den p Paaren $b_i\beta_i$ treffen, schneiden einander ausser in den vielfachen Punkten von C_m^p nicht mehr, woselbst sie einander berühren müssen. Denn da das Erzeugniss der Büschel nur φ und C_m^p war, so können einander entsprechende Curven nur auf C_m^p treffen, da φ keine Curve der Büschel mehr schneidet. Da aber auf C_m^p nur zwei Punkte liegen können, so müssen die übrigen Punkte in die vielfachen Punkte von C_m^p fallen. Dieses kann aber nur dadurch geschehen, dass sich entsprechende Curven daselbst berühren.*)

Hält man χ fest, ändert aber den Kegelschnitt K durch $a\alpha$ und legt stets durch die $2m-2$ übrigen Schnittpunkte und die p Paare $b_i\beta_i$, die Curve $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, so erkennt man, dass sich alle diese Curven $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung in den vielfachen Punkten von C_m^p berühren, indem sie alle die χ berühren.

Aber es folgt auch umgekehrt: *Jede Curve ψ' der $(m-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, welche in den vielfachen Punkten von C_m^p die χ berührt und durch die p Paare auf χ geht, schneidet C_m^p in $2m-2$ Punkten, die auf einem Kegelschnitte durch $a\alpha$ liegen.* Ist nämlich B eine beliebige lineare Function der Coordinaten, so ist die allgemeinste Curve ψ' der verlangten Art gegeben durch

$$\psi' \equiv \psi - B\chi = 0;$$

denn sie geht durch das vollständige Schnittpunktesystem der Curve $\psi = 0$ und $\chi = 0$. Es ist daher

$$\psi \equiv \psi' + B\chi$$

und somit liefert (3)

$$C\Phi \equiv A\psi' - (K - AB)\chi$$

d. h. $\psi' = 0$ schneidet $\Phi = 0$ ausser in den Punkten, in welchen $\chi = 0$ ist; noch in $2m-2$ Punkten, für welche

$$K' = K - AB = 0$$

ist, die also auf einem Kegelschnitte liegen, der durch $a\alpha$ geht, da dieses Punktepaar auf $A = 0$ und $K = 0$ liegt.

Je zwei Curven $\psi' = 0$, $\psi'' = 0$ der erwähnten Art schneiden einander noch in $(m-1)$ Punkten, die auf derjenigen Geraden liegen,

---

*) Vgl. Nöther, „Ueber Schnittpunktsysteme einer algebraischen Curve mit nicht adjungirten Curven". Diese Annalen Bd. XV, pag. 507.

auf welcher sich die ihnen entsprechenden Kegelschnitte $K'=0$, $K''=0$ ausser in $a\alpha$ noch schneiden.

Denn ist

$$\psi' \equiv \psi - B\chi,$$
$$\psi'' \equiv \psi - B'\chi,$$

so ist

$$K' \equiv K - AB$$

und

$$K'' \equiv K - AB'$$

also

$$\psi'' - \psi' \equiv (B - B')\chi,$$
$$K'' - K' \equiv (B - B')A$$

d. h. $\psi'=0$ und $\psi''=0$ schneiden einander auf $B - B' = 0$; ebenso $K'=0$ und $K''=0$.

Jede der Curven ψ und K enthält hiernach 3 willkürliche Constanten, welche aber auf die Gleichung der C_m^p keinen Einfluss haben, und die wir uns also für die Folge beliebig, aber fest gewählt denken.

6. Wir halten nun die Paare $b_1\beta_1$, $b_2\beta_2 \ldots b_{p-1}\beta_{p-1}$, $b_p\beta_p$, in denen sich ψ und χ schneiden, fest, dieselben mögen auf den Tangenten $B_1, B_2 \ldots B_{p-1}, B_p$ der Enveloppe $\mathfrak{E}$ liegen, und lassen das Paar $a\alpha$, welches die Tangente A bestimmt, die C_m^p durchlaufen.

Wir wissen dann, dass A in (3) von einem Parameter λ in der $c=(m-p-1)^{\text{ten}}$ Potenz rational abhängt. Da sich nun mit A offenbar ψ, K und χ ändern, so hängen auch diese von λ ab und da jedem A, also auch jedem λ, nur ein bestimmtes ψ, K, χ entspricht, so hängen dieselben rational von λ ab.

Die Ordnung von χ in λ können wir leicht angeben. $\chi=0$ schneidet C_m^p ausser in den p festen Paaren in $(m-2)$ Punkten einer Tangente A von $\mathfrak{E}$, so dass auf dieser nur noch das Paar der $g_2^{(1)}$ liegt. Nun gehen durch einen Punkt x von C_m^p c Tangenten von $\mathfrak{E}$, wovon eine diejenige ist, welche x mit seinem zugeordneten ξ in $g_2^{(1)}$ verbindet, und nur die $c-1$ übrigen Tangenten durch x liefern Curven $\chi=0$, welche x enthalten und zwar jede *eine* und nur *eine*. χ enthält also λ in der $(c-1)^{\text{ten}}$ Potenz. Es möge K den Parameter λ in der ϱ^{ten} Potenz enthalten, dann kann ψ diesen Parameter nur in der $(\varrho-1)^{\text{ten}}$ Potenz aufweisen, denn Φ enthält λ sicherlich nicht, nur C kann von λ abhängen. Bedeutet also $A(\lambda^c)$, dass λ in A in der c^{ten} Potenz auftritt, so schreiben wir die Identität (3) in der Form:

$$(4) \qquad C(\lambda^{c+\varrho-1})\Phi \equiv A(\lambda^c)\,\psi(\lambda^{\varrho-1}) - K(\lambda^\varrho)\,\chi(\lambda^{c-1}).$$

Man ersieht nun, dass $\Phi=0$ erzeugt wird durch den Schnitt der Curven

$$A(\lambda^c) = 0, \quad \chi(\lambda^{c-1}) = 0,$$
$$A(\lambda^c) = 0, \quad K(\lambda^\varrho) \;= 0,$$
$$K(\lambda^\varrho) = 0, \quad \psi(\lambda^{\varrho-1}) = 0.$$

Und zwar durch die ersten wird jeder Punkt $(c-1)$-fach, durch die zweiten 1-fach durch die dritten $(\varrho-1)$-fach erzeugt, da durch einen Punkt von C_m^p $c-1, 1$ resp. $\varrho - 1$ einander zugeordnete Curven der Schaaren gehen, welche einander in diesem Punkte von C_m^p schneiden.

Wir wollen diese Erzeugungen der Reihe nach betrachten.

§ 3.

Erzeugung der hyperelliptischen Curve durch adjungirte Curven $(m-2)^{\text{ter}}$ Ordnung und Tangenten von $\mathfrak{C}$.

7. Die Curven

(5) $$A(\lambda^c) = 0, \quad \chi(\lambda^{c-1}) = 0,$$

von denen die erste linear, die zweite von der $(m-2)^{\text{ten}}$ Ordnung in den Coordinaten ist, erzeugen C_m^p $(c-1)$-fach, denn durch einen Punkt von C_m^p gehen $(c-1)$ Curven χ und auch die $(c-1)$ ihnen entsprechenden Tangenten von $\mathfrak{C}$. Zum Erzeugniss gehören ferner die p Geraden $B_1, B_2 \cdots B_p$, welche die p festen Paare der C_m^p tragen. Denn fällt A mit einer dieser Geraden B_i zusammen, so müsste χ dieselbe in m Punkten schneiden. Sie zerfällt daher in B_i und die Curve φ_i der $(m-3)^{\text{ten}}$ Ordnung, welche durch die $(p-1)$ übrigen Paare geht. Da aber dann die entsprechende Tangente A eben B_i ist, so haben die einander entsprechenden Curven $A(\lambda)$ und $\chi(\lambda)$ die Gerade B_i gemeinschaftlich und diese muss also zum Erzeugniss gehören. Sonst kann χ nicht in eine Gerade und eine φ zerfallen, da diese durch die p Paare gehen müsste. Eine adjungirte Curve $(m-4)^{\text{ter}}$ Ordnung existirt aber nicht, also kann χ sonst überhaupt nicht mehr zerfallen. Das Erzeugniss der Curvenschaaren (5) ist also von der Gesammtordnung $(c-1)m + p$.

Nun muss dieses Erzeugniss identisch sein mit der Curve, welche man erhält, wenn man das Eliminationsresultat von λ aus den beiden Gleichungen (5) gleich Null setzt. Das Eliminationsresultat ist aber von der Ordnung $c(m-2) + c - 1$ und es ist in der That

$$(c-1)m + p = c(m-2) + c - 1$$

zu Folge des Werthes von c.

Sind $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_p$ die Werthe des Parameters λ, für welche

(6) $$A(\lambda_i) \equiv B_i$$

wird, also auch

(7) $$\chi(\lambda_i) \equiv B_i \varphi_i,$$

so muss

(8) $$C(\lambda_i) = 0$$

sein; denn setzt man in (4) für λ den Werth λ_i, so würde

$$C(\lambda_i)\Phi \equiv B_i[\psi(\lambda_i) - K(\lambda_i)\cdot\varphi_i]$$

folgen, d. h. wäre $C(\lambda_i)$ nicht gleich Null, so wäre Φ reducibel. Ist aber $C(\lambda_i) = 0$ so sieht man, dass auch

(9) $$\psi(\lambda_i) \equiv K(\lambda_i)\varphi_i$$

wird, daher auch $\psi(\lambda_i)$ in φ_i und einen Kegelschnitt zerfällt.

§ 4.

Erzeugung der hyperelliptischen Curve durch ein Kegelschnittssystem und die Tangenten von $\mathfrak{C}$. Gleichungen dieser Systeme.

8. Die Systeme der Geraden und Kegelschnitte

(10) $$A(\lambda^c) = 0, \qquad K(\lambda^\varrho) = 0,$$

welche ebenfalls die C_m^p erzeugen, sind gleichzeitig die Curven *niedrigster* Ordnung, welche auf die $g_2^{(1)}$ von C_m^p eindeutig bezogen werden können und *es wird sich darum handeln auch die Ordnung ϱ von λ in $K(\lambda)$ möglichst zu erniedrigen.*

$A(\lambda) = 0$ schneidet den Kegelschnitt $K(\lambda) = 0$ nur in dem Punktepaar a, α von C_m^p und es erzeugen beide Curvenschaaren die C_m^p einfach, da durch jeden Punkt a von C_m^p nur ein Paar entsprechender Curven gehen.

Nebst C_m^p können die Schaaren nur noch Geraden erzeugen. Und zwar wird immer dann eine Gerade mit zum Erzeugniss gehören, wenn eine der Geraden, in welche für specielle Werthe von λ der Kegelschnitt $K(\lambda)$ zerfällt, ein Paar von $g_2^{(1)}$ trägt. Denn dann enthält $K(\lambda)$ den Factor $A(\lambda)$ und mithin gehört diese Gerade A mit zum Erzeugniss. Tritt dieses Verhalten für die Werthe $\lambda = \lambda^{(i)}$ $i = 1, 2, \ldots \mu$ ein d. h. ist

(11) $$K(\lambda^{(i)}) \equiv A(\lambda^{(i)}) \cdot B^{(i)}(\lambda^{(i)})$$

wo $B^{(i)}$ eine lineare Function der Coordinaten bedeutet, so werden nebst C_m^p noch die μ Geraden $A(\lambda^{(i)})$ erzeugt.

Das Erzeugniss der Schaaren (10) muss aber dieselbe Ordnung besitzen, wie das Eliminationsresultat von λ aus den beiden Gleichungen (10) d. h. es muss von der Ordnung $2c + \varrho$ sein. Mithin besteht die Gleichung

$$2c + \varrho = m + \mu$$

oder

$$(12) \qquad \varrho = p - c + 1 + \mu$$

wenn man beachtet, dass $m = c + p + 1$ ist.

Ist nun $\varrho > c - 1$ *und* $\mu > 0$, *so kann der Werth von* ϱ *um wenigstens eine Einheit erniedrigt werden.*

Denn aus (4) folgt, wenn man für λ irgend einen der Werthe $\lambda^{(i)}$ einsetzt und (11) berücksichtigt:

$$C(\lambda^{(i)})\Phi \equiv A(\lambda^{(i)})[\psi(\lambda^{(i)}) - B^{(i)}(\lambda^{(i)})\chi(\lambda^{(i)})],$$

d. h. es muss

$$(13) \qquad C(\lambda^{(i)}) = 0$$

sein, da Φ irreducibel ist. Da aber $C(\lambda^{(i)}) = 0$ ist, so muss auch

$$(14) \qquad \psi(\lambda^{(i)}) \equiv B^{(i)}(\lambda^{(i)})\chi(\lambda^{(i)})$$

sein, d. h. für $\lambda = \lambda^{(i)}$ zerfällt auch die Curve $(m-2)^{\text{ter}}$ Ordnung in eine Curve $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung und die andere in (11) auftretende Gerade $B^{(i)}$.

Aus den Gleichungen (11), (14) und (13) folgt nun, dass

$$(15) \qquad \begin{cases} \dfrac{K(\lambda) - A(\lambda)B^{(i)}(\lambda)}{\lambda - \lambda^{(i)}} = K'(\lambda), \\[2ex] \dfrac{\psi(\lambda) - B^{(i)}(\lambda)\chi(\lambda)}{\lambda - \lambda^{(i)}} = \psi'(\lambda), \\[2ex] \dfrac{C(\lambda)}{\lambda - \lambda^{(i)}} = C'(\lambda) \end{cases}$$

ist, wo $K'(\lambda)$, $\psi'(\lambda)$, $C'(\lambda)$ ganze Functionen von λ sind und zwar um eine Einheit niedriger als $K(\lambda)$, $\psi(\lambda)$ und $C(\lambda)$.

Die Identität (4) kann man aber auch schreiben:

$$C(\lambda)\Phi \equiv A(\lambda)[\psi(\lambda) - B^{(i)}(\lambda)\chi(\lambda)] - [K(\lambda) - A(\lambda)B^{(i)}(\lambda)]\chi(\lambda)$$

und wenn man daher durch $\lambda - \lambda^{(i)}$ dividirt, ergiebt sich zufolge (15)

$$(16) \qquad C'(\lambda)\Phi \equiv A(\lambda)\psi'(\lambda) - K'(\lambda)\chi(\lambda)$$

wobei $K'(\lambda)$ in λ höchstens von der Ordnung $\varrho - 1$ ist.

Es sei $K'(\lambda)$ in λ von der Ordnung $\varrho - \varepsilon$ wobei $\varepsilon \geq 1$ ist. Treten nun in der Schaar $K'(\lambda) = 0$ μ' Gerade auf, welche Paare von $g_2^{(1)}$ tragen, so wird das Erzeugniss von $A(\lambda) = 0$ und $K'(\lambda) = 0$ von der Ordnung $m + \mu'$. Da das Eliminationsresultat von der Ordnung $2c + \varrho - \varepsilon$ wird, so folgt, dass

$$2c + \varrho - \varepsilon = m + \mu'$$

also zu Folge (12), dass $\mu' = \mu - \varepsilon$ ist, d. h. *wird die Ordnung von*

$K(\lambda)$ in λ um ε Einheiten erniedrigt, so treten auch ε Geraden weniger in dem Erzeugnisse der Geraden und Kegelschnittschaar auf.

So lange nun $\mu > 0$ und $\varrho > c - 1$ ist, kann man also sowohl ϱ als μ erniedrigen. Nun ist

$$\varrho - c + 1 = p - 2c + 2 + \mu.$$

Ist also $2c > p + 2$, so wird, so lange $\mu > 2c - p - 2$, auch $\varrho > c - 1$ und wir können mithin sowohl μ als ϱ erniedrigen, bis $\mu = 2c - p - 2$ und $\varrho = c - 1$ wird.

Ist $p < c$, so müssen immer Gerade in der Schaar der Kegelschnitte $K(\lambda)$ auftreten, da $\varrho > 1$ sein muss, also $p - c + 1 + \mu > 1$ oder $\mu > c - p$ ist.

Ist $p \geqq c$ und $2c > p + 2$, so kann in speciellen Fällen $\mu = 0$ werden, wodurch dann $\varrho = p - c + 1$ wird.

Ist aber $2c \leqq p + 2$, so kann man stets $\mu = 0$ machen und es wird $\varrho = p - c + 1$.

Wir können also in der Identität

$$(17) \qquad C(\lambda^{c+\varrho-1})\Phi \equiv A(\lambda^c)\,\psi(\lambda^{\varrho-1}) - \Theta(\lambda^\varrho)\,\chi(\lambda^{c-1}).$$

für $2c > p + 2$ im Allgemeinen $\varrho = c - 1$ setzen und zum Erzeugniss der Schaaren $A(\lambda) = 0$, $\Theta(\lambda) = 0$ treten noch $\mu = 2c - p - 2$ Gerade und zwar muss $\mu > c - p$ sein, also nur für $p \geqq c$ kann $\mu = 0$ werden, dann ist $\varrho = p - c + 1$; für $2c \leqq p + 2$ aber kann immer $\varrho = p - c + 1$ und $\mu = 0$ vorausgesetzt werden.

Wir haben gesehen, dass $C(\lambda) = 0$ wird für $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, wenn dieses die Werthe des Parameters λ sind, welcher den p festen Tangenten $B_1, B_2 \ldots B_p$ entspricht. Dasselbe muss auch in der reducirten Gleichung (17) stattfinden, da für diese Werthe $\chi(\lambda_i)$ den Factor $A(\lambda_i) \equiv B_i$ enthält.

Die $c + \varrho - 1 - p$ übrigen Werthe, für welche noch $C(\lambda) = 0$ wird, müssen die Werthe $\lambda^{(i)}$ sein für, die $\Theta(\lambda^{(i)}) \equiv A(\lambda^{(i)})\,B^{(i)}(\lambda^{(i)})$ wird. Es ist aber auch nach (12) immer $c + \varrho - 1 - p = \mu$, so dass durch diese $\mu + p$ Werthe von $\lambda = \lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_p, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \cdots, \lambda^{(\mu)}$ in der That alle Wurzeln von $C(\lambda) = 0$ erschöpft sind.

9. Dass umgekehrt die Tangentenschaar einer rationalen Enveloppe $A(\lambda^c) = 0$ der c^{ten} Classe mit einer Kegelschnittsschaar $\Theta(\lambda^\varrho) = 0$, welche den Parameter λ in der ϱ^{ten} Potenz enthält, eine hyperelliptische Curve erzeugen, ist leicht zu beweisen. Beide Schaaren erzeugen ein Gebilde von der Ordnung $2c + \varrho$. Sind nun μ Tangenten $A(\lambda')$ Theile der zugehörigen Kegelschnitte $\Theta(\lambda')$, so bleibt ausser den μ Geraden $A(\lambda')$ noch eine Curve C_m der m^{ten} Ordnung, wobei $m = 2c + \varrho - \mu$ ist.

Zu den Schaaren $A(\lambda^c) = 0$, $\Theta(\lambda^\varrho) = 0$ nehmen wir noch einen Strahlenbüschel $P - \nu Q = 0$, dessen Strahlen die Punkte von C_m

projiciren sollen. Einem bestimmten Strahl des Büschels, oder einem Werthe von ν, entsprechen m Werthe λ, welche die Gleichungen $A(\lambda) = 0$, $\Theta(\lambda) = 0$ befriedigen, entsprechend den m Schnittpunkten des Strahles mit C_m. Einem Werthe λ entsprechen blos zwei Werthe ν: die Strahlen, welche nach den beiden Schnittpunkten von $A(\lambda) = 0$, $\Theta(\lambda) = 0$ gehen. Zwischen λ und ν besteht also eine Relation $f(\lambda^m, \nu^2) = 0$, die in λ vom m^{ten}, in ν vom 2^{ten} Grade ist, und die, wenn λ, ν als Coordinaten aufgefasst werden, die Gleichung einer Curve $(m+2)^{\text{ter}}$ Ordnung C' ist, welche den Punkten der Curve C_m eindeutig umkehrbar entspricht. Nun ist C' offenbar hyperelliptisch, also auch C_m.

C' wäre, wenn sie keine weitern Doppelpunkte hätte, vom Geschlechte $(m-1)(2-1) = m-1$. Es liegen aber auf jedem der c Strahlen des Büschels $P - \nu Q = 0$, welche Tangenten von $\mathfrak{C}$ sind, Punktepaare, welchen nur je ein Werth λ, also nur ein Punkt von C' zugehört; dieser muss also für C' ein Doppelpunkt sein, da er zwei verschiedenen Punkten von C_m entspricht. Es ist mithin C' und also auch C_m vom Geschlechte $p = m - c - 1$.

Wir setzen erstens $2c \leq p + 2$ voraus. Alsdann ergiebt sich die Gleichung der allgemeinsten hyperelliptischen Curve C_m^p von der Ordnung m und dem Geschlechte p durch Nullsetzen des Eliminationsresultates von λ aus den Gleichungen

$$A(\lambda^c) = 0, \quad \Theta(\lambda^{p-c+1}) = 0,$$

wobei A eine lineare, Θ eine quadratische Function der Coordinaten ist und zwar so beschaffen, dass $\Theta(\lambda)$ *nie* $A(\lambda)$ als Factor enthält, was bei allgemeinen Werthen der Constanten in Θ und A nicht vorkommen wird. Es wird $m = c + p + 1$ und $A(\lambda) = 0$ hüllt die Enveloppe $\mathfrak{C}$ ein, welche zu C_m^p gehört.

Setzt man

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_{c+1}), \\ f_1(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_{p-c+2}), \\ \frac{df}{d\lambda} &= f'(\lambda), \quad A(\lambda_i) = A_i, \quad \Theta(\lambda_i) = \Theta_i, \end{aligned} \tag{18}$$

so dass also einander die Geraden $A_i = 0$ und Kegelschnitte $\Theta_i = 0$ entsprechen, so kann man:

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= f(\lambda) \sum_1^{c+1} {}^i \frac{A_i}{f'(\lambda_i)} \cdot \frac{1}{\lambda - \lambda_i}, \\ \Theta(\lambda) &= f_1(\lambda) \sum_1^{p-c+2} {}^i \frac{\Theta_i}{f_1'(\lambda_i)} \cdot \frac{1}{\lambda - \lambda_i} \end{aligned} \tag{19}$$

setzen.

Ist zweitens $2c > p+2$, so wird die Gleichung der allgemeinen hyperelliptischen Curve erhalten durch Nullsetzen eines Theiles des Eliminationsresultates von λ aus

$$A(\lambda^c)=0, \quad \Theta(\lambda^{c-1})=0,$$

wobei dann der übrige Theil des Eliminationsresultates gleich Null gesetzt, $\mu = 2c-p-2$ Gerade liefern muss. Da die Ordnung des Eliminationsresultates $2c+c-1$ ist, so bleibt als Ordnung der hyperelliptischen Curve $m = 3c-1-\mu = c+p+1$.

Ist $\mu \leq c$ d. h. $c \leq p+2$, so setze man

$$f(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_{c+1})$$

und weise den Parameterwerthen $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_\mu$ die Kegelschnitte $\Theta(\lambda_i) = A_i B_i$ zu, wobei $A_i = A(\lambda_i)$ ist; dann kann man

$$(20)\quad \begin{aligned} \Theta(\lambda) &= \frac{f(\lambda)}{\lambda-\lambda_{c+1}}\left[\sum_1^{\mu}{}_i \frac{A_i B_i}{f'(\lambda_i)}\,\frac{\lambda_i-\lambda_{c+1}}{\lambda-\lambda_i} + \sum_{\mu+1}^{c}{}_i \frac{\Theta_i}{f'(\lambda_i)}\,\frac{\lambda_i-\lambda_{c+1}}{\lambda-\lambda_i}\right], \\ A(\lambda) &= f(\lambda)\sum_1^{c+1}{}_i \frac{A_i}{f'(\lambda_i)}\,\frac{1}{\lambda-\lambda_i} \end{aligned}$$

setzen, und ersieht, dass

$$\Theta(\lambda) - A(\lambda)B_i$$

für $\lambda = \lambda_i$ identisch verschwindet, also $A(\lambda_i) = A_i$ ein Theil des Erzeugnisses beider Schaaren (20) wird. Der übrige Theil kann dann nur mehr eine hyperelliptische Curve C_m^p sein.

Ist aber $c < \mu$, so muss noch für $\mu - c$ weitere Werthe von λ der Kegelschnitt $\Theta(\lambda)$ die Gerade $A(\lambda)$ als Factor enthalten. Damit aber für einen bestimmten Werth $\lambda = \lambda_x' \cdots \Theta(\lambda_x') \equiv A(\lambda_x')B_x'$ wird, muss $\Theta(\lambda_x)$ drei Bedingungen erfüllen, also muss der Ausdruck von $\Theta(\lambda)$ in (20) noch wenigstens $3(\mu-c)$ willkürliche Constanten enthalten, wenn er auch für $c<\mu$ brauchbar sein soll. Nun sind die $B_1, B_2 \ldots B_c$ ganz willkürliche lineare Functionen der Coordinaten, führen also im Ganzen $3c-1$ willkürliche Constanten in $\Theta(\lambda)$ ein, die man dann so wählen kann, dass für $\lambda = \lambda_x'$ die Identität $\Theta(\lambda_x') \equiv A(\lambda_x')B_x'$ stattfindet, denn es ist immer $3c-1 > 3(\mu-c)$.

In dem Falle $c \geq \mu$, also $c \leq p+2$ können einzelne der $B_i \equiv 0$ angenommen werden, indem $\Theta(\lambda)=0$ dann bloss vom $\varrho<(c-1)^{\text{ten}}$ Grade in λ wird und nur $\mu = \varrho - p + c - 1$ Gerade B_x übrig bleiben, welche mit erzeugt werden. Sind sämmtliche $B_i \equiv 0$, so wird $\Theta(\lambda)$ vom Grade $\varrho = p-c+1$ in λ und erzeugt mit $A(\lambda)=0$ eine specielle hyperelliptische Curve. Die Schaar $\Theta(\lambda)=0$ kann dann genau auf die Form (19) gebracht werden.

§ 5.

Erzeugung der hyperelliptischen Curve durch ein Kegelschnittsystem und adjungirte Curven $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung.

10. Da wir den Werth von $\varrho = p - \epsilon + 1 + \mu$ in § 4, 8. bestimmt haben, und fanden, dass bei der Erzeugung durch die Schaaren, deren Gleichungen (10) sind, dann μ Gerade auftreten für die Werthe $\lambda = \lambda^{(i)}$, $i = 1, 2, \cdots, \mu$, dass aber gleichzeitig auch für die zugehörigen Curven $\psi(\lambda^{(i)}) \equiv B^{(i)}(\lambda^{(i)})\, \chi(\lambda^{(i)})$ gilt, so können wir auch die dritte in § 2, 6. erwähnte Erzeugung der C_m^p durch die Schaaren

$$K(\lambda^{\varrho}) = 0, \qquad \psi(\lambda^{\varrho-1}) = 0$$

von Kegelschnitten Curven $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung und näher in's Auge fassen.

Die $\psi(\lambda) = 0$ schneidet den entsprechenden Kegelschnitt $K(\lambda) = 0$ in $2m-2$ Punkten der C_m^p. Durch jeden Punkt a von C_m^p gehen $\varrho - 1$ Kegelschnitte $K(\lambda)$ (ausser dem durch a gehenden) und $(\varrho - 1)$ ihnen entsprechende Curven $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung $\psi(\lambda)$. Es wird also C_m^p von den Schaaren $(\varrho - 1)$ mal erzeugt.

Zum Erzeugnis gehört ferner jeder der Kegelschnitte $K(\lambda_i)$ für $i = 1, 2, \cdots, p$, da nach § 3, 7. Gleichung (9) für diese Werthe $\psi(\lambda_i)$ den Factor $K(\lambda_i)$ enthält. Aber auch für die Werthe $\lambda = \lambda^{(i)}$, $i = 1, 2, \cdots, \mu$ wird $\psi(\lambda^{(i)}) \equiv B^{(i)} \chi(\lambda^{(i)})$ und da $K(\lambda^{(i)}) \equiv A(\lambda^{(i)})\, B^{(i)}$ wird, so enthalten beide Curven den Factor $B^{(i)}$, der mithin zum Erzeugniss gehört. Es wird also die C_m^p $(\varrho - 1)$ mal erzeugt, hierzu p Kegelschnitte und μ Gerade, so dass das Gesammterzeugniss die Ordnung

$$(\varrho - 1)\, m + 2p + \mu$$

hat. Nun ist das Eliminationsresultat von λ aus (22) von der Ordnung

$$\varrho(m-1) + 2(\varrho - 1) = (\varrho - 1)\, m + 2p + \mu,$$

wenn man beachtet, dass

$$\varrho = p - \epsilon + 1 + \mu = 2p + 2 + \mu - m$$

ist.

II.

Die hyperelliptischen Curven C_{p+3}^p und C_{2p}^p.

§ 1.

Die Gleichung der hyperelliptischen Curve C_{p+3}^p.

11. Die in § 4, 9. angegebene Erzeugung der hyperelliptischen Curven führt direct auf ihre Gleichung, sobald die Elimination des Parameters λ gelingt. Ich will im Folgenden zwei solche Beispiele angeben und

zwar den allgemeinen Fall $c = 2$, wobei wir also eine allgemeine hyperelliptische Curve vom Geschlechte p und der Ordnung $p + 3$ erhalten, und den speciellen Fall, der am Ende von 9. erwähnt wurde, dass nämlich $\varrho = p - c + 1 = 2$ ist, also $m = 2p$ wird.

Wir wollen den ersten Fall ausführlich behandeln, indem der zweite dann direct aus diesem folgt. An Stelle der Gleichung (19) der Schaaren nehmen wir einfacher dieselben in nachstehender Form an:

$$
\begin{aligned}
& A(\lambda) = T_0 + S\lambda + T_1\lambda^2 = 0, \\
(21) \qquad & \Theta(\lambda) = f(\lambda)\sum_1^p \frac{\Theta_i}{\lambda - \lambda_i}, \\
& f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_p),
\end{aligned}
$$

indem wir $A(\lambda_i) = A_i = 0$ dem Kegelschnitte $\Theta(\lambda_i) = f'(\lambda_i)\Theta_i = 0$ entsprechen lassen.

Die Geraden $A(\lambda) = 0$ hüllen den Kegelschnitt

$$(22) \qquad \mathfrak{C}_2 \equiv S^2 - 4T_0T_1$$

ein. Das Erzeugniss der Schaaren (21) ist eine Curve von der Ordnung $m = p + 3$.

Sei nun x ein Punkt der Curve C_{p+3}, welche durch die Schnittpunkte entsprechender $A(\lambda) = 0$ und $\Theta(\lambda) = 0$ erzeugt wird, so geht durch denselben ausser $A(\lambda) = 0$ noch die Tangente $A(\lambda') = 0$, und es gelten mithin für x die drei Gleichungen

$$
\begin{aligned}
A(\lambda') &= T_0 + S\lambda' + T_1\lambda'^2 = 0, \\
A(\lambda) &= T_0 + S\lambda + T_1\lambda^2 = 0, \\
\Theta(\lambda) &= f(\lambda)\sum_1^p \frac{\Theta_i}{\lambda - \lambda_i} = 0.
\end{aligned}
$$

Wir nehmen x auf keiner der Tangenten $A_i = 0$ an und auch nicht auf $T_1 = 0$, so dass also für x zufolge der dritten Gleichung auch

$$T_1^{p-1} f(\lambda) f(\lambda') \sum_1^p \frac{\Theta_i}{(\lambda - \lambda_i)(\lambda' - \lambda_i)}(\lambda_i - \lambda') = 0$$

ist, oder wenn wir die ersten zwei Gleichungen berücksichtigen, wird für x

$$
\begin{aligned}
& D\sum_1^p \frac{\Theta_i}{A_i}(\lambda_i - \lambda') = 0, \\
& D = A_1 A_2 \cdots A_p,
\end{aligned}
$$

d. h. die Curve $(p+1)^{\text{ter}}$ Ordnung

(23) $$\chi(\lambda') = D \sum_1^p \frac{\Theta_i}{A_i}(\lambda_i - \lambda') = 0$$

geht auch durch den Punkt x, der gleichzeitig auf $A(\lambda') = 0$ und $A(\lambda) = 0$ liegt.

Nun schneidet $\chi(\lambda') = 0$ die Tangente $A(\lambda') = 0$ in $(p+1)$ Punkten, die offenbar alle, sowie x auf C_{p+3} liegen, da zwar $\Theta(\lambda) = 0$ und $A(\lambda) = 0$ für diese Punkte andere Werthe von λ liefern, aber $\chi(\lambda') = 0$ und $A(\lambda') = 0$ immer dieselben bleiben. $\chi(\lambda') = 0$ ist ein Büschel von Curven $(p+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welcher C_{p+3} in denselben $p+1$ Punkten trifft wie die Tangenten $A(\lambda')$, welche noch das Paar tragen, das $\Theta(\lambda') = 0$ auf ihnen ausschneidet.

Der Büschel (23) erzeugt daher mit dem Tangentenbüschel $A(\lambda') = 0$ auch die C_{p+3}. Nebenbei aber werden die Geraden $A_\varkappa = 0$, $\varkappa = 1, 2, \cdots, p$ erzeugt, denn für $\lambda' = \lambda_\varkappa$ wird

$$\chi(\lambda_\varkappa) = A_\varkappa \cdot \varphi_\varkappa,$$

wobei

(24) $$\varphi_\varkappa = \frac{D}{A_\varkappa} \sum_1^p{}^i \frac{\Theta_i}{A_i}(\lambda_i - \lambda_\varkappa)$$

eine Curve p^{ter} Ordnung ist. Da das Erzeugniss von der Ordnung

$$2(p+1) + 1 = p + 3 + p$$

wird, so bleibt nach Abzug der p Tangenten $A_\varkappa = 0$ der Rest von der $(p+3)^{\text{ten}}$ Ordnung, welcher eben C_{p+3} darstellt.

Eliminiren wir aus (23) und $A(\lambda') = 0$ den Parameter λ', so wird das Resultat

(25) $$F \equiv T_0\left[D\sum_1^p{}^i \frac{\Theta_i}{A_i}\right]^2 + S\left[D\sum_1^p{}^i \frac{\Theta_i}{A_i}\right]\left[D\sum_1^p{}^i \frac{\Theta_i}{A_i}\lambda_i\right] + T_1\left[D\sum_1^p{}^i \frac{\Theta_i}{A_i}\lambda_i\right]^2 \equiv D\Phi,$$

wobei

(26) $$\Phi \equiv D\sum_1^p{}^i \frac{\Theta_i^2}{A_i} + D\sum_1^p{}^{i,\varkappa} \frac{\Theta_i\Theta_\varkappa}{A_i A_\varkappa}[2T_0 + S(\lambda_i + \lambda_\varkappa] + 2T_1\lambda_i\lambda_\varkappa]$$

ist. $\sum_1^p{}^{i,\varkappa}$ bedeutet die Summe über alle Amben ohne Wiederholung der Zahlen $1, 2, \ldots, p$.

$\Phi = 0$ ist die Gleichung des Erzeugnisses der Schaaren (21), also eine hyperelliptische Curve C_{p+3} der $(p+3)^{\text{ten}}$ Ordnung. Aus (25) ersehen wir, dass $F = 0$ in den Basispunkten des Büschels von Curven $(p+1)^{\text{ter}}$ Ordnung (23) Doppelpunkte besitzt. Die Basispunkte bestehen aus den $2p$ Schnittpunkten der $A_i = 0$ und $\Theta_i = 0$, ferner aus den $\frac{1}{2}p(p-1)$ Schnittpunkten der Geraden $A_i = 0$ untereinander und aus d anderen Punkten, die nicht auf den $A_i = 0$ liegen, und deren Anzahl

$$d = (p+1)^2 - 2p - \frac{1}{2}p(p-1) = \frac{1}{2}p(p+1) + 1$$

ist. Nun sind die $\frac{1}{2}p(p-1)$ Punkte Doppelpunkte von $D = 0$, die $2p$ Punkte auf $A_i = 0$, $\Theta_i = 0$ sind für $D = 0$ einfach und $\Phi = 0$ geht auch durch dieselben, wie aus (26) ersichtlich, also sind nur die d übrigen Punkte Doppelpunkte von C_{p+3}. Diese hat daher das Geschlecht

$$\frac{1}{2}(p+1)(p+2) - \frac{1}{2}p(p+1) - 1 = p.$$

Eine C^p_{p+3} kann auch nur einfache Doppelpunkte haben, sobald der Kegelschnitt $\mathfrak{C}_2$, der von den Geraden $A(\lambda) = 0$ eingehüllt wird, irreducibel ist.

§ 2.

Das vollständige System der zu C^p_{p+3} adjungirten Curven der p-ten Ordnung.

12. Der Büschel von Curven $(p+1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\chi(\lambda) = D \sum_1^p{}^i \frac{\Theta_i}{A_i}(\lambda_i - \lambda) = 0$$

ist also nach dem Vorstehenden zu C^p_{p+3} *adjungirt*, weil alle Doppelpunkte von C^p_{p+3} zu seinen Basispunkten gehören. Da nun $A_\varkappa = 0$ durch die Doppelpunkte nicht hindurchgeht, so ist die Curve p^{ter} *Ordnung*

$$\varphi_\varkappa = \frac{D}{A_\varkappa} \sum_1^p{}^i \frac{\Theta_i}{A_i}(\lambda_i - \lambda_\varkappa) = 0$$

zu C^p_{p+3} *adjungirt*. Dieselbe schneidet $\Phi = 0$ in den $(p-1)$ Paaren auf $A_i = 0$, $\Theta_i = 0$, $(i \neq \varkappa)$, sie geht ferner durch die $\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$ Schnittpunkte der Geraden $A_i = 0$, $(i = 1, 2, \cdots, p$ mit Ausnahme von $i = \varkappa)$ unter einander.

Dieses Verhalten einer adjungirten Curve der p^{ten} Ordnung zu einer hyperelliptischen Curve C^p_{p+3} der Ordnung $p+3$ und dem Geschlechte p lässt sich ganz allgemein beweisen, sobald der Kegelschnitt, der von den Geraden, die die $g_2^{(1)}$ ausschneiden, eingehüllt wird, irreducibel vorausgesetzt ist.

Seien nämlich $b_1\beta_1$, $b_2\beta_2, \ldots, b_p\beta_p$ irgend welche p Paare der $g_2^{(1)}$ von C^p_{p+3} auf den Geraden $B_1, B_2, \ldots, B_p$, welche Tangenten von $\mathfrak{C}_2$ sind; dann geht durch diese Paare genau ein Büschel adjungirter Curven χ der $(p+1)^{\text{ten}}$ Ordnung. Denn jede χ schneidet C^p_{p+3} nur noch in $p+1$ Punkten, welche keiner Specialschaar angehören können, da eine der Curven z. B. diejenige ist, welche aus B_p und der adjungirten Curve p^{ter} Ordnung $\varphi^{(p)}$ besteht, die durch die $p-1$ übrigen Paare geht, und die Gruppe von $(p+1)$ Punkten in der B_p ausser in $b_p\beta_p$ noch schneidet, sicherlich keine Specialgruppe ist. Die Beweglichkeit der Gruppen von $(p+1)$ Punkten, also auch der Curven χ, ist daher genau $p+1-p=1$.

Da zu den Curven dieses Büschels $B_1 \cdot \varphi^{(1)}$ und $B_2 \cdot \varphi^{(2)}$ zählt, wobei unter $\varphi^{(i)}$ die adjungirte Curve p^{ter} Ordnung zu verstehen ist, welche durch die $p-1$ von den obigen p Paaren geht, das auf B_i ausgenommen, so gehört der Schnittpunkt der Geraden B_1 und B_2 zu den Basispunkten des obigen Büschels. In demselben sind aber ferner auch die Curven $B_i\varphi^{(i)}$, $i=3, 4, \cdots, p$ enthalten und da B_i durch den Schnittpunkt von B_1 und B_2 *nicht* gehen kann, da sonst durch diesen Punkt *drei Tangenten von* $\mathfrak{C}_2$ *gingen, so muss* $\varphi^{(i)}$ *hindurchgehen.* Da nun die $p-2$ übrigen Paare auf $B_3, B_4 \ldots B_p$ ganz willkürlich sind, so gilt der Satz:

Jede zu C^p_{p+3} *adjungirte Curve* φ *der* p^{ten} *Ordnung, welche durch die beiden Paare* $b_1\beta_1$ *und* $b_2\beta_2$ *der* $g_2^{(1)}$ *geht, enthält auch den Schnittpunkt der beiden Geraden* $b_1\beta_1$ *und* $b_2\beta_2$*).

Schneidet also die adjungirte Curve φ der p^{ten} Ordnung die C^p_{p+3} in den $(p-1)$ Paaren auf den Tangenten $B_1, B_2, \ldots, B_{p-1}$ des Kegelschnittes $\mathfrak{C}_2$, so geht φ durch die sämmtlichen Schnittpunkte der $(p-1)$ Geraden.

Der Büschel adjungirter Curven p^{ter} Ordnung, welcher durch $p-2$ Paare der $g_2^{(1)}$ geht, hat daher seine Basispunkte ausser in den

---

*) Dieser Satz gilt allgemeiner für $c<p$ folgendermassen: *Zieht man von einem Punkte* x *der Ebene die* c *Tangenten von* $\mathfrak{C}$ *und legt durch die* c *Paare der* $g_2^{(1)}$ *der* C^p_m *auf diesen Tangenten eine zu* C^p_m *adjungirte Curve der* $(m-3)^{\text{ten}}$ *Ordnung, so geht sie immer auch durch den Punkt* x. Vrgl. meine Abhandlung: „Ueber hyperelliptische Curven" in den Sitzungsberichten der Wiener Academie Bd. XCIII d. d. 18. März 1886, pag. 605.

d Doppelpunkten von C^p_{p+3} und den $(p-2)$ Paaren der $g_2^{(1)}$ noch in den $\frac{1}{2}(p-3)(p-2)$ Schnittpunkten der $(p-2)$ Geraden, welche die Paare tragen. Sonst kann er keine Basispunkte besitzen. Es ist auch

$$d + 2(p-2) + \frac{1}{2}(p-2)(p-3) = p^2.$$

Hieraus folgt eine Relation für die Lage der d Doppelpunkte einer hyperelliptischen C^p_{p+3}.*)

Sind also $K_i = 0$, $i = 1, 2, \cdots, p-1$ irgend welche Kegelschnitte, die bez. durch die $p-1$ Paare gehen, welche auf den Geraden, deren Gleichungen $B_i = 0$ seien, liegen, so ist die Gleichung der allgemeinsten Curve p^{ter} Ordnung φ', welche durch die $(p-1)$ Punktepaare auf $K_i = 0$, $B_i = 0$ und die $\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$ Schnittpunkte dieser Geraden geht (also auch der zu C^p_{p+3} adjungirten) in der Form

$$\varphi' \equiv \mathsf{D}\sum_1^{p-1}{}_i \frac{\alpha_i K_i}{B_i} + B\cdot\mathsf{D}, \tag{27}$$

$$\mathsf{D} = B_1 \cdot B_2 \cdots B_{p-1}$$

enthalten, wobei α_i Constante und B eine willkürliche lineare Function der Coordinaten bedeutet. Denn φ' kann, da sie durch die $2(p-1)$ und die $\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$ Punkte gehen soll, nur mehr

$$\frac{1}{2}p(p+3) - 2(p-1) - \frac{1}{2}(p-1)(p-2) = p+1$$

willkürliche Constanten enthalten, da die Punkte, durch welche sie geht, für sie lauter unabhängige Bedingungen sind. Nun enthält aber (27) genau $(p+1)$ willkürliche Constanten, nämlich die $(p-1)$ Constanten α_i und die drei Constanten von B geben $p+2$ homogene, oder $p+1$ willkürliche Constanten von φ'.

Es geht zwar die scheinbar eine allgemeinere Gleichung besitzende Curve p^{ter} Ordnung

$$\varphi'' \equiv \mathsf{D}\sum_1^{p-1}{}_i \frac{\alpha_i K_i + B_i C_i}{B_i} + B'\,\mathsf{D} = 0$$

auch durch die gegebenen Punkte, wobei C_i willkürliche lineare Functionen der Coordinaten sind. Es ist aber

*) Wie man aus diesem Verhalten die C^p_{p+3} durch projectivische Büschel adjungirter φ erzeugen kann, habe ich l. c. pag. 611 gezeigt.

$$\varphi'' = D \sum_1^{p-1} i \frac{\alpha_i K_i}{B_i} + \left[B' + \sum_1^{p-1} i\, C_i\right] D,$$

also da $B' + \sum C_i$ eine ebenso willkürliche lineare Function der Coordinaten wie B ist, enthält φ'' genau so viel Constante wie φ'.

13. Für unsere Curve C^p_{p+3}, deren Gleichung

$$(28)\quad \Phi \equiv D \sum_1^p i \frac{\Theta_i^2}{A_i} + D \sum_1^p {}_{i,\varkappa} \frac{\Theta_i \Theta_\varkappa}{A_i A_\varkappa} [2T_0 + S(\lambda_i + \lambda_\varkappa) + T_1 \lambda_i \lambda_\varkappa] = 0$$

ist, fanden wir, dass die Curven p^{ter} Ordnung

$$(29)\qquad \varphi_\varkappa \equiv \frac{D}{A_\varkappa} \sum_1^p i \frac{\Theta_i}{A_i} (\lambda_i - \lambda_\varkappa) = 0$$

adjungirt sind und dieselbe in den $(p-1)$ Paaren $A_i = 0$, $\Theta_i = 0$, $i \neq \varkappa$ schneiden.

Giebt man nun dem $\varkappa$ der Reihe nach die Werthe $1, 2, \ldots, p$, so erhält *man p von einander linear unabhängige adjungirte Curven p^{ter} Ordnung;* denn eine Identität

$$c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \cdots + c_p \varphi_p \equiv 0,$$

bei constanten von Null verschiedenen c_i, kann nicht stattfinden. Wäre z. B. $c_1 \neq 0$, so setze man für die variablen Coordinaten links die Coordinaten des Schnittpunktes von $A_1 = 0$ und $\Theta_1 = 0$, dann ist $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0, \ldots, \varphi_p = 0$, da alle diese Curven durch dieses Punktepaar gehen. Es ist aber $\varphi_1 \neq 0$, da $\varphi_1 = 0$ dieses Punktepaar nicht enthalten kann, also kann nicht $c_1 \varphi_1 \equiv 0$ sein, sobald $c_1 \neq 0$ ist.

Hieraus folgt nun, dass die Gleichung einer jeden zu C^p_{p+3} adjungirten Curve φ der p^{ten} Ordnung auf die Form

$$(30)\qquad \varphi \equiv c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \cdots + c_p \varphi_p = 0$$

gebracht werden kann, und zwar nur auf eine *einzige ganz bestimmte Art.*

14. Es seien $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{p-1}$ die Parameter der $(p-1)$ Tangenten $B_i \equiv A(\mu_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, p-1$, die $(p-1)$ Paare tragen, in denen $\varphi = 0$ die C^p_{p+3} schneidet. Dann sind die $c_1, c_2, \ldots, c_p$ lineare Functionen einer jeden dieser Grössen. Denn hält man z. B. $\mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_{p-1}$ fest, so beschreiben die Curven φ, die durch die Punktepaare, welche diesen Parametern entsprechen, gehen, einen Büschel, der aus C^p_{p+3} die $g_2^{(1)}$ ausschneidet und also auf den Parameter μ_1 eindeutig umkehrbar bezogen ist. Dann müssen aber nach (30) auch $c_1, c_2, \ldots, c_p$ lineare Functionen eines Parameters sein, der in μ_1 linear ist, da jedem System $c_1, c_2, \ldots, c_p$ ein bestimmtes μ_1 und umgekehrt jedem μ_1 ein bestimmtes System $c_1 \ldots c_p$ entspricht. Es sind also $c_1, c_2, \ldots, c_p$ selbst linear in μ_1.

Nun wird $c_1 = 0$ *dann* und *nur dann*, wenn $\varphi = 0$ durch den Schnittpunkt von $A_1 = 0$ mit $\Theta_1 = 0$ geht. Denn ist $c_1 = 0$, so ist φ von der Form $A_1 N + \Theta_1 M$, da jeder der Ausdrücke $\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_p$ von dieser Form ist. Ist aber φ von der Form $A_1 N + \Theta_1 M$, so muss $c_1 = 0$ sein, da alle φ_i, $i > 1$ von der Form $A_1 N' + \Theta_1 M'$ sind, φ_1 aber nicht von dieser Form sein kann, also auch nicht φ, wenn $c_1 \neq 0$ ist.

Es kann mithin c_1 nur dann verschwinden, wenn eines der Paare $b_i \beta_i$, in denen $\varphi = 0$ die C^p_{p+3} schneidet, mit dem auf $A_1 = 0$ liegenden Paare zusammenfällt, oder wenn eines der $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{p-1}$ gleich λ_1 wird. Mithin ist

$$c_1 = c_1' \prod_{i=1}^{p-1} (\lambda_1 - \mu_i),$$

wo c_1' von den μ_i unabhängig ist. Soll nun für

$$(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{p-1}) = (\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_p)$$

$\varphi \equiv \varphi_1$ werden, so bestimmt sich c_1' aus

$$\varphi_1 \equiv c_1' \prod_{i=2}^{p} (\lambda_1 - \lambda_i) \cdot \varphi_1,$$

also wird

$$c_1 = \frac{\prod\limits_{i=1}^{p-1} (\lambda_1 - \mu_i)}{\prod\limits_{i=2}^{p-1} (\lambda_1 - \lambda_i)}.$$

Setzt man

$$(31) \qquad \begin{aligned} F(\lambda) &= (\lambda - \mu_1)(\lambda - \mu_2) \cdots (\lambda - \mu_{p-1}), \\ f(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_p), \end{aligned}$$

so wird

$$c_1 = \frac{F(\lambda_1)}{f'(\lambda_1)},$$

und man sieht, dass analog

$$(32\text{a}) \qquad c_\varkappa = \frac{F(\lambda_\varkappa)}{f'(\lambda_\varkappa)}$$

wird, dass also zu Folge (30)

$$(32) \qquad \varphi \equiv \sum_1^p \frac{F(\lambda_\varkappa)}{f'(\lambda_\varkappa)} \varphi_\varkappa$$

ist und $\varphi = 0$ dann C^p_{p+3} in den $(p-1)$ Paaren schneidet, welchen die Parameter $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{p-1}$ aus (31) zugehören.

15. Da nun die Curve $\varphi = 0$ durch die $(p-1)$ Paare auf $B_1, B_2, \ldots, B_{p-1}$ geht, so muss ihre Gleichung auf die Form (27) gebracht werden können. Setzen wir in derselben an Stelle der willkürlichen K_h die $\Theta(\mu_h)$ ein,

$$\Theta(\mu_h) \equiv f(\mu_h) \sum_{i=1}^{p} \frac{\Theta_i}{\mu_h - \lambda_i} \tag{33}$$

und

$$B_h \equiv A(\mu_h) = T_0 + S\mu_h + T_1\mu_h^2,$$

so muss $B \equiv 0$ sein. Denn entwickeln wir die rechte Seite von (27) nach Potenzen von T_0, so wird in derselben von $\mathfrak{D}$ herrührend das einzige Glied der $(p-1)^{\text{ten}}$ Potenz $B\,T_0^{p-1}$ sein. Nun soll aber φ' die Form (32) haben, in welcher ein Glied T_0^{p-1} nicht vorkömmt, da jedes $\varphi_\varkappa$ als höchste Potenz von T_0 die $(p-2)^{\text{ten}}$ aufweist, also ist $B \equiv 0$ und es müssen sich also die Constanten α_h in (27) so bestimmen lassen, dass

$$\sum_{\varkappa=1}^{p} \frac{F(\lambda_\varkappa)}{f'(\lambda_\varkappa)}\, \varphi_\varkappa \equiv \mathfrak{D} \sum_{h=1}^{p-1} \frac{\alpha_h \Theta(\mu_h)}{B_h},$$
$$\mathfrak{D} \equiv B_1 \cdot B_2 \cdots B_{p-1}$$

wird.

Entwickeln wir nun beiderseits nach Potenzen von T_0, so müssen die Coefficienten gleich hoher Potenzen einander gleich werden, also speciell der Coefficient von T_0^{p-2}, welches die höchste Potenz von T_0 ist, die auftreten kann.

Nun ist

$$\varphi_\varkappa = \frac{D}{A_\varkappa} \sum_{i=1}^{p} \frac{\Theta_i}{A_i} (\lambda_i - \lambda_\varkappa)$$
$$= T_0^{p-2} \cdot \sum_{i=1}^{p} \Theta_i (\lambda_i - \lambda_\varkappa) + \cdots,$$

also

$$\sum_{\varkappa=1}^{p} \frac{F(\lambda_\varkappa)}{f'(\lambda_\varkappa)}\, \varphi = T_0^{p-2} \cdot \sum_{i=1}^{p} \Theta_i \sum_{\varkappa=1}^{p} \frac{(\lambda_i - \lambda_\varkappa)\, F(\lambda_\varkappa)}{f'(\lambda_\varkappa)} + \cdots.$$

Ferner folgt

$$\mathfrak{D} \sum_{h=1}^{p-1} \frac{\alpha_h \Theta_\mu}{B_h} = T_0^{p-2} \sum_{h=1}^{p-1} \alpha_h f(\mu_h) \sum_{i=1}^{p} \frac{\Theta_i}{\mu_h - \lambda_i} + \cdots$$
$$= T_0^{p-2} \sum_{i=1}^{p} \Theta_i \sum_{h=1}^{p-1} \frac{\alpha_h f(\mu_h)}{\mu_h - \lambda_i} + \cdots$$

Daher muss

$$(34)\qquad \sum_{1}^{p}{}_{\varkappa}\, \frac{(\lambda_i - \lambda_\varkappa)\, F(\lambda_\varkappa)}{f'(\lambda_\varkappa)} = \sum_{1}^{p-1}{}_{h}\, \frac{\alpha_h\, f(\mu_h)}{\mu_h - \lambda_i}$$

sein für

$$i = 1, 2, \cdots, p.$$

Aus diesen p Gleichungen lassen sich die $(p-1)$ Grössen α_h berechnen. Wir bemerken zu diesem Zwecke, dass

$$\sum_{1}^{p}{}_{\varkappa}\, \frac{(\lambda_i - \lambda_\varkappa)\, F(\lambda_\varkappa)}{f'(\lambda_\varkappa)}$$

der negativ genommene Coefficient von $\frac{1}{\lambda}$ ist in der Entwicklung von

$$\frac{(\lambda - \lambda_i)\, F(\lambda)}{f(\lambda)}$$

nach negativen Potenzen von λ. Denn es ist

$$\frac{(\lambda - \lambda_i)\, F(\lambda)}{f(\lambda)} = \sum_{1}^{p}{}_{\varkappa}\, \frac{(\lambda_\varkappa - \lambda_i)\, F(\lambda_\varkappa)}{f'(\lambda_\varkappa)} \cdot \frac{1}{\lambda - \lambda_\varkappa}.$$

Bezeichnet man den Coefficienten der $(-1)^{\text{ten}}$ Potenz in der Entwickelung von $R(z)$ nach negativen Potenzen von z, wie üblich, mit $[R(z)]_{\frac{1}{z}}$, so ist

$$(35)\qquad \sum_{1}^{p}{}_{\varkappa}\, \frac{(\lambda_i - \lambda_\varkappa)\, F(\lambda_\varkappa)}{f'(\lambda_\varkappa)} = -\left[\frac{(\lambda - \lambda_i)\, F(\lambda)}{f(\lambda)}\right]_{\frac{1}{\lambda}}.$$

Ist $R(z)$ für $z = \infty$ eine eindeutige Function und ist $R(\infty) = 1$, so ist

$$[R(z)]_{\frac{1}{z}} = -\left[\frac{1}{R(z)}\right]_{\frac{1}{z}}.$$

Da nun

$$\left[\frac{(\lambda - \lambda_i)\, F(\lambda)}{f(\lambda)}\right]_{\lambda=\infty} = 1$$

wird, so ist

$$(36)\qquad \left[\frac{(\lambda - \lambda_i)\, F(\lambda)}{f(\lambda)}\right]_{\frac{1}{\lambda}} = -\left[\frac{f(\lambda)}{(\lambda - \lambda_i)\, F(\lambda)}\right]_{\frac{1}{\lambda}}.$$

Die Wurzeln von $F(\lambda) = 0$ sind aber $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{p-1}$ und da $f(\lambda_i) = 0$ ist, so ergiebt sich

$$\frac{f(\lambda)}{(\lambda-\lambda_i)\,F(\lambda)}=\sum_{1}^{p-1}{}_h\,\frac{f(\mu_h)}{(\mu_h-\lambda_i)\,F'(\mu_h)}\cdot\frac{1}{\lambda-\mu_h},$$

also

$$\left[\frac{f(\lambda)}{(\lambda-\lambda_i)\,F(\lambda)}\right]_{\frac{1}{\lambda}}=\sum_{1}^{p-1}{}_h\,\frac{f(\mu_h)}{(\mu_h-\lambda_i)\,F'(\mu_h)}\,. \tag{37}$$

Aus (35), (36) und (37) ergiebt sich daher

$$\sum_{1}^{p}{}_\varkappa\,\frac{(\lambda_i-\lambda_\varkappa)\,F(\lambda_\varkappa)}{f'(\lambda_\varkappa)}=\sum_{1}^{p-1}{}_h\,\frac{f(\mu_h)}{(\mu_h-\lambda_i)\,F'(\mu_h)}\,.$$

Vergleicht man dieses Resultat mit (34), so folgt

$$\sum_{1}^{p-1}\frac{\alpha_h f(\mu_h)}{\mu_h-\lambda_i}=\sum_{1}^{p-1}{}_h\,\frac{f(\mu_h)}{(\mu_h-\lambda_i)\,F'(\mu_h)}$$

für

$$i=1,\,2,\,\cdots,\,p,$$

also muss

$$\alpha_h=\frac{1}{F'(\mu_h)}$$

sein.

Es findet daher die Identität

$$D\sum_{1}^{p}{}_\varkappa\,\frac{F(\lambda_\varkappa)}{f'(\lambda_\varkappa)}\sum_{1}^{p}{}_i\,\frac{\Theta_i}{A_i}\;\frac{(\lambda_i-\lambda_\varkappa)}{A_\varkappa}\equiv\mathsf{D}\sum_{1}^{p-1}{}_h\,\frac{f(\mu_h)}{F'(\mu_h)}\;\frac{\displaystyle\sum_{1}^{p}{}_i\,\frac{\Theta_i}{\mu_h-\lambda_i}}{B_h} \tag{38}$$

statt, wobei

$$\begin{aligned}
A_i&=T_0+S\lambda_i+T_1\lambda_i^2,\\
B_h&=T_0+S\mu_h+T_1\mu_h^2,\\
D&=A_1A_2\,\cdots\,A_p,\\
\mathsf{D}&=B_1\,B_2\,\cdots\,B_{p-1},\\
f(\lambda)&=(\lambda-\lambda_1)\,(\lambda-\lambda_2)\,\cdots\,(\lambda-\lambda_p),\\
F(\lambda)&=(\lambda-\mu_1)\,(\lambda-\mu_2)\,\cdots\,(\lambda-\mu_{p-1})
\end{aligned}$$

ist.

15. Für $c_\varkappa$ ergab sich nach (32a) der Werth

$$c_\varkappa=\frac{F(\lambda_\varkappa)}{f'(\lambda_\varkappa)}, \tag{39}$$

also wenn die $c_\varkappa$ gegeben sind, folgen für die Werthe von μ die Relationen

$$(\lambda_\varkappa-\mu_1)\,(\lambda_\varkappa-\mu_2)\,\cdots\,(\lambda_\varkappa-\mu_{p-1})=c_\varkappa f'(\lambda_\varkappa),$$
$$\varkappa=1,\,2,\,\cdots,\,p,$$

d. h. $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{p-1}$ sind die Wurzeln der Gleichung $(p-1)^{\text{ten}}$ Grades in μ:

$$(40)\qquad \begin{vmatrix} 1, & \lambda_1, & \lambda_1^2, & \lambda_1^3, & \cdots, & \lambda_1^{p-1}, & c_1 f'(\lambda_1) \\ 1, & \lambda_2, & \lambda_2^2, & \lambda_2^3, & \cdots, & \lambda_2^{p-1}, & c_2 f'(\lambda_2) \\ 1, & \lambda_3, & \lambda_3^2, & \lambda_3^3, & \cdots, & \lambda_3^{p-1}, & c_3 f'(\lambda_3) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 1, & \lambda_p, & \lambda_p^2, & \lambda_p^3, & \cdots, & \lambda_p^{p-1}, & c_p f'(\lambda_p) \\ 1, & \mu, & \mu^2, & \mu^3, & \cdots, & \mu^{p-1}, & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

welche nur von den symmetrischen Functionen der $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_p$ abhängt.

§ 3.

Specielle hyperelliptische Curven C_{2p}^p.

16. In ganz analoger Art lässt sich die specielle hyperelliptische Curve von der Ordnung $m = 2p$ und dem Geschlechte p behandeln, welche durch Elimination von λ aus den Gleichungen:

$$(41)\qquad \begin{aligned} \Theta(\lambda) &= \tau_0 + \sigma\lambda + \tau_1\lambda^2 = 0, \\ A(\lambda) &= f(\lambda) \sum_1^p{}^i \frac{A_i}{\lambda - \lambda_i} = 0, \end{aligned}$$

wobei

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_p)$$

ist, entsteht, in denen σ, τ_0, τ_1 quadratische Functionen der Coordinaten bedeuten. Die Kegelschnitte $\Theta(\lambda) = 0$ bilden das eine System von vierfach berührenden Kegelschnitten der Curve 4^{ter} Ordnung

$$(42)\qquad \mathfrak{K}_4 \equiv \sigma^2 - 4\tau_0\tau_1 = 0.$$

Man braucht nur in den abgeleiteten Gleichungen die Θ mit den A zu vertauschen, um aus denselben die Gleichungen zu erhalten, welche für diesen Fall gelten. So folgt aus (28), dass die Gleichung der hyperelliptischen Curve C_{2p}^p sein wird

$$(43)\qquad \begin{aligned} &\Phi \equiv \Delta \sum_1^p{}^i \frac{A_i^2}{\Theta_i} + \Delta \sum_1^p{}^{i,\varkappa} \frac{A_i A_\varkappa}{\Theta_i \Theta_\varkappa} [2\tau_0 + \sigma(\lambda_i + \lambda_\varkappa) + 2\tau_1 \lambda_i \lambda_\varkappa] = 0, \\ &\Delta = \Theta_1 \cdot \Theta_2 \cdots \Theta_p \end{aligned}$$

und das System der p linear unabhängigen Curven der $(2p-3)^{\text{ten}}$ Ordnung sich aus

$$(44)\qquad \varphi_\varkappa = \frac{\Delta}{\Theta_\varkappa} \sum_1^p{}^i \frac{A_i}{\Theta_i} (\lambda_i - \lambda_\varkappa) = 0$$

für $\varkappa = 1, 2, \cdots, p$ sich ergiebt. Die Curve $\Phi = 0$ hat nur einfache Doppelpunkte $2p(p-2)+1$ an Zahl. Diese Curve wird die allgemeinste ihrer Art für $p = 4$, da dann $c - 1 = p - 2 = 2$ wird und also $\Theta(\lambda) = 0$ in λ genau von der in § 4, 9. verlangten Ordnung wird. Ist $p < 4$, so kann sich die Gleichung der hyperelliptischen Curve in dieser Form darstellen, aber auch in der Form (28), da dann $c \leq 2$ ist.

Die Curve 4ter Ordnung $\mathfrak{K}_4$, welche von den Kegelschnitten $\Theta(\lambda) = 0$ eingehüllt wird, berührt $\Phi = 0$ überall dort, wo sie dieselbe trifft.

Ist nämlich x ein Punkt von $\mathfrak{K}_4 = 0$, so ist für diesen

$$\sigma^2 = 4\tau_0\tau_1,$$

also

$$\Theta_i = (\sqrt{\tau_0} + \lambda_i\sqrt{\tau_1})^2 = T_i^2$$

und zu Folge (43) wird

$$\Phi \equiv \left[\prod_1^p T_i \sum \frac{A_i}{T_i}\right]^2,$$

d. h. Φ verschwindet für jeden der Schnittpunkte in der zweiten Potenz.

Analog folgt, dass der Kegelschnitt $\mathfrak{C}_2$, welcher die Enveloppe der Geraden ist, die die $g_2^{(1)}$ aus C_{p+3}^p ausschneiden, diese Curve berührt überall wo er ihr begegnet.

Die zu C_{2p}^p adjungirten Curven $(2p-3)$ter Ordnung zeigen hier das besondere Verhalten, dass alle, welche die Paare $a_1\alpha_1$, $a_2\alpha_2$ der $g_2^{(1)}$ enthalten, noch durch vier feste Punkte gehen, welche die Schnittpunkte der Kegelschnitte $\Theta_1(\mu_1) = 0$, $\Theta(\mu_2) = 0$ sind. Hierbei sollen μ_1 und μ_2 die Parameter der Tangenten $A(\lambda) = 0$ sein, welche $a_1\alpha_1$ und $a_2\alpha_2$ tragen.

Dieses Verhalten der adjungirten Curven $(2p-3)$ter Ordnung ist aber für die hyperelliptische Curve 8ter Ordnung mit 17 einfachen Doppelpunkten $p = 4$ leicht zu beweisen.

Prag, im December 1886.

Ueber trinomische Gleichungen.

Von

P. Nekrassoff in Moskau.

Im Folgenden möchte ich über die Resultate einer Arbeit Bericht erstatten, welche von der S. Petersburger Akademie der Wissenschaften preisgekrönt wurde und im Jahre 1883 in der von der Moskauer Mathematischen Gesellschaft herausgegebenen „*Mathematischen Sammlung*" unter dem Titel „*Die Untersuchung der Gleichungen der Form:* $u^m - pu^n - q = 0$" gedruckt worden ist*).

I. Die Grundsätze der Vertheilung der Wurzeln der trinomischen Gleichung auf der Fläche, verbunden mit ihrer Reihenentwickelung und ihrer Ausdrucksweise durch Integrale.

Es sollen m, n positive ganze Zahlen bedeuten, wobei $m > n$ genommen ist. Wir wollen ferner setzen:

$$(1) \qquad P = \frac{n^n (n-m)^{m-n} p^m}{m^m q^{m-n}}.$$

Die Veränderliche z wollen wir als einen Punkt auf der Fläche der rechtwinkeligen Coordinaten darstellen. Der Wurzel

$$(2) \qquad a_k = q^{\frac{1}{m}} \cdot e^{\frac{2k\pi i}{m}}$$

der Gleichung $z^m - q = 0$ wird der bestimmte Punkt a_k dieser Fläche entsprechen; dabei werden die Punkte $a_0, a_1, \cdots a_{m-1}$ auf den Spitzen des regelmässigen Vieleckes liegen, welches sein Centrum im Nullpunkte O hat (Fig. 1).

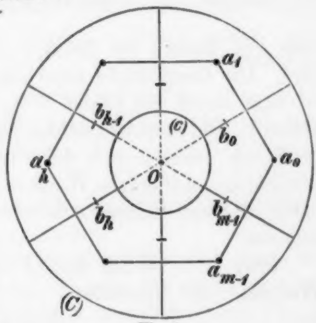


Fig. 1.

---

*) Математическій Сборникъ, томъ XI, выпускъ I, 1883.

Wir wollen noch m Punkte $b_0, b_1, \cdots b_{m-1}$ hinzunehmen, denen die Grössen entsprechen, die durch die Formel ausgedrückt werden:

$$(3) \qquad b_k = \left(\frac{n}{m-n}\right)^{\frac{1}{m}} \cdot a_k e^{\frac{\pi i}{m}}.$$

Wir werden jetzt die Linien ziehen, die von dem Nullpunkte O nach den Punkten $b_0, b_1, \ldots b_{m-1}$ gerichtet sind. Es versteht sich von selbst, dass der Punkt a_k im Inneren des Winkels $b_{k-1} O b_k$ liegen wird (Fig. 1).

Wir wollen ferner mit ϱ und r positive Zahlen bezeichnen, die folgenden Bedingungen genügen:

$$(4) \qquad \begin{cases} \varrho > 1 \text{ und } \varrho^{m-n} - \varrho^{-n} \geqq \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{m}} \left(\frac{m}{m-n}\right)^{\frac{m-n}{m}}, \\ r < 1 \text{ und } r^{-n} - r^{m-n} \geqq \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{m}} \left(\frac{m}{m-n}\right)^{\frac{m-n}{m}}. \end{cases}$$

Es versteht sich, dass ein unendlich grosses ϱ und ein unendlich kleines r diesen Bedingungen genügen werden. Aber diesen Bedingungen genügen auch endliche Zahlen, z. B. die Zahlen, welche aus den Gleichungen

$$(5) \qquad \varrho^{m-n} - 1 = r^{-n} - 1 = \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{m}} \left(\frac{m}{n-m}\right)^{\frac{m-n}{n}}$$

gefunden werden.

Nachdem wir auf diese Weise die Zahlen ϱ und r bestimmt haben, wollen wir uns zwei concentrische Kreise (C) und (c) vorstellen, welche ihr Centrum im Nullpunkte O haben und mit den Halbmessern, die resp. den Moduln der Grössen $\varrho q^{\frac{1}{m}}$ und $r q^{\frac{1}{m}}$ gleich sind, beschrieben sind. Die Grundfläche zwischen den concentrischen Kreisen (C) und (c) wird durch die Linien $Ob_0, Ob_1, \ldots Ob_{m-1}$ in m gleiche Theile getheilt. Die Contour, welche denjenigen von diesen Theilen umgiebt, in dessen Inneren sich der Punkt a_k befindet, wollen wir durch A_k bezeichnen. Auf solche Weise werden wir m Contouren $A_0, A_1, \ldots A_{m-1}$ haben, in deren Inneren sich beziehungsweise die Punkte $a_0, a_1, \ldots a_{m-1}$ befinden.

Satz I. — *Wenn mod. $P < 1$, so liegen die Punkte, welche die Wurzeln z der Gleichung*

$$(6) \qquad z^m - p z^n - q = 0$$

darstellen, beziehungsweise im Inneren der Contouren $A_0, A_1, \ldots A_{m-1}$. Bezeichnen wir insbesondere die Wurzel von (6), welche der Contour A_k zugehört, mit z_k, so lässt sich die Grösse z_k durch die convergirende Reihe ausdrücken:

$$(7)\qquad z_h^k = \frac{k}{m}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{\Phi\left(\frac{k+ns}{m}, s-1\right)}{\Gamma(1+s)}p^s a_h^{k-(m-n)s}.$$

Hier bedeutet $\Phi(k, s)$, wie immer im Folgenden, eine Factorialfunction, welche auf folgende Weise definirt ist:

$$(8)\begin{cases}\Phi(x, s) = (x-1)(x-2)\cdots(x-s), \text{wenn } s \text{ eine ganze, positive Zahl ist;}\\ \Phi(x, s) = 1, \text{ wenn } s = 0;\\ \Phi(x, s) = \frac{1}{\Phi(x-s, -s)}, \text{ wenn } s \text{ eine ganze, negative Zahl ist.}\end{cases}$$

Der Beweis dieses Satzes gründet sich darauf, dass für alle Punkte der Contour A_h:

$$\text{mod.}\ \frac{pz^n}{z^m - q} \leq \text{mod.}\ P^{\frac{1}{m}} < 1.$$

Mit Rücksicht hierauf können wir nämlich — wenn wir überhaupt das längs einer Contour S im positiven Sinne genommene Integral

$$\int F(z)\,dz$$

mit

$$\int\limits_S F(z)\,dz$$

bezeichnen, das Integral

$$(9)\qquad J = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{A_h}\frac{d\log(z^m - pz^n - q)}{dz}\,dz$$

in eine convergirende Reihe nach Potenzen von p entwickeln. Mittels dieser Reihe werden wir finden, dass $J = 1$. Dieses Resultat zeigt, dass im Innern der Contour A_h nur eine Wurzel der Gleichung (6) liegt. Hierauf werden wir, wie es bekannt ist, haben:

$$(10)\qquad z_h^k = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{A_h} z^k\cdot\frac{d\log(z^m - pz^n - q)}{dz}\,dz.$$

Diese Formel erlaubt uns, die Grösse z_h^k entweder mittels der Reihe (7) oder mittels bestimmter Integrale auszudrücken.

Wir wollen jetzt zur Ableitung des zweiten Satzes, der dem Falle, wo mod. $P > 1$, entspricht, übergehen. Zu dem Zwecke wollen wir uns auf der Fläche zwei Gruppen von Punkten vorstellen (vergl. Fig. 2): erstens die Punkte $d_0, d_1, \ldots d_{m-n-1}$, welche die Wurzeln der Gleichung $z^{m-n} - p = 0$ darstellen, die man aus folgender Formel bekommt:

$$(11)\qquad d_h = p^{\frac{1}{m-n}}e^{\frac{2h\pi i}{m-n}},$$

zweitens die Punkte $e_0, e_1, \ldots e_{n-1}$, welche die Wurzeln der Gleichung $pz^n + q = 0$ darstellen, die man aus folgender Formel erhält:

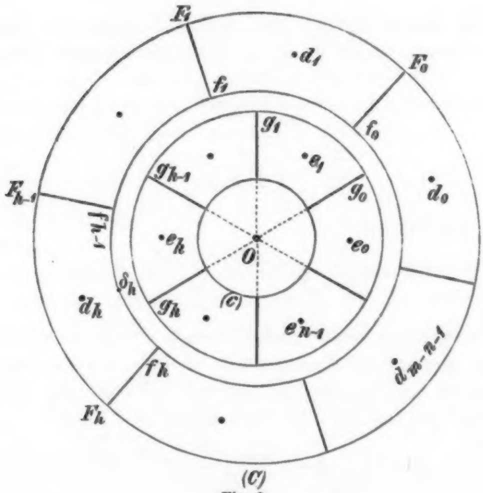
$$(12) \qquad e_h = \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{n}} e^{\frac{(2h+1)\pi i}{n}}.$$

Ausserdem wollen wir uns (Fig. 2) die Punkte $f_0, f_1, \ldots f_{m-n-1}$ vorstellen, welche die Grössen

$$(13) \qquad f_h = \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m-n}} d_h \, e^{\frac{\pi i}{m-n}}$$

repräsentiren, und die Punkte $g_0, g_1, \ldots g_{n-1}$, welche die Grössen vorstellen:

$$(14) \qquad g_h = \left(\frac{m}{m-n}\right)^{\frac{1}{n}} e_h \, e^{\frac{\pi i}{n}}.$$



(C)
Fig. 2.

Es versteht sich von selbst, dass der Punkt d_h im Innern des Winkels $f_{h-1}\, O\, f_h$, und der Punkt e_h im Innern des Winkels $g_{h-1}\, O\, g_h$ liegen wird. Wir wollen zwei concentrische Kreise, welche durch die Puncte f_0, f_1, f_h und durch die Punkte g_0, g_1, g_h gehen, mit (f) und (g) bezeichnen. Da nach Voraussetzung mod. $P > 1$, so ist:

$$(15) \qquad \text{mod. } d_h > \text{mod. } f_h > \text{mod. } g_h > \text{mod. } e_h.$$

Daher wird der Kreis (g) kleiner als der Kreis (f) sein und zugleich werden alle Punkte $e_0, e_1, \ldots e_{n-1}$ im Innern des Kreises (g) und alle Punkte $d_0, d_1, \ldots d_{n-1}$ ausserhalb des Kreises (f) liegen.

Wir werden uns jetzt noch zwei Kreise (C) und (c) vorstellen, welche mit den Kreisen (f) und (g) concentrisch sind und mit den Halbmessern ϱd_h und $r e_h$ beschrieben sind, wo ϱ, r positive Zahlen sind, die folgenden Bedingungen genügen:

$$\varrho > 1 \text{ und } \varrho^n(\varrho^{m-n}-1) \geqq \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{m-n}} \left(\frac{m-n}{n}\right), \tag{16}$$

$$r < 1 \text{ und } r^{-m}(1-r^n) \geqq \frac{n}{m} \left(\frac{m-n}{m}\right)^{\frac{m-n}{n}}. \tag{17}$$

Diesen Bedingungen genügen ein unendlich grosses ϱ und ein unendlich kleines r, aber auch die Grössen ϱ und r, die man aus folgenden Gleichungen bekommt:

$$\varrho^{m-n} - 1 = \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{m-n}} \left(\frac{m-n}{n}\right),$$

$$1 - r^n = \frac{n}{m} \left(\frac{m-n}{n}\right)^{\frac{m-n}{n}}.$$

Die Grundfläche zwischen den concentrischen Kreisen (f) und (C) wird durch die Verlängerungen $f_0 F_0$, $f_1 F_1, \ldots$ der Halbmesser Of_0, $Of_1, \ldots Of_{m-n-1}$ des Kreises (f) in $(m-n)$ gleiche Theile getheilt [vergl. immer Fig. 2]. Wir werden jetzt die Contour, welche denjenigen dieser Theile umgiebt, in welchem sich der Punkt d_h befindet, mit D_h bezeichnen. Auf solche Weise werden wir $(m-n)$ Contouren haben: $D_0, D_1, \ldots D_{m-n-1}$, in deren Inneren sich beziehungsweise die Punkte $d_0, d_1, \ldots d_{m-n-1}$ befinden. Für alle Punkte der Contour D_h wird dabei die Ungleichung gelten:

$$\text{mod.} \frac{q}{z^m - pz^n} \leqq \text{mod.} \left(\frac{1}{P}\right)^{\frac{1}{m-n}} < 1. \tag{18}$$

Die Grundfläche zwischen den concentrischen Kreisen (g) und (c) werde jetzt durch die Linien Og_0, $Og_1, \ldots Og_{n-1}$ in n gleiche Theile zertheilt. Die Contour, welche denjenigen dieser Theile umgiebt, in dessen Inneren sich der Punkt e_h befindet, wollen wir mit E_h bezeichnen. Auf solche Weise werden wir n Contouren haben: $E_0, E_1, \ldots E_{n-1}$, in deren Inneren sich beziehungsweise die Punkte $e_0, e_1, \ldots e_{n-1}$ befinden. Dabei wird für alle Punkte der Contour E_h die Ungleichung gelten:

$$\text{mod.} \frac{z^m}{pz^n + q} \leqq \text{mod.} \left(\frac{1}{P}\right)^{\frac{1}{n}} < 1. \tag{19}$$

Satz II. — *Wenn mod.* $P > 1$, *so werden* $(m-n)$ *Wurzeln der Gleichung* (6) *beziehungsweise im Inneren der Contouren* $D_0, D_1, \ldots D_{m-n-1}$

und die anderen n Wurzeln beziehungsweise im Inneren der Contouren $E_0, E_1, \ldots E_{n-1}$ *liegen. Dabei werden wir haben, indem wir die Wurzel, die der Contour* D_h *entspricht, mit* $\mathfrak{z}_h$ *und die Wurzel, welche der Contour* E_h *entspricht, mit* $\mathfrak{e}_h$ *bezeichnen:*

$$(20)\qquad \mathfrak{z}_h^k = \frac{1}{2\pi i}\int_{D_h} z^k \,\frac{d\lg(z^m - pz^n - q)}{dz}\, dz$$

$$= \frac{k}{m-n}\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\Phi\left(\frac{k-ns}{m-n},\, s-1\right)}{\Gamma(1+s)}\, q^s d_h^{k-ms};$$

$$(21)\qquad \mathfrak{e}_h^k = \frac{1}{2\pi i}\int_{E_h} z^k \,\frac{d\lg(z^m - pz^n - q)}{dz}\, dz$$

$$= \frac{k}{n}\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\Phi\left(\frac{k+ms}{n},\, s-1\right)}{\Gamma(1+s)} \left(\frac{1}{p}\right)^s e_h^{k+(m-n)s}.$$

Der Beweis dieses Satzes ist dem Beweis von Satz I gleich und auf die Ungleichungen (18) und (19) zu gründen.

Zu den Sätzen I und II werden wir jetzt noch einen dritten hinzufügen, der die beiden ersten Sätze vereinigt und mittels des bekannten allgemeinen Theorems über die Absonderung der Wurzeln abgeleitet wird.

Wenn mod. $P > 1$, also Satz II gilt, verlieren die Wurzeln der Gleichung (6) ihren bestimmten Platz hinsichtlich der Contouren A_0, $A_1, \ldots A_{m-1}$ nicht, indem sie ihren bestimmten Platz hinsichtlich der Contouren D_h und E_h einnehmen. Man muss dabei nur von den beiden Kreisen (C) und (c), deren Bogen Bestandtheile der Contouren $A_0, A_1, \ldots A_{m-1}$ sind (Fig. 1), den einen unendlich gross und den anderen unendlich klein werden lassen. Vermöge dieser Auffassung kann man folgenden Satz formuliren:

Satz III. — *Wenn P eine beliebige imaginäre Zahl oder wenn P eine reelle Zahl* < 1 *ist, so liegen die Wurzeln der Gleichung*

$$(22)\qquad z^m - pz^n - q = 0$$

beziehungsweise im Innern der Contouren $A_0, A_1, \ldots A_{m-1}$; *wenn aber P eine reelle Grösse* $\geqq 1$ *ist und m und n relative Primzahlen sind, so werden nur zwei Wurzeln der Gleichung* (22) *auf einer der Linien* $Ob_0, Ob_1, \ldots Ob_{m-1}$ *liegen, worauf diejenigen zwei der Contouren* $A_0, A_1, \ldots A_{m-1}$, *welche neben dieser Linie liegen, in ihrem Inneren keine Wurzeln der Gleichung* (22) *haben: die übrigen* $(m-2)$ *Wurzeln aber werden nach wie vor beziehungsweise in den übrigen Contouren* $A^0, A_1, \ldots A_{m-1}$ *liegen.*

Nach diesem Satze ist die Gleichung:

$$z_h^k = \frac{1}{2\pi i}\int_{A_h} z^k \frac{d\log(z^m - pz^n - q)}{dz}\,dz, \tag{23}$$

wo z_h eine Wurzel von (22) ist, immer gültig, d. h. sowohl für mod. $P < 1$, wie für mod. $P \gtreqq 1$, allein den Fall ausgenommen, dass P eine reelle Grösse $\gtreqq 1$ und z_h eine von denjenigen Wurzeln ist, welche auf einer der Linien $Ob_0, Ob_1, \ldots Ob_{m-1}$ liegen. Für die anderen Wurzeln wird unsere Formel auch im letzten Falle gültig sein. Der Kürze wegen will ich hier von irgend welchen Transformationen des in (23) auftretenden Integrals nicht sprechen.

Die Wichtigkeit der Sätze I, II, III werden wir hernach sehen, wenn wir von der Anwendung derselben auf Integralrechnung handeln.

Anmerkung: Die Gleichung (6) kann in der Form dargestellt werden:

$$z - a_h = p\cdot\frac{z^n(z-a_h)}{z^m - q}, \tag{8'}$$

auf die man die bekannte Formel von Lagrange anwenden kann, welche die Wurzel der Gleichung

$$z - a_h = pf(z)$$

in eine Reihe nach Potenzen von p zu entwickeln gestattet. Ist mod. $P < 1$, so muss augenscheinlich die Lagrange'sche Formel, auf (8') angewandt, die Reihe (7) ergeben. Es ist sehr natürlich, mit der Anwendung der Laugrange'schen Formel das Theorem von Rouché hier zu verbinden, welches im 39ten cahier des Journals der Ecole Polytechnique (Mémoire sur la série de Lagrange, t. XXII, 1862) entwickelt ist und welches uns die Möglichkeit giebt, die Entwickelung der Wurzel z_h vermöge der Formel des Lagrange mit der Absonderung derselben durch einen Kreis, der mit einem bestimmten Radius um a_h als Mittelpunkt beschrieben ist, zu begleiten. Aber es zeigt sich, dass diese Art keine ganz bequeme ist. In meiner „Untersuchung“ habe ich bewiesen, dass das Gebiet der Anwendbarkeit des Theorems von Rouché, sofern man den genannten Kreis zur Absonderung der Wurzel z_h benutzt, oft enger ist, als das Gebiet der Convergenz der Reihe (7). So ist es z. B. dann, wenn n aus den Grenzwerthen

$$\frac{m\left(\cos\frac{\pi}{m} - \sin\frac{\pi}{m}\right)^m}{1+\left(\cos\frac{\pi}{m} - \sin\frac{\pi}{m}\right)^m} \quad \text{und} \quad \frac{m\left(\cos\frac{\pi}{m} + \sin\frac{\pi}{m}\right)^m}{1+\left(\cos\frac{\pi}{m} + \sin\frac{\pi}{m}\right)^m}$$

heraustritt. Aus diesem Grunde sind die zur Absonderung der Wurzeln der Gleichung (6) dienenden Contouren $A_0, A_1, \ldots A_{m-1}$ vortheilhafter, als die Kreiscontouren, die man nach der Methode von Rouché erhält.

II. Die Untersuchung der Convergenz der Reihen und die Eigenschaft ihrer Ergänzungsglieder.

Um die Convergenz der Reihen, in welche sich die Potenzen der Wurzeln der trinomischen Gleichung entwickeln lassen, bequemer zu untersuchen, gruppire ich die Glieder jeder Reihe in folgender Weise.

Alle Glieder der Reihe (7), in welchen $s \equiv l (\text{mod. } m)$, verbinde ich zu *einer* Gruppe. Die Glieder dieser Gruppe werden, nachdem man sie durch

$$\frac{k}{m}\left(\frac{p}{q}\right)^l a_h^{k+nl}$$

getheilt hat, eine Reihe folgender Form bilden:

$$(24)\qquad \varphi_l = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{m^{ms}\Phi\left(\frac{k+nl}{m}+ns,\ l+ms-1\right)}{n^{ns}(n-m)^{(m-n)s}\Gamma(1+l+ms)} P^s,$$

wobei:

$$(25)\qquad \mathfrak{z}_h^k = \frac{k}{m}\cdot\sum_{l=0}^{l=m-1}\left(\frac{p}{q}\right)^l a_h^{k+nl}\varphi_l.$$

Auf ähnliche Weise gruppire ich die Reihen (20) und (21), wobei in der Reihe (20) solche Glieder, in welchen $s \equiv l\,(\text{mod. } m-n)$, und in der Reihe (21) solche Glieder, in welchen $s \equiv l\,(\text{mod. } n)$, sich in eine Gruppe vereinigen. Nach solcher Gruppirung werden wir haben:

$$(26)\qquad z_h^k = \frac{k}{m-n}\sum_{l=0}^{l=m-n-1} q^l d_h^{k-ml}\psi_l,$$

$$(27)\qquad \zeta_h^k = \frac{k}{n}\sum_{l=0}^{l=n-1}\left(\frac{-1}{q}\right)^l e_h^{k+ml}\Theta_l,$$

wo

$$(28)\ \psi_l = \sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{n^{ns}(n-m)^{(m-n)s}\ \Phi\left(\frac{k-nl}{m-n}-ns,\ l+(m-n)s-1\right)}{m^{ms}\Gamma(1+l+(m-n)s)}\left(\frac{1}{P}\right)^s,$$

$$(29)\ \Theta_l = \sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{n^{ns}(m-n)^{(m-n)s}\ \Phi\left(\frac{k+ml}{n}+ms,\ l+ns-1\right)}{m^{ms}\Gamma(1+l+ns)}\left(\frac{1}{P}\right)^s.$$

Die obengenannte Gruppirung wurde unlängst in den Arbeiten des Herrn Heymann angewendet (Mathematische Annalen und Zeitschrift für Mathematik und Physik*)). Die Reihen $\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_{m-1}$ werden

*) Mathem. Annalen Bd. XXVIII, Heft 1, p. 72—74. 1886. — Zeitschrift für Mathem. und Phys. 31. Jahrg., 4. Heft, p. 225—226, 230—232. 1886.

für mod. $P \leqq 1$ convergiren und die Reihen $\psi_0, \psi_1, \ldots \psi_{m-n-1}$, $\Theta_0, \Theta_1, \ldots \Theta_{n-1}$ für mod. $P \geqq 1$. Diese Resultate wurden bereits 1850 von Westphal gefunden*), doch auf andere Weise abgeleitet.

Ich werde jetzt einige weitere Eigenschaften der Reihen φ_l, ψ_l und Θ_l andeuten, welche noch nicht bemerkt gewesen sind.

Den Coefficienten der Potenz P in dem allgemeinen Gliede irgend einer dieser Reihen werde ich mit $v(s, l)$ bezeichnen, den Quotienten aber:

$$\frac{v(s+1, l)}{v(s, l)}$$

mit $L(s, l)$ oder $M(s, l)$ oder $N(s, l)$, je nachdem eine Reihe φ_l oder ψ_l oder Θ_l in Betracht gezogen wird. Indem ich $k = 1$ setzte, habe ich in meiner Untersuchung folgende Theoreme bewiesen:

Das 1te Theorem. Man hat:

$$L(s, l) = \prod_{\sigma=1}^{\sigma=m} \left(\frac{\lambda_\sigma + \frac{l}{m} + s}{\frac{1}{\sigma} + \frac{l}{m} + s} \right), \tag{30}$$

wo Π ein Productzeichen ist und $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ Zahlen vorstellen, von denen nur eine negativ ist, alle anderen aber positiv sind, und die folgende Bedingungen befriedigen:

$$\begin{cases} -\frac{1}{\sigma} < \lambda_\sigma < \frac{1}{\sigma}, \\ (1-\lambda_1) + \left(\frac{1}{2} - \lambda_2\right) + \cdots + \left(\frac{1}{m} - \lambda_m\right) = \frac{3}{2}. \end{cases} \tag{31}$$

Das 2te Theorem. Man hat:

$$M(s, l) = \prod_{\sigma=1}^{\sigma=m} \left(\frac{\mu_\sigma + \frac{l}{m-n} + s}{\nu_\sigma + \frac{l}{m-n} + s} \right), \tag{30'}$$

wo $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_m$, $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_m$ Zahlen sind, welche folgenden Bedingungen genügen:

$$\begin{cases} \nu_\sigma > 0, \ -\nu_\sigma < \mu_\sigma < +\nu_\sigma, \\ (\nu_1 - \mu_1) + (\nu_2 - \mu_2) + \cdots + (\nu_m - \mu_m) = \frac{3}{2}, \end{cases} \tag{31'}$$

wobei nur eine der Zahlen $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_m$ negativ ist:

Das 3te Theorem. Man hat:

$$N(s, l) = \prod_{\sigma=1}^{\sigma=m} \left(\frac{\pi_\sigma + \frac{l}{n} + s}{\varrho_\sigma + \frac{l}{n} + s} \right), \tag{30''}$$

*) Westphal: „Evolutio radicum aequationum algebraicarum e ternis terminis constantium in series infinitas". Gottingae, 1850. Diese Arbeit wurde von der philosophischen Facultät zu Göttingen preisgekrönt.

wo $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_m, \varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_m$ Zahlen sind, die folgenden Bedingungen genügen:

$$\text{(31'')} \qquad \begin{cases} 0 < \pi_\sigma < \varrho_\sigma, \\ (\varrho_1 - \pi_1) + (\varrho_2 - \pi_2) + \cdots + (\varrho_m - \pi_m) = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Aus diesen Theoremen kann man folgende Folgerungen ableiten:

1) Der Quotient

$$\frac{v(s+1,l)}{v(s,l)}$$

ist dem absoluten Werthe nach immer kleiner als die Einheit und nimmt bei der Vergrösserung des s oder l zu.

2) Sind die Bedingungen der Convergenz für irgend eine der Reihen φ_l, ψ_l und Θ_l erfüllt, so nehmen die Glieder dieser Reihe dem absoluten Werthe nach von Anfang an ab.

3) Die Coefficienten der Potenzen von P nehmen sehr schnell am Anfange jeder Reihe ab, während sie langsamer abnehmen weit vom Anfange der Reihe, wo die Glieder der Reihe (die Bedingungen der Convergenz als erfüllt vorausgesetzt) minder wichtig werden.

Diese Folgerungen zeigen, dass die Reihen φ_l, ψ_l und Θ_l sehr bequem zu berechnen sind.

Ist mod. $P < 1$, so müssen die Glieder der Reihe φ_l schneller abnehmen, als die Glieder der geometrischen Progression mit dem Quotienten $r = \text{mod. } P$. Wenn wir also das Ergänzungsglied oder den Rest der Reihe φ_l mit R_s bezeichnen, werden wir haben:

$$\text{(32)} \qquad \text{mod. } R_s < \frac{\text{mod. } u_s}{1 - \frac{1}{r}},$$

unter u_s das erste von den Gliedern der Reihe φ_l verstanden, welche dem Ergänzungsgliede zugerechnet werden.

Für die Ergänzungsglieder der Reihen ψ_l und Θ_l werden wir Ungleichungen folgender Form haben:

$$\text{(33)} \qquad \text{mod. } R_s < \frac{\text{mod. } u_s}{1 - \frac{1}{r}},$$

wo $r = \text{mod. } P > 1$.

Wir wollen jetzt annehmen, dass $r = \text{mod. } P = 1$. In diesem Falle haben wir für das Ergänzungsglied der Reihe φ_l folgende Ungleichung:

$$\text{(34)} \qquad \text{mod. } R_s < 2 \text{ mod. } u_s \left(\lambda + \frac{1}{2} + \frac{l}{m} + s\right),$$

unter λ den grössten unter den Werthen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ verstanden,

welche in dem ersten Theoreme angemerkt waren. Für das Ergänzungsglied der Reihe ψ_l werden wir entsprechend haben:

$$\text{(35)} \qquad \text{mod. } R_s < 2 \text{ mod. } u_s \left(\frac{3}{2} - \frac{m-n-1}{m(m-n)} + \frac{l}{m-n} + s\right),$$

und für das Ergänzungsglied der Reihe Θ_l:

$$\text{(36)} \qquad \text{mod. } R_s < 2 \text{ mod. } u_s \left(\frac{3}{2} - \frac{n-1}{mn} + \frac{l}{n} + s\right).$$

In den Ungleichungen (33), (34), (35) und (36) bedeutet u_s das erste von den Gliedern der bezüglichen Reihe, die zu dem Ergänzungsgliede R_s gehören.

III. Verwendung der Eigenschaften der dreigliedrigen Gleichung zur Reihenentwickelung einiger bestimmter Integrale.

Angenommen, dass mod. $P < 1$, $\lambda > 0$, $\mu > 0$, so wollen wir das Integral betrachten:

$$\text{(37)} \qquad J = \int_0^{z_h} z^{\lambda-1}(q + pz^n - z^m)^{\mu-1} dz,$$

unter z_h diejenige Wurzel der Gleichung

$$\text{(38)} \qquad z^m - pz^n - q = 0$$

verstanden, welche im Inneren der Contour A_h liegt; dabei werden wir die Integration auf die gerade Linie Oz_h beziehen.

Den Radius des Kreises (c) (von welchem ein Bogen Bestandtheil der Contour A_h ist) wollen wir jetzt gleich Null setzen. Wir bemerken ferner, dass für $0 < x < 1$ die Gleichung

$$\text{(39)} \qquad z^m - x(pz^n + q) = 0$$

eine Wurzel ξ_h besitzt, welche innerhalb der Contour A_h liegt und sich in eine convergente Reihe der Form:

$$\xi_h = \frac{1}{m} \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\Phi\left(\frac{1+ns}{m}, s-1\right)}{\Gamma(1+s)} \cdot \left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(a_h x^{\frac{1}{m}}\right)^{1+ns}$$

entwickeln lässt. Wenn nun hier x von 0 bis 1 wächst, so beschreibt der Punkt, welcher die Wurzel ξ_h vorstellt, eine krumme Linie, die im Inneren der Contour A_h liegt und den Nullpunkt O mit dem Punkte z_h verbindet. Da es zwischen dieser Curve und der geraden Linie Oz_h keine Ausnahmepunkte der unter dem Integralzeichen stehenden Function giebt, so kann man die Integration auf diese Curve beziehen, ohne dass sich die Grösse des Integrals ändert. Mit anderen Worten: man kann die Variable z durch die Variable x ersetzen, vorausgesetzt, dass wir $z = \xi_h$ und

$$dz = \frac{d\xi_h}{dx} \cdot dx$$

nehmen. Hierdurch wird:

$$J = \frac{1}{\lambda + m(\mu - 1)} \int_0^1 x^{1-\mu} (1-x)^{\mu-1} \cdot \frac{d\left(\xi_h^{\lambda + m(\mu-1)}\right)}{dx} dx.$$

Indem wir jetzt die Grösse $\xi_h^{\lambda+m(\mu-1)}$ in eine Reihe entwickeln und mittels dieser Reihe integriren, finden wir:

$$(40) \qquad \int_0^{z_h} z^{\lambda-1}(q + pz^n - z^m)^{\mu-1} dz = \frac{q^{\mu-1}\Gamma(\mu)}{m} \sum_{s=0}^{s=\infty} H_s \left(\frac{p}{q}\right)^s a_h^{\lambda+ns},$$

wo:

$$(41) \qquad H_s = \frac{\Phi\left(\frac{\lambda+ns}{m} + \mu,\ s\right) \cdot \Gamma\left(\frac{\lambda+ns}{m}\right)}{\Gamma(1+s) \cdot \Gamma\left(\mu + \frac{\lambda+ns}{m}\right)}.$$

Das Integral J, welches wir betrachtet haben, ist manchmal elliptisch oder hyperelliptisch und überhaupt Abel'sch, worauf wir durch (40) die Perioden der entsprechenden elliptischen oder Abel'schen Integrale dargestellt haben. Man kann hiernach beispielsweise die Perioden der elliptischen Integrale, welche folgende Form haben:

$$(42) \qquad \int \frac{dz}{\sqrt{q + pz^n - z^m}}$$

(wo m gleich 3 oder 4 ist) oder auch der elliptischen Integrale:

$$(43) \qquad \int \frac{dz}{\sqrt{z(q + pz^n - z^m)}}$$

(wo m gleich 2 oder 3 ist) in bequeme Reihen entwickeln, ohne die Transformation dieser Integrale auf die Form

$$(43') \qquad \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

vorzunehmen. Zu den Integralen (42) gehört insbesondere die canonische Form des elliptischen Integrals des Hrn. Weierstrass.

Wir wollen noch folgende Reihenentwickelungen anführen:

1)

$$(44) \qquad \int_{z_h}^{a_h \cdot \infty} z^{\lambda-1}(z^m - pz^n - q)^{\mu-1} dz = \frac{q^{\mu-1}\Gamma(\mu)}{m} \sum_{s=0}^{s=\infty} K_s \left(\frac{p}{q}\right)^s a_h^{\lambda+ns},$$

wo $\mu > 0$, $\lambda < m(1-\mu)$, mod. $P < 1$ und

$$K_s = \frac{\Phi\left(\frac{\lambda+ns}{m}, s\right)\Gamma\left(1+\mu+s-\frac{\lambda+ns}{m}\right)}{\Gamma(1+s)\Gamma\left(1+s-\frac{\lambda+ns}{m}\right)},$$

wobei ∞ ein positives Unendlich ist.

2)

$$(45) \qquad \int_{a_h}^{z_h} z^k (p+qz^{-n}-z^{m-n})^{\nu-\mu-1} \frac{d\{(z^{m-n}-qz^{-n})^\mu\}}{dz} dz$$

$$= \frac{k\mu\Gamma(\nu-\mu)}{mp^{1-\nu}} \sum_{s=0}^{s=\infty} L_s \left(\frac{p}{q}\right)^s a_h^{k+ns},$$

wo $\mu > 0$, $\nu > \mu$, mod. $P < 1$ und

$$L_s = \frac{\Phi\left(\frac{k+ns}{m}, s-1\right)\Gamma(s+\mu)}{\Gamma(1+s)\Gamma(\nu+s)}.$$

3)

$$(46) \qquad \int_0^{\zeta_h} z^{\lambda-1}(q+pz^n-z^m)^{\mu-1} dz = \frac{q^{\mu-1}\Gamma(\mu)}{n} \sum_{s=0}^{s=\infty} M_s \left(\frac{-1}{q}\right)^s e_h^{\lambda+ms},$$

wo ζ_h eine der Contour E_h entsprechende Wurzel der Gleichung (38) ist, wobei $\lambda > 0$, $\mu > 0$, mod. $P > 1$ und

$$M_s = \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+ms}{n}\right)}{\Gamma(1+s)\Gamma\left(\mu+\frac{\lambda+ms}{n}-s\right)}.$$

4)

$$(47) \qquad \int_{\mathfrak{z}_h}^{d_h\cdot\infty} z^{\lambda-1}(z^m-pz^n-q)^{\mu-1} dz = \frac{\Gamma(\mu)}{n-m} \sum_{s=0}^{s=\infty} N_s (-q)^s d_h^{\lambda-m(1+s-\mu)},$$

wo $\mathfrak{z}_h$ eine der Contour D_h entsprechende Wurzel der Gleichung (38) ist und ∞ ein positives Unendlich vorstellt, während $\lambda < m(1-\mu)$, $\mu > 0$, mod. $P > 1$ und

$$N_s = \frac{\Gamma\left[\frac{m(1+s-\mu)-\lambda}{m-n}\right]}{\Gamma(1+s)\Gamma\left[\frac{m+n(s-\mu)-\lambda}{m-n}\right]}.$$

5)

$$\int\limits_{z'_h}^{z_h} (z^m - apz^n - q)^\lambda (q + pz^n - z^m)^\mu z^{k-1} (z^m - q)^{\nu-\lambda-\mu} dz \tag{48}$$

$$= \frac{p^\nu}{m} \sum_{s=1}^{s=\infty} Q_s \left(\frac{p}{q}\right)^s a_h^{k+n(\nu+s)} \varphi(a, s),$$

wo z'_h und z_h die der Contour A_h entsprechenden Wurzeln folgender Gleichungen sind:

$$z^m - apz^n - q = 0,$$
$$z^m - pz^n - q = 0,$$

wobei $\lambda > -1$, $\mu > -1$, $-1 < a < +1$, mod. $P < 1$ und

$$Q_s = \frac{\Phi\left(\frac{k + n\nu + ns}{m}, s - 1\right)}{\Gamma(s)},$$

$$\varphi(a, s) = \int\limits_a^1 (1 - x)^\mu (x - a)^\lambda x^{\nu+s-\lambda-\mu-1} dx.$$

Die Gleichungen (46) und (47) erlauben, die Perioden der elliptischen oder Abel'schen Integrale folgender Form

$$\int \frac{z^{\lambda-1}\, dz}{\sqrt{q + pz^n - z^m}}$$

(wo mod. $P > 1$ genommen sein soll) in bequeme Reihen zu entwickeln. Die Gleichung (48) kann zur Reihenentwickelung der Perioden der Abel'schen Integrale folgender Form dienen:

$$\int \frac{z^{k-1}\, dz}{\sqrt{(z^m - apz^n - q)(q + pz^n - z^m)(z^m - q)}}.$$

Bei der Ableitung der vorgenannten Reihenentwickelungen spielen die Sätze über die Vertheilung der trinomischen Gleichung auf der Fläche selbstverständlich die wichtigste Rolle, insofern sie uns erlauben, uns von der Abwesenheit irgend welcher Ausnahmspunkte zwischen den Wegen der Integration zu überzeugen.

IV. Anwendung der Eigenschaften der trinomischen Gleichung zur Integration einer Differentialgleichung.

Die Differentialgleichungen der Form:

$$(1 - x^m) \frac{d^m y}{dx^m} = c_0 y + c_1 x \frac{dy}{dx} + c_2 x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + \cdots + c_{m-1} x^{m-1} \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} \tag{49}$$

sind sehr eng mit der Theorie der trinomischen Gleichungen verbunden.

So hat Herr Heymann vor kurzem die Bedingungen gefunden, unter denen $y = z_h^k$ der Differentialgleichung (49) genügt, unter z_h eine Wurzel der folgenden trinomischen Gleichung verstanden:

$$(50) \qquad n z^m - m x z^n + m - n = 0.$$

In meiner „Untersuchung" ist eine allgemeinere Aufgabe gelöst worden: ich habe eine unendliche Zahl solcher Fälle gefunden, in denen das allgemeine Integral der Gleichung (49) durch eine endliche Zahl von algebraischen und logarithmischen Functionen der Veränderlichen x und der Wurzeln folgender Gleichung ausgedrückt werden kann:

$$(51) \qquad n z^m - m \alpha_r x z^n + m - n = 0.$$

Dabei bedeutet r eine beliebige ganze Zahl, während α_r die Einheitswurzel vorstellt:

$$(52) \qquad \alpha_r = e^{\frac{2r\pi i}{m}}.$$

Ich will mit $F(z)$ das folgende Polynom bezeichnen:

$$(53) \qquad F(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z(z-1) + \cdots + c_{m-1} z(z-1)\cdots(z-m+2) \\ + z(z-1)\cdots(z-m+1).$$

Hier kann man selbstverständlicherweise setzen:

$$(54) \qquad c_\sigma = \frac{1}{\Gamma(1+\sigma)} \cdot \Delta^\sigma F(0),$$

unter Δ^σ das Zeichen der endlichen Differenz von der Ordnung σ verstanden. Ich will nun ferner mit $b_0, b_1, \ldots b_{m-1}$ die Wurzeln der Gleichung

$$(55) \qquad F(z) = 0$$

bezeichnen. Mittels dieser Wurzeln lassen sich die Coefficienten des Polynoms $F(z)$ und mittels der Gleichung (54) die Coefficienten $c_0, c_1, \ldots c_{m-1}$ der Gleichung (49) ausdrücken. Ich werde daher die Function $F(z)$ die *Charakteristik* der Gleichung (49) und die Wurzeln der Gleichung (55) die *Wurzeln der Charakteristik* nennen. Die Gleichung (49) kann mittels ihrer Charakteristik folgendermassen geschrieben werden:

$$(56) \qquad F(0)\,y + \frac{\Delta F(0)}{1}\, x \frac{dy}{dx} + \frac{\Delta^2 F(0)}{1\cdot 2}\, x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + \cdots \\ + \frac{\Delta^{m-1} F(0)}{1\cdot 2\cdots(m-1)}\, x^{m-1} \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \frac{\Delta^m F(0)}{1\cdot 2\cdots m}\,(x^m - 1)\frac{d^m y}{dx^m} = 0.$$

Indem ich es unternahm, diese Gleichung mittels Reihen zu integriren, habe ich erstens eine Gruppe particulärer Auflösungen folgender Form gefunden:

$$(57)\qquad y_l = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\prod\limits_{\sigma=0}^{\sigma=s-1} F(l+m\sigma)}{\Gamma(1+l+ms)} \cdot x^{l+ms}, \quad \prod_{\sigma=0}^{\sigma=-1} F(l+m\sigma) = 1,$$

unter Π ein Productzeichen, unter l eine beliebige der Zahlen 0, 1, 2, ... $m-1$ verstanden, und zweitens eine Gruppe von particulären Auflösungen der folgenden Form:

$$(58)\qquad y_l = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\Phi(1+b_l,\, ms)}{\prod\limits_{\sigma=0}^{\sigma=s-1} F(b_l - m - m\sigma)},$$

wo b_l eine beliebige Wurzel der Charakteristik der Gleichung (49) ist.

Die Reihen der ersten Gruppe werden unter der Bedingung mod. $x < 1$ convergiren und sind genügend, um das allgemeine Integral der Gleichung (49) zu finden. Die Reihen der zweiten Gruppe werden unter der Bedingung mod. $x > 1$ convergiren und sind ebenfalls genügend, um das allgemeine Integral der Gleichung (49) zu finden, abgesehen allerdings von den Fällen, in denen es eine ganze positive Zahl h giebt, welche einer Bedingung der Form:

$$(59)\qquad F(b_l - mh) = 0$$

genügt. Aber dieser Mangel wird leicht durch die Methode der Grenzwerthe corrigirt, indem nämlich b_l als Veränderliche angesehen wird, die der Gleichung (59) nur im Grenzfalle genügt, während gleichzeitig statt der Reihe y_l das Product $y_l \cdot F(b_l - mh)$ an der Grenze betrachtet wird.

Aus der Betrachtung der Gleichung (56) und ihrer particulären Integrale (57) und (58) entspringen jetzt folgende Eigenschaften der Gleichung (49):

A) *Wenn* $\varphi(x)$ *das Integral der Gleichung* (49) *ist, welche eine bestimmte Charakteristik* $F(z)$ *hat, so ist der Ausdruck*

$$\frac{d^\lambda \varphi(x)}{dx^\lambda}$$

ebenso ein Integral einer solchen Gleichung (49), *deren Charakteristik* $F_1(z) = F(\lambda + z)$ *ist.*

B) *Wenn* $\varphi(x)$ *das Integral der Gleichung* (49) *ist, die eine bestimmte Charakteristik* $F(z)$ *hat, so ist der Ausdruck:*

$$x^{b_l+m}\, \frac{d^\mu \left(t^{\mu-1-\frac{b_l}{m}} \varphi\left(t^{\frac{1}{m}}\right)\right)}{dt^\mu}$$

(*wo* $t = x^m$), *ebenso ein Integral einer solchen Gleichung* (49), *deren*

Charakteristik, unter b_l eine Wurzel der Charakteristik $F(z)$ verstanden, die folgende ist:

$$F_1(z) = \frac{z - b_l + m\mu}{z - b_l} \cdot F(z).$$

Nachdem diese Eigenschaften der Gleichung (49) gefunden sind, gehe ich zu der Untersuchung der Bedingungen über, unter denen die Integration dieser Gleichung mittels der Wurzeln der Gleichung (51) erfolgen kann.

Mittels der Formeln (24), (25) und (57) überzeugt man sich leicht, dass $y = z_h^k$, unter z_h eine beliebige Wurzel der Gleichung (51) verstanden, eine particuläre Auflösung der Gleichung (49) wird, sobald man die Charakteristik $F(z)$ der Gleichung (49) nach der Formel bestimmt:

$$(60) \quad F(z) = M\Phi\left(\frac{k+nz}{m} + n,\ n\right) \cdot \Phi\left(\frac{k+(n-m)z}{m} + 1,\ m-n\right),$$

wo:

$$M = \frac{m^m}{n^n (n-m)^{m-n}}.$$

Dieses Resultat wird von Herrn Heymann bestätigt. Verbindet man dasselbe mit der unter A) angegebenen Eigenschaft der Gleichung (49), so folgt, dass der Ausdruck

$$y = \frac{d^\lambda z^k}{dx^\lambda}$$

eine particuläre Auflösung einer solchen Gleichung (49) ist, deren Charakteristik lautet:

$$(61) \quad F_1(z) = M \cdot \Phi\left(\frac{k+n(z+\lambda)}{m} + n, n\right) \cdot \Phi\left(\frac{k+(n-m)(z+\lambda)}{m} + 1, m-n\right).$$

Die Folgerung gilt nur für positive ganze Zahlen λ. Aber das Integral der Gleichung (49) kann mittels der Wurzeln der Gleichung (51) in endlicher Form auch in dem Falle ausgedrückt werden, dass λ eine ganze negative Zahl $-\varrho$ ist. Setzen wir nämlich, unter ϱ eine ganze positive Zahl verstanden, in die Formel (45)

$$\mu = 1,\ \nu = \varrho + 1,\ p = \frac{m}{n}\alpha_r x,\ q = -\frac{m-n}{n},\ a_h = \left(\frac{m-n}{n}\right)^{\frac{1}{m}} e^{\frac{(2h+1)i\pi}{m}},$$

so kommt:

$$(62) \quad \int_{a_h}^{z_h} z^{k-1}\left(m\alpha_r x + \frac{n-m}{z^n} - z^{m-n}\right)^{\varrho-1}(z^m - 1)\frac{dz}{z^n}$$

$$= B\sum_{s=\varrho}^{s=\infty} \frac{\Phi\left(\frac{k+n(s-\varrho)}{m},\ s-\varrho-1\right)}{\Gamma(1+s)} \left(\frac{m\alpha_r}{n-m}\right)^s x^s a_h^{k+n(s-\varrho)},$$

wo B eine Constante bedeutet und z_h die der Contour A_h entsprechende Wurzel der Gleichung (51) ist. Nun lässt sich das Integral der linken Seite von (62) durch eine Function ausdrücken, welche algebraische und logarithmische Operationen in endlicher Zahl enthält. Nennen wir diese Function U und bezeichnen mit V ein Polynom der folgenden Form:

$$(63)\qquad V = B \sum_{s=0}^{s=\varrho-1} \frac{\Phi\left(\frac{k+n(s-\varrho)}{m}, s-\varrho-1\right)}{\Gamma(1+s)} \left(\frac{m\alpha_r}{n-m}\right)^s x^s a_h^{k+n(s-\varrho)},$$

so haben wir:

$$(64)\qquad U + V = B \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\Phi\left(\frac{k+n(s-\varrho)}{m}, s-\varrho-1\right)}{\Gamma(1+s)} \left(\frac{m\alpha_r}{n-m}\right)^s x^s a_h^{k+n(s-\varrho)}.$$

Jetzt ist aus dieser Reihenentwickelung leicht einzusehen, dass die Function $(U+V)$ ein Integral einer solchen Gleichung (49) ist, deren Charakteristik aus der Formel (61) für $\lambda = -\varrho$ gefunden wird. Der Charakteristik $F_1(z)$ also, welche aus (61) gefunden wird, entspricht bei beliebigem ganzzahligem Werthe von λ eine solche Gleichung (49), die in endlicher Form mittels der Wurzeln der Gleichung (51) integrirt wird.

Indem wir jetzt diese Ableitung mit der oben unter B) angeführten Eigenschaft der Gleichung (49) combiniren, so kommen wir zu folgendem allgemeinen Satze:

Theorem. — *Es seien* $\lambda, \mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{m-1}$ *beliebige ganze Zahlen (die auch Null sein können) und es sei die Charakteristik* $F(z)$ *der Gleichung* (49) *durch die Formel definirt:*

$$(65)\quad F(z) = \prod_{\sigma=0}^{\sigma=m-n-1}\left(z+\lambda+m\mu_\sigma - \frac{k-m\sigma}{m-n}\right)\cdot \prod_{\sigma=m-n}^{\sigma=m-1}\left(z+\lambda+m\mu_\sigma - \frac{m(\sigma+1-m)-k}{n}\right),$$

so lässt sich das allgemeine Integral der Gleichung (49) *in endlicher Form mittels algebraischer Functionen der Veränderlichen* x, *der Wurzeln der Gleichung* (51) *und der Logarithmen dieser Wurzeln ausdrücken.*

Anmerkung. Wenn die Bedingungen dieses Theorems erfüllt sind und es sind m und n relative Primzahlen, so reichen die Wurzeln der Gleichung (50) allein aus, um das allgemeine Integral der Gleichung (49) zu bekommen; sind aber m und n keine relativen Primzahlen, so reichen die Wurzeln der Gleichung (50) zu dem genannten Zwecke nicht aus, so dass es in diesem Falle nöthig wird, die Gleichung (51) heranzuziehen und der Zahl r die Werthe $0, 1, \ldots m-1$ zu geben.

Moskau, $\frac{\text{3. Januar 1887}}{\text{22. December 1886}}$.

Gleichung der Curve, welche die Berührungspunkte der doppelten Tangenten der allgemeinen Curve des fünften Grades ausschneidet.

Von

GIOVANNI MAISANO in Messina.

Es ist bekannt, dass die Berührungspunkte der doppelten Tangenten einer allgemeinen Curve des n^{ten} Grades, deren vollkommene Intersection mit einer anderen Curve des $(n-2)(n^2-9)^{\text{ten}}$ Grades bilden. Nach der Methode, welche Clebsch für die Gleichung dieser letzteren gegeben hat, wurde dieselbe bisher nur für den einfachsten Fall $n=4$ ausgerechnet; wir nehmen uns nun vor, dieselbe, durch die symbolische Rechnung, für den Fall $n=5$ zu finden*).

Die Gleichung der Tangente an einem Punkte der allgemeinen Curve des fünften Grades, durch $f = a_x^5 = b_x^5 = \cdots = 0$ repräsentirt, ist:

$$(1) \qquad a_x^4 a_z = b_x^4 b_z = \cdots = 0;$$

es können also die Coordinaten irgend eines Punktes z dieser Geraden folgenderweise ausgedrückt werden:

$$z_i \equiv x_i + \lambda (bu)_i b_x^4, \qquad (i=1,2,3)$$

indem man

$$(bu)_1 = b_2 u_3 - b_3 u_2, \quad (bu)_2 = b_3 u_1 - b_1 u_3, \quad (bu)_3 = b_1 u_2 - b_2 u_1$$

setzt und mit den u_i die Coordinaten irgend einer Geraden der Ebene bezeichnet.

Die Durchschnittspunkte der Geraden (1) mit der Curve $f=0$ entsprechen den Werthen von λ, welche von der nachstehenden Gleichung geliefert werden:

---

*) Hierbei darf nicht unerwähnt bleiben, dass O. Dersch im 7^{ten} Bande der Annalen die Gleichung der betreffenden Curven $(n-2)(n^2-9)^{\text{ter}}$ Ordnung auf Grund der Methode von Salmon und Cayley mit einer gewissen Eleganz behandelt hat; er führt die Frage darauf zurück, dass man die Gleichung einer in symbolischer Form gegebenen Curve $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades in Linien-Coordinaten darstellt.

$$\begin{aligned}\{a_x + \lambda(abu)b_x^4\}^5 = a_x^5 &+ 5\lambda(abu)a_x^4 b_x^4 + 10\lambda^2(abu)(acu)a_x^3 b_x^4 c_x^4\\ &+ 10\lambda^3(abu)(acu)(adu)a_x^2 b_x^4 c_x^4 d_x^4\\ &+ 5\lambda^4(abu)(acu)(adu)(aeu)a_x b_x^4 c_x^4 d_x^4 e_x^4\\ &+ \lambda^5(abu)(acu)(adu)(aeu)(afu)b_x^4 c_x^4 d_x^4 e_x^4 f_x^4 = 0.\end{aligned}$$

Da man $a_x^5 = 0$ und $(abu)a_x^4 b_x^4 = 0$ hat, so sind von diesen Werthen zwei Null, und entsprechen den beiden vereinigten Schnittpunkten im Durchschnittspunkte x; von den weiteren Schnittpunkten treffen zwei zusammen, und es wird also die Tangente (1) doppelt, wenn die Discriminante nachstehender cubischer Gleichung in λ Null wird:

$$\begin{aligned}\varphi = 10(abu)(acu)a_x^3 b_x^4 c_x^4 &+ 10\lambda(abu)(acu)(adu)a_x^2 b_x^4 c_x^4 d_x^4\\ &+ 5\lambda^2(abu)(acu)(adu)(aeu)a_x b_x^4 c_x^4 d_x^4 e_x^4\\ &+ \lambda^3(abu)(acu)(adu)(aeu)(afu)b_x^4 c_x^4 d_x^4 e_x^4 f_x^4 = 0.\end{aligned}$$

Diese Discriminante muss in das Product $u_x^{14} \cdot F$[*]) zerlegt werden, wo F eine Covariante des 48$^{\text{ten}}$ Grades der Grundform f repräsentirt, und dieses F gleich Null gesetzt giebt die Gleichung der gesuchten Curve.

Wenn man setzt:

$$(2)\qquad \begin{cases} A_0 = 10(abu)(acu)a_x^3 b_x^4 c_x^4,\\ A_1 = \frac{10}{3}(abu)(acu)(adu)a_x^2 b_x^4 c_x^4 d_x^4,\\ A_2 = \frac{5}{3}(abu)(acu)(adu)(aeu)a_x b_x^4 c_x^4 d_x^4 e_x^4,\\ A_3 = (abu)(acu)(adu)(aeu)(afu)b_x^4 c_x^4 d_x^4 e_x^4 f_x^4,\end{cases}$$

und also:

$$(3)\qquad \varphi = A_0 + 3\lambda A_1 + 3\lambda^2 A_2 + \lambda^2 A_3 = 0,$$

wird man haben:

$$(4)\quad \Delta_\varphi = 2[4(A_0A_2 - A_1^2)(A_1A_3 - A_2^2) - (A_0A_3 - A_1A_2)^2] = u_x^{14}\cdot F.$$

Unsere Rechnung besteht darin: *die* $A_0\ A_1\ A_2\ A_3$ *vermittelst Formen der ersten sechs Grade des Systems der Grundform* f *auszudrücken, und folgeweise die Identität* (4) *unter der Voraussetzung* $a_x^5 = 0$ *zu demonstriren.*

§ 1.

Berechnung von A_0, A_1, A_2, A_3.

Nebst der Voraussetzung

$$(\text{I})\qquad a_x^5 = 0$$

werden wir, in der Folge, die Identitäten anwenden, welche auf die drei folgenden hinauslaufen:

---

*) Vgl. Vorlesungen über Geometrie von A. Clebsch, herausgegeben von F. Lindemann, S. 280.

II $\qquad (abc)d_x - (abd)c_x + (acd)b_x - (bcd)a_x = 0,$

III $\qquad (abc)(def) - (abd)(cef) + (acd)(bef) - (bcd)(aef) = 0,$

IV $\qquad (abc)(abd)c_x d_x$

$$= \frac{1}{2}\left\{(abc)^2 d_x^2 + (abd)^2 c_x^2 - (acd)^2 b_x^2 - (bcd)^2 a_x^2 + 2(acd)(bcd)a_x b_x\right\}.$$

Berechnung von A_0. —

Die IV Identität anwendend hat man:

$$A_0 = 5a_x^3 b_x^3 c_x^3 \left\{(abu)^2 c_x^2 + (acu)^2 b_x^2 - (bcu)^2 a_x^2 - (abc)^2 u_x^2 + 2(abc)(bcu)a_x u_x\right\}.$$

Von den Gliedern auf der rechten Seite verschwinden die ersten zwei kraft der Voraussetzung I, während das fünfte, kraft der Identität:

$$\text{V} \quad (abc)(abu)a_x^3 b_x^3 c_x^3 c_y = \frac{1}{3}(abc)a_x^3 b_x^3 c_x^3 \left\{(abu)c_y - (acu)b_y + (bcu)a_y\right\}$$
$$= \frac{1}{3}(abc)^2 a_x^3 b_x^3 c_x^3 \cdot u_y = \frac{1}{3}\Delta \cdot u_y,$$

auf $-\frac{2}{3}$ des vierten hinausläuft; so hat man denn:

$$(1) \qquad A_0 = -\frac{5}{3}\Delta \cdot u_x^2.$$

Berechnung von A_1. —

Wieder die Identität IV anwendend, hat man

$$A_1 = \frac{5}{3}(adu)a_x^2 b_x^3 c_x^3 d_x^4 \left\{(abu)^2 c_x^2 + (acu)^2 b_x^2 - (bcu)^2 a_x^2 - (abc)^2 u_x^2 + 2(abc)(bcu)a_x u_x\right\}.$$

Die ersten zwei Glieder sind Null, kraft der Voraussetzung I, so auch das dritte, da sein Zeichen sich ändert, wenn man a mit d vertauscht; das fünfte ist, durch die Anwendung der Identität V, gleich der Grösse

$$\frac{10}{9}(abc)^2 a_x^3 b_x^3 c_x^3 \cdot (duu)d_x^4 \cdot u_x = 0;$$

so hat man denn:

$$(2) \qquad A_1 = -\frac{5}{3}(abc)^2 a_x^2 b_x^3 c_x^3 (adu)d_x^4 \cdot u_x^2 = \frac{5}{3}(a\Delta u)a_x^4 \Delta_x^8 \cdot u_x^2$$
$$= \frac{5}{3}(f\Delta u) \cdot u_x^2.$$

Berechnung von A_2. —

Zweimal die Identität IV anwendend, hat man, kraft der Voraussetzung I, und die ähnlichen Glieder vereinigend:

$$\begin{aligned}A_2 = \frac{5}{12}\, a_x b_x^3 c_x^3 d_x^3 e_x^3 \{&(abu)^2 c_x^2 + (acu)^2 b_x^2 - (bcu)^2 a_x^2 - (abc)^2 u_x^2 \\ &+ 2(abc)(bcu)a_x u_x\} \\ \cdot \{&(adu)^2 e_x^2 + (aeu)^2 d_x^2 - (deu)^2 a_x^2 - (ade)^2 u_x^2 \\ &+ 2(ade)(deu)a_x u_x\} \\ = \frac{5}{12}\, a_x b_x^3 c_x^3 d_x^3 e_x^3 \{&2(abc)^2(deu)^2 a_x^2 \cdot u_x^2 - 4(abc)(bcu)(deu)^2 a_x^3 \cdot u_x \\ &+ (abc)^2(ade)^2 \cdot u_x^4 - 4(abc)^2(ade)(deu)a_x \cdot u_x^3 \\ &+ 4(abc)(ade)(bcu)(deu)a_x^2 \cdot u_x^2\}.\end{aligned}$$

Indem man auf das zweite und fünfte Glied der rechten Seite die Identität V anwendet und setzt:

$$(deu)^2 d_x^3 e_x^3 = u_\vartheta^2 \Theta_x^6 = \Theta,$$
$$(abc)^2(ade)(deu)a_x^2 b_x^3 c_x^3 d_x^3 e_x^3 = \Delta_\vartheta u_\vartheta \Delta_x^8 \Theta_x^6 = \Delta_\vartheta,$$
$$(abc)^2(ade)^2 a_x b_x^3 c_x^3 d_x^3 e_x^3 = a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2 a_x \Theta_x^6 \Theta_x'^6 = f_{\Theta\Theta}^4,$$

hat man:

$$A_2 = \frac{5}{6}\Delta \cdot \Theta \cdot u_x^2 + \frac{5}{12} f_{\Theta\Theta}^4 \cdot u_x^4 - \frac{5}{3}\Delta_\vartheta \cdot u_x^3. \tag{3}$$

Berechnung von A_3. —

Zweimal die Identität IV anwendend hat man, kraft der Voraussetzung I, und die ähnlichen Glieder vereinigend:

$$\begin{aligned}A_3 = \frac{1}{4}(afu) b_x^3 c_x^3 d_x^3 e_x^3 f_x^4 \{&(abu)^2 c_x^2 + (acu)^2 b_x^2 - (bcu)^2 a_x^2 - (abc)^2 a_x^2 \\ &+ 2(abc)(bcu)a_x u_x\} \\ \{&(adu)^2 e_x^2 + (aeu)^2 d_x^2 - (deu)^2 a_x^2 - (ade)^2 u_x^2 \\ &+ 2(ade)(deu)a_x u_x\} \\ = \frac{1}{4}(afu) b_x^3 c_x^3 d_x^3 e_x^3 f_x^4 \{&2(abc)^2(deu)^2 a_x^2 \cdot u_x^2 - 4(abc)(bcu)(deu)^2 a_x^3 \cdot u_x \\ &+ (abc)^2(ade)^2 \cdot u_x^4 - 4(abc)^2(ade)(deu)a_x \cdot u_x^3 \\ &+ 4(abc)(ade)(bcu)(deu)a_x^2 u_x^2\}.\end{aligned}$$

Durch die Anwendung der Identität V wird das zweite Glied

$$-\Delta \cdot (fuu) f_x^4 \cdot \Theta \cdot u_x = 0,$$

es bleibt also übrig:

$$\begin{aligned}A_3 = &-\frac{1}{2}\Theta \cdot (f\Delta u) \cdot u_x^2 + \frac{1}{4} a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2 (abu) b_x^4 \Theta_x^6 \Theta_x'^6 \cdot u_x^4 \\ &- a_\vartheta^2 a_{\vartheta'} u_{\vartheta'} (abu) a_x \Theta_x^6 \Theta_x'^6 b_x^4 \cdot u_x^3 + a_\vartheta a_{\vartheta'} u_\vartheta u_{\vartheta'} (abu) a_x^2 \Theta_x^6 \Theta_x'^6 b_x^4 \cdot u_x^2,\end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}A_3 = &-\frac{1}{2}\Theta \cdot (f\Delta u) \cdot u_x^2 + \frac{1}{4}(afu) a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2 \cdot u_x^4 - a_\vartheta^2 a_{\vartheta'} u_{\vartheta'} a_x (afu) \cdot u_x^3 \\ &+ a_\vartheta a_{\vartheta'} u_\vartheta u_{\vartheta'} a_x^2 (afu) \cdot u_x^2.\end{aligned}$$

Die Identität II anwendend hat man:

$$a_\vartheta^2 a_{\vartheta'} u_{\vartheta'} a_x (afu) = a_\vartheta^2 (ade)(deu)\, a_x b_x^4 d_x^3 e_x^2 \left\{(abe)u_x + (aeu)b_x - (beu)a_x\right\}.$$

Das zweite Glied ist Null, kraft der Voraussetzung I, und das erste wird, die Identität IV anwendend, gleich der Grösse:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\, a_\vartheta^2 (deu) a_x b_x^3 d_x^2 e_x^2 \big\{(aed)^2 b_x^2 + (aeb)^2 d_x^2 - (bda)^2 e_x^2 - (bde)^2 a_x^2 \\ + 2(abd)(bde)\, a_x e_x\big\}\end{aligned}$$

$$= a_\vartheta^2 (abe)^2 (deu) a_x b_x^3 e_x^2 d_x^4 + a^{\overset{2}{\vartheta}} (deu)(abd)(bde)\, a_x^2 b_x^3 d_x^2 e_x^3 = M + N.$$

Kraft der Identität II hat man:

$$\begin{aligned} M &= a_\vartheta^2 (abe)^2 b_x^3 d_x^4 e_x^2 \left\{(ade)u_x - (adu)e_x + (aeu)d_x\right\} \\ &= a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2 (ad\Theta') d_x^4 \Theta_x'^5 \cdot u_x - a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2 (afu) \\ &= a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2 (af\Theta') \cdot u_x - a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2 (afu);\end{aligned}$$

b mit e verwechselnd und die Identität III anwendend, hat man weiter:

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{2}\, a_\vartheta^2 (bde)\, a_x^2 b_x^3 d_x^2 e_x^3 \left\{(deu)(abd) - (dbu)(aed)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\, a_\vartheta^2 (bde)^2 (dau)\, a_x^2 b_x^3 e_x^3 d_x^2 \\ &= \frac{1}{2}\, a_\vartheta^2 d_{\vartheta'}^2 (dau)\, a_x^2 d_x^2 = 0;\end{aligned}$$

das erste Glied ist also gleich der Grösse:

$$a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2 (af\Theta') \cdot u_x - a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2 (afu).$$

Das dritte Glied ist gleich der Grösse

$$a_x^2 a_\vartheta^2 (ade)(deu)(beu)\, b_x^4 d_x^3 e_x^2 = -\Delta_\vartheta u_\vartheta (b\Theta u)\, b_x^4 \Theta_x^5 \Delta_x^8 = -(f\Theta u)\Delta_\vartheta u_\vartheta,$$

da man

$$\Delta_x^9 = a_\vartheta^2 a_x^3 \Theta_x^6$$

hat; so hat man denn

$$\text{(4)} \qquad \begin{aligned} a_\vartheta^2 a_{\vartheta'} u_{\vartheta'} a_x^2 (afu) = -(f\Theta u)\Delta_\vartheta u_\vartheta - (afu) a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2 \cdot u_x \\ + (af\Theta') a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2 \cdot u_x^2.\end{aligned}$$

Die Identität II anwendend, hat man:

$$\begin{aligned} & a_\vartheta a_{\vartheta'} u_\vartheta u_{\vartheta'} a_x^2 (afu) \\ = {} & a_\vartheta u_\vartheta (acd)(cdu)\, a_x^2 b_x^4 c_x^3 d_x^2 \left\{(abd)u_x + (adu)b_x - (bdu)a_x\right\}.\end{aligned}$$

Das zweite Glied ist Null, kraft der Voraussetzung I, das erste ist (den Factor u_x ausser Betrachtung lassend), kraft der Voraussetzung IV, gleich der Grösse:

$$\frac{1}{2}\, a_\vartheta u_\vartheta (cdu)\, a_x^2 b_x^3 c_x^2 d_x^2 \left\{(acd)^2 b_x^2 + (abd)^2 c_x^2 - (bcd)^2 a_x^2 - (abc)^2 d_x^2 \right.$$
$$\left. + 2(abc)(bcd)\, a_x d_x \right\}$$
$$= a_\vartheta u_\vartheta (abd)^2 (cdu)\, a_x^2 b_x^3 c_x^4 d_x^2 + \frac{1}{3}\Delta \cdot (bcu)(cdu)(bcd)\, b_x^3 c_x^2 d_x^3$$
$$= a_\vartheta u_\vartheta (abd)^2 (cdu)\, a_x^2 b_x^3 c_x^4 d_x^2,$$

wobei wir die Voraussetzung I und die Identität V benutzt haben. Unter Anwendung der Identität II hat man:

$$a_\vartheta u_\vartheta (abd)^2 (cdu)\, a_x^2 b_x^3 c_x^4 d_x^2$$
$$= (abd)^2 (aef)(efu)\, a_x^2 b_x^3 c_x^4 d_x^2 e_x^3 f_x^2 \left\{(cdf) u_x + (cfu) d_x - (dfu) c_x \right\}$$
$$= (abd)^2 (aef)(cdf)(efu)\, a_x^2 b_x^3 c_x^4 d_x^2 e_x^3 f_x^2 \cdot u_x$$
$$+ (abd)^2 (aef)(efu)(cfu)\, a_x^2 b_x^3 c_x^4 d_x^3 e_x^3 f_x^2.$$

Die Zwischenform

$$(abd)^2 (aef)(cdf)(efu)\, a_x^2 b_x^3 c_x^4 d_x^2 e_x^3 f_x^2,$$

welche aus der Zwischenform

$$(abd)^2 (aef)(cdf)(efu)\, b_x c_x^2 e_x$$

der cubischen ternären Form hergeleitet werden kann, ist identisch gleich Null, wie leicht aus dem vollständigen System von Herrn Gordan zu ersehen ist*); das erste Glied ist also gleich der Grösse:

$$(abd)^2 (aef)(efu)(cfu)\, a_x^2 b_x^3 d_x^3 c_x^4 e_x^3 f_x^2 = \Delta_\vartheta u_\vartheta (c\Theta u)\, c_x^4 \Theta_x^5 = (f\Theta u)\Delta_\vartheta u_\vartheta.$$

Wegen der Identität V, die auch wie folgt geschrieben werden kann

$$a_\vartheta u_\vartheta a_x^3 a_y = \frac{1}{3}\, a_\vartheta^2 a_x^3 \cdot u_y = \frac{1}{3}\Delta \cdot u_y,$$

ist das dritte Glied gleich der Grösse:

$$-\frac{1}{3}\Delta \cdot (cdu)^2 (bdu)\, b_x^4 c_x^3 d_x^2 = -\frac{1}{3}\Delta \cdot (f\Theta u);$$

so hat man denn:

$$(5) \qquad a_\vartheta u_\vartheta a_{\vartheta'} u_{\vartheta'} a_x^2 (afu) = (f\Theta u)\Delta_\vartheta u_\vartheta \cdot u_x - \frac{1}{3}\Delta \cdot (f\Theta u).$$

Die Formeln (4) und (5) gebrauchend bekommt man jetzt:

$$(6)\ A_3 = -\frac{1}{2}\Theta \cdot (f\Delta u) \cdot u_x^2 - \frac{1}{3}\Delta \cdot (f\Theta u) \cdot u_x^2 + 2(f\Theta u)\Delta_\vartheta u_\vartheta \cdot u_x^3$$
$$+ \frac{5}{4}(afu)\, a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2 \cdot u_x^4 - (af\Theta')\, a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2 \cdot u_x^5.$$

Die Formeln (1), (2), (3), (6) *geben die Ausdrücke von* $A_0\ A_1\ A_2\ A_3$ *durch irreducibele Formen des Systems von* f.

*) Vergl. Gordan: Ueber ternäre Formen dritten Grades, Math. Annalen, Bd. I, pag. 90.

§ 2.

Verschiedene Beziehungen.

Bevor wir zur Berechnung von Δ_φ übergehen, erscheint es zweckmässig, einige Beziehungen zwischen den Formen, welche wir in dem vorigen Paragraphen gefunden haben, festzusetzen.

1) Die Identität II anwendend, hat man:

$$\begin{aligned}\Delta\cdot(f\Theta u)-\Theta\cdot(f\Delta u)&=\Delta_x{}^8a_x{}^4\Theta_x{}^5u_\vartheta^2\{(a\Theta\Delta)u_x+(\Delta\Theta u)a_x\}\\&=(a\Theta\Delta)a_x{}^4\Theta_x{}^5\Delta_x{}^8u_\vartheta^2\cdot u_x.\end{aligned}$$

Kraft derselben Identität hat man weiter:

$$\begin{aligned}&(a\Theta\Delta)a_x{}^4\Theta_x{}^5\Delta_x{}^8u_\vartheta^2-(a\Theta u)a_x{}^4\Theta_x{}^5\Delta_\vartheta u_\vartheta\Delta_x{}^8\\&=a_x{}^4\Theta_x{}^5\Delta_x{}^8u_\vartheta\{(\Theta\Delta u)a_\vartheta-(a\Delta u)\Theta_\vartheta\}.\end{aligned}$$

Das zweite Glied ist hier Null, denn es enthält den Factor Θ_ϑ; der erste ist, wegen der nämlichen Identität, gleich der Grösse:

$$(abc)(bcu)a_x{}^3b_x{}^3c_x{}^2\Delta_x{}^8\{(ac\Delta)u_x-(acu)\Delta_x+(a\Delta u)c_x\}.$$

Man hat ferner, wegen der Identität V:

$$(abc)(acu)(bcu)a_x{}^3b_x{}^3c_x{}^2\cdot\Delta=0,$$

$$(abc)a_x{}^3b_x{}^3c_x{}^3(bcu)(a\Delta u)\Delta_x{}^8=\frac{1}{3}\Delta'\cdot(\Delta uu)\Delta_x{}^8=0,$$

so wird denn das erste Glied, a mit b vertauschend, und die Identität III anwendend, gleich der Grösse:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(abc)a_x{}^3b_x{}^3c_x{}^2\Delta_x{}^8\cdot u_x\{(bcu)(ac\Delta)-(acu)(bc\Delta)\}\\&=\frac{1}{2}(abc)^2a_x{}^3b_x{}^3c_x{}^2(c\Delta u)\Delta_x{}^8\cdot u_x=\frac{1}{2}(\Delta'\Delta u)\Delta_x'{}^8\Delta_x{}^8\cdot u_x=0.\end{aligned}$$

Man hat also

$$(a\Theta\Delta)a_x{}^4\Theta_x{}^5\Delta_x{}^8u_\vartheta^2=(a\Theta u)a_x{}^4\Theta_x{}^5\Delta_\vartheta u_\vartheta\Delta_x{}^8,$$

und somit schliesslich:

(7) $$\Delta\cdot(f\Theta u)-\Theta\cdot(f\Delta u)=(f\Theta u)\Delta_\vartheta u_\vartheta\cdot u_x.$$

2) Die Identität II anwendend, hat man:

$$\begin{aligned}(f\Delta u)\cdot\Delta_\vartheta'-(f\Theta u)\Delta_\vartheta'u_\vartheta\cdot\Delta&=a_x{}^4\Delta_x{}^8\Delta_x'{}^8\Theta_x{}^5u_\vartheta\Delta_\vartheta'\{(a\Delta\Theta)u_x-(\Delta\Theta u)a_x\}\\&=a_x{}^4\Delta_x{}^8\Theta_x{}^5u_\vartheta\Delta_\vartheta'\Delta_x'{}^7.u_x\\&\quad.\{(a\Delta\Delta')\Theta_x+(a\Delta'\Theta)\Delta_x-(\Delta\Delta'\Theta)a_x\}=M\cdot u_x+N\cdot\Delta\cdot u_x,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M&=\frac{1}{2}(a\Delta\Delta')a_x{}^4\Delta_x{}^7\Delta_x'{}^7\cdot(bcu)b_x{}^3c_x{}^3\{(b\Delta\Delta')c_x-(c\Delta\Delta')b_x\}\\&=(a\Delta\Delta')(b\Delta\Delta')(bcu)a_x{}^4b_x{}^3c_x{}^4\Delta_x{}^7\Delta_x'{}^7\\&=\frac{1}{2}(bcu)\Delta_x{}^7\Delta_x'{}^7a_x{}^3b_x{}^2c_x{}^4\{(a\Delta\Delta')^2b_x{}^2+(b\Delta\Delta')^2a_x{}^2-(ab\Delta)^2\Delta_x'{}^2\\&\qquad-(ab\Delta')^2\Delta_x{}^2+2(ab\Delta)(ab\Delta')\Delta_x\Delta_x'\}.\end{aligned}$$

Das erste Glied ist Null, weil sich sein Zeichen ändert wenn man b mit c vertauscht; das zweite ist auch Null wegen der Voraussetzung I. So hat man denn:

$$\begin{aligned} M &= -(ab\Delta')^2(bcu)a_x^3 b_x^2 c_x^4 \Delta_x'^7 \cdot \Delta + (ab\Delta)(ab\Delta')\Delta_x^8 \Delta_x'^8 a_x^3 b_x^2 (bcu) c_x^4 \\ &= -\Delta_\vartheta'^2(\Theta f u)\cdot\Delta + \Delta_\vartheta \Delta_\vartheta'(\Theta f u), \\ N &= \quad a_x^4 \Delta_x'^7 \Delta_\vartheta \Theta_x^5 \{a\Delta' u)\Theta_\vartheta - (a\Theta u)\Delta_\vartheta' + (\Delta'\Theta u)a_\vartheta\}. \end{aligned}$$

Das erste Glied ist hier Null, denn es enthält den Factor Θ_ϑ; das zweite ist gleich $-\Delta_\vartheta'^2(f\Theta u)$, das dritte ist, wegen der Identität II, gleich der Grösse:

$$\begin{aligned} &(abc)(bc\Delta')b_x^2 c_x^3 a_x^3 \Delta_x'^7 \{-(ab\Delta')\cdot u_x - (a\Delta' u)b_x + (abu)\Delta_x'\} \\ &\quad = -(abc)(ab\Delta')(bc\Delta')a_x^3 b_x^2 c_x^3 \Delta_x'^7 \cdot u_x - \frac{1}{3}\Delta\cdot(\Delta'\Delta' u) \\ &\quad + \frac{1}{2}(abc)^2 a_x^3 b_x^2 c_x^3 (\Delta' b u)\Delta_x^8 = 0, \end{aligned}$$

durch die Anwendung der Identitäten V und III. Man hat folglich:

$$(8) \quad (f\Delta u)\cdot\Delta_\vartheta' - (f\Theta u)\Delta_\vartheta' u_\vartheta \cdot \Delta = (f\Delta\Theta)u_\vartheta \Delta_\vartheta' \cdot u_x = (\Theta f u)\Delta_\vartheta \Delta_\vartheta' \cdot u_x.$$

3) Die Identität II anwendend hat man:

$$(f\Delta u)\cdot(f\Delta u) = (a\Delta u)a_x^3 b_x^4 \Delta_x^8 \Delta_x'^8 \{(ab\Delta')\cdot u_x - (abu)\Delta_x' + (a\Delta' u)b_x\}.$$

Das erste Glied ist, wenn man a mit b vertauscht und die nämliche Identität anwendet, gleich der Grösse:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(ab\Delta')a_x^3 b_x^3 \Delta_x'^8 \Delta_x^8 \cdot u_x \{-(ab\Delta)u_x + (abu)\Delta_x\} \\ &\quad = -\frac{1}{2}\Delta_\vartheta \Delta_\vartheta' \cdot u_x^2 + \frac{1}{2}\Delta_\vartheta' \cdot \Delta \cdot u_x. \end{aligned}$$

Das zweite Glied ist ähnlicherweise gleich der Grösse

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2}(abu)a_x^3 b_x^3 \Delta_x^8 \cdot \Delta' \{-(ab\Delta)u_x + (abu)\Delta_x\} \\ &\quad = \frac{1}{2}\Delta_\vartheta \cdot \Delta' \cdot u_x - \frac{1}{2}\Theta\cdot\Delta^2; \end{aligned}$$

so haben wir

$$(9) \qquad [(f\Delta u)]^2 = -\frac{1}{2}\Delta_\vartheta \Delta_\vartheta' \cdot u_x^2 + \Delta'\cdot\Delta_\vartheta \cdot u_x - \frac{1}{2}\Theta\cdot\Delta^2.$$

4) Mit ähnlichem Verfahren erhält man die folgenden Formeln:

$$\begin{aligned} (10) \quad (f\Delta u)\cdot(afu)a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2 &= \frac{1}{2}\Delta_{\vartheta''} a_{\vartheta''} a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2 \cdot u_x^2 - \frac{1}{2} f_{\Theta\Theta}^4 \cdot \Delta_\vartheta \cdot u_x \\ &- \frac{1}{2}\Delta\cdot a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2 a_{\vartheta''} u_{\vartheta''} \cdot u_x + \frac{1}{2}\Delta\cdot\Theta\cdot f_{\Theta\Theta}^4, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(11)\quad (f\Delta u)\cdot(f\Theta u)\Delta_\vartheta u_\vartheta = & -\frac{1}{2}\Theta_{\vartheta'}\Delta'_{\vartheta'}\Delta_\vartheta u_\vartheta\cdot u_x{}^2 \\
& + \frac{1}{2}\Theta_{\vartheta'}u_{\vartheta'}\Delta_\vartheta u_\vartheta\cdot\Delta'\cdot u_x + \frac{1}{2}\Delta_\vartheta\cdot\Delta'_{\vartheta'}\cdot u_x \\
& - \frac{1}{2}\Delta\cdot\Delta_\vartheta\cdot\Theta,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(12)\quad (f\Delta u)\cdot(af\Theta)a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2 = & \frac{1}{2}a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2 a_{\vartheta''}\Delta_{\vartheta''}\cdot u_x \\
& - \frac{1}{2}\Theta_{\vartheta''}\Delta_{\vartheta''}a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2 a_x\cdot u_x - \frac{1}{2}a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2 a_{\vartheta''}u_{\vartheta''}\cdot\Delta \\
& + \frac{1}{2}\Theta_{\vartheta''}u_{\vartheta''}a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2 a_x\cdot\Delta,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(13)\quad (f\Delta u)\cdot(\Theta f u)\Delta_\vartheta\Delta'_\vartheta = & \frac{1}{2}\Delta_\vartheta\Delta'_\vartheta\Delta''_{\vartheta'}\Theta_{\vartheta'}\cdot u_x{}^2 - \frac{1}{2}\Delta_\vartheta\Delta'_\vartheta\cdot\Delta''_{\vartheta'}\cdot u_x \\
& - \frac{1}{2}u_{\vartheta'}\Theta_{\vartheta'}\Delta_\vartheta\Delta'_\vartheta\cdot\Delta''\cdot u_x \\
& + \frac{1}{2}\Delta_\vartheta\Delta'_\vartheta\cdot\Delta''\cdot\Theta',
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(14)\quad [(\Theta f u)\Delta_\vartheta\Delta'_\vartheta]^2 = & -\frac{1}{2}\Delta_\vartheta\Delta'_\vartheta\Delta''_{\vartheta'}\Delta'''_{\vartheta'}\Theta_{\vartheta''}\Theta'_{\vartheta''}\cdot u_x{}^2 \\
& + \Delta_\vartheta\Delta'_\vartheta\cdot\Delta''_{\vartheta'}\Delta'''_{\vartheta'}\Theta'_{\vartheta''}u_{\vartheta''}\cdot u_x \\
& - \frac{1}{2}\Delta_\vartheta\Delta'_\vartheta\cdot\Delta''_{\vartheta'}\Delta'''_{\vartheta'}\cdot\Theta'',
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(15)\quad (\Theta f u)\Delta_\vartheta\Delta'_\vartheta\cdot(afu)a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2 = & -\frac{1}{2}a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2 a_{\vartheta'}\Theta'''_{\vartheta''}\Delta_{\vartheta'''}\Delta'_{\vartheta'''}\cdot u_x{}^2 \\
& + \frac{1}{2}\Delta_\vartheta\Delta'_\vartheta\Theta_{\vartheta''}u_{\vartheta''}\cdot f^4_{\Theta\Theta}\cdot u_x \\
& + \frac{1}{2}a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2 a_{\vartheta''}u_{\vartheta''}\cdot\Delta_{\vartheta'''}\Delta'_{\vartheta'''}\cdot u_x \\
& - \frac{1}{2}\Delta_\vartheta\Delta'_\vartheta\cdot\Theta' f^4_{\Theta\Theta},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(16)\quad (\Theta f u)\Delta_\vartheta\Delta'_\vartheta\cdot(af\Theta')a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2 = & \frac{1}{2}\Theta_{\vartheta'''}\Theta'_{\vartheta'''}a_{\vartheta'}^2 a_{\vartheta''}^2 a_x\Delta_\vartheta\Delta'_\vartheta\cdot u_x \\
& - \frac{1}{2}\Theta_{\vartheta'''}a_{\vartheta'''}a_{\vartheta'}^2 a_{\vartheta''}^2\Delta_\vartheta\Delta'_\vartheta\cdot u_x \\
& - \frac{1}{2}\Theta'_{\vartheta'''}u_{\vartheta'''}a_{\vartheta'}^2 a_{\vartheta''}^2 a_x\cdot\Delta_\vartheta\Delta'_\vartheta \\
& + \frac{1}{2}u_{\vartheta'''}a_{\vartheta'''}a_{\vartheta'}^2 a_{\vartheta''}^2\cdot\Delta_\vartheta\Delta'_\vartheta,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(17)\quad [(afu)a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2]^2 = & -\frac{1}{2}a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2 b_{\vartheta''}^2 b_{\vartheta'''}^2 a_{\vartheta^{IV}}b_{\vartheta^{IV}}\cdot u_x^2 + a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2 a_{\vartheta''}u_{\vartheta''}\cdot f^4_{\Theta\Theta}\cdot u_x \\
& - \frac{1}{2}f^4_{\Theta\Theta}\cdot f^4_{\Theta\Theta}\cdot\Theta',
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(18)\quad [(af\Theta)a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2]^2 = & -\frac{1}{2}a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2 b_{\vartheta''}^2 b_{\vartheta'''}^2 a_{\vartheta^{IV}}b_{\vartheta^{IV}} + a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2 b_{\vartheta''}^2 b_{\vartheta'''}^2\Theta_{\vartheta^{IV}}b_{\vartheta^{IV}}a_x \\
& - \frac{1}{2}\Theta_{\vartheta^{IV}}\Theta''_{\vartheta^{IV}}a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2 b_{\vartheta''}^2 b_{\vartheta'''}^2 a_x b_x,
\end{aligned}
$$

$$(19)\ (afu)a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2 \cdot (bf\Theta) b_\vartheta^2 b_{\vartheta'}^2 = -\frac{1}{2} a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2 b_{\vartheta''}^2 b_{\vartheta'''}^2 a_{\vartheta^{IV}} b_{\vartheta^{IV}} \cdot u_x$$
$$+ \frac{1}{2} a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2 b_{\vartheta''}^2 b_{\vartheta'''}^2 a_{\vartheta^{IV}} \Theta''_{\vartheta^{IV}} b_x \cdot u_x$$
$$+ \frac{1}{2} a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2 a_{\vartheta''} u_{\vartheta''} \cdot f_{\Theta\Theta}^4$$
$$- \frac{1}{2} a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2 a_x \Theta_{\vartheta''} u_{\vartheta''} \cdot f_{\Theta\Theta}^4 .$$

5) Wir wollen endlich eine Beziehung zwischen der Form

$$\Theta_{\vartheta'} u_{\vartheta'} \Delta'_\vartheta u_\vartheta ,$$

die in der Formel (11) auftritt, und dem Quadrat der Form

$$\Delta_\vartheta = u_\vartheta \Delta_\vartheta \Theta_x^6 \Delta_x^8$$

entwickeln.

Die Identität II anwendend hat man:

$$\Theta_{\vartheta'} u_{\vartheta'} \Delta_\vartheta u_\vartheta - \Delta'_\vartheta \cdot \Delta_{\vartheta'}$$
$$= \Delta_x^8 \Delta_x'^8 a_x^3 b_x^2 c_x^3 d_x^3 (abu)(cdu)(ab\Delta') \{(bc\Delta) d_x - (bd\Delta) c_x\}$$
$$= 2\Delta_x^7 \Delta_x'^8 a_x^3 b_x^2 c_x^3 d_x^4 (abu)(ab\Delta')(bc\Delta) \{(cd\Delta) u_x + (c\Delta u) d_x - (d\Delta u) c_x\} .$$

Das zweite Glied enthält den Factor d_x^5; das erste ist, den Factor u_x ausser Betrachtung lassend, gleich der Grösse:

$$(cd\Delta) c_x^3 d_x^3 \Delta_x^7 \cdot (ab\Delta')(abu) a_x^3 b_x^2 \Delta_x'^8 \{(bcd)\Delta_x - (cd\Delta) b_x\}$$
$$= \Delta_\vartheta \Theta'_\vartheta \Delta'_{\vartheta'} u_{\vartheta'} - \Delta_\vartheta^2 \cdot \Delta'_{\vartheta'} .$$

Das dritte Glied ist gleich der Grösse:

$$-2\Delta_x^7 \Delta_x'^7 a_x^3 b_x^2 c_x^4 d_x^4 (abu)(ab\Delta')(d\Delta u) \{(bc\Delta')\Delta_x - (b\Delta\Delta') c_x + (c\Delta\Delta') b_x\}$$
$$= (f\Delta u) \cdot M + N .$$

Die Identität IV anwendend hat man:

$$M = (abu) a_x^2 b_x^2 c_x^3 \Delta_x'^7 \{(ab\Delta')^2 c_x^2 + (cb\Delta')^2 a_x^2 - (ac\Delta')^2 b_x^2$$
$$- (acb)^2 \Delta_x'^2 + 2(acb)(ac\Delta') b_x \Delta'_x\} .$$

Von den fünf Formen welche man hier bekommt, enthält die erste den Factor c_x^5; die letzte ist auch null, denn sie wird durch die Vertauschung von b mit c und die Anwendung der Identität III gleich der Grösse

$$-(abc) a_x^2 b_x^3 c_x^3 \Delta_x'^8 \{(ac\Delta')(abu) - (ab\Delta')(acu)\}$$
$$= -(abc)^2 (a\Delta' u) a_x^2 b_x^3 c_x^3 \Delta_x'^8 = -(\Delta\Delta' u) \Delta_x^8 \Delta_x'^8 = 0;$$

die vierte wechselt ihr Zeichen durch die Vertauschung von a mit b; und die übrigen unterscheiden sich nur durch die Vertauschung von a mit b; man hat also, die Identität II anwendend:

$$M = 2(abu)(bc\Delta')^2 d_x^4 \Delta_x^8 a_x^3 b_x^2 c_x^3 \Delta_x'^7$$
$$\cdot \{(ad\Delta) u_x - (adu) \Delta_x + (a\Delta u) d_x\} .$$

Von diesen drei Formen enthält die dritte den Factor d_x^5; die erste ist gleich der Grösse:

$$(a d \Delta)\, a_x^3 d_x^3 \Delta_x^8 \cdot (b c \Delta')^2 b_x^2 c_x^3 \Delta_x'^7 \cdot u_x \left\{(a b d)\, u_x + (a d u)\, b_x\right\}$$
$$= -\Delta_\vartheta \Theta_\vartheta' \Delta_{\vartheta'}'^2 \cdot u_x^2 + \Delta_\vartheta \cdot \Delta_{\vartheta'}'^2 \cdot u_x;$$

die zweite wird, die nämliche Identität anwendend, gleich der Grösse:

$$-(a d u)\, a_x^3 d_x^3 \cdot (b c \Delta')^2 b_x^2 c_x^3 \Delta_x'^7 \cdot \Delta \left\{(a b d)\, u_x + (a d u)\, b_x\right\}$$
$$= u_\vartheta \Theta_\vartheta' \Delta_{\vartheta'}'^2 \cdot \Delta \cdot u_x - \Theta \cdot \Delta \cdot \Delta_{\vartheta'}'^2.$$

Man hat also:

$$M = -\Delta_\vartheta \Theta_\vartheta' \Delta_{\vartheta'}'^2 \cdot u_x^2 + \Delta_\vartheta \cdot \Delta_{\vartheta'}'^2 \cdot u_x + u_\vartheta \Theta_\vartheta' \Delta_{\vartheta'}'^2 \cdot \Delta \cdot u_x - \Theta \cdot \Delta \cdot \Delta_{\vartheta'}'^2.$$

Δ mit Δ' vertauschend und die Identität III anwendend, hat man:

$$N = -(c \Delta \Delta')\, \Delta_x^7 \Delta_x'^7 c_x^4 \cdot (a b u)\, a_x^3 b_x^3 d_x^4 \left\{-(b d u)(a \Delta \Delta') + (a d u)(b \Delta \Delta')\right\}$$
$$= 2 (a \Delta \Delta')(c \Delta \Delta')\, \Delta_x^7 \Delta_x'^7 c_x^4 a_x^3 b_x^3 d_x^4 (a b u)(b d u),$$

oder, a mit b vertauschend und die nämliche Identität anwendend:

$$(a b u)\, a_x^3 b_x^3 \cdot (c \Delta \Delta')\, c_x^4 \Delta_x^7 \Delta_x'^7 d_x^4 \left\{-(a b u)(d \Delta \Delta') + (a b d)(\Delta \Delta' u)\right\}.$$

Von diesen zwei Formen hat die erste, die IV. Identität anwendend, den Ausdruck:

$$-\frac{1}{2} \Theta \cdot \Delta_x^7 \Delta_x'^7 c_x^3 d_x^3 \left\{(c \Delta \Delta')^2 d_x^2 + (d \Delta \Delta')^2 c_x^2 - (c d \Delta)^2 \Delta_x'^2 - (c d \Delta')^2 \Delta_x^2 \right.$$
$$\left. + 2 (c d \Delta)(c d \Delta')\, \Delta_x \Delta_x' \right\}$$
$$= \Theta \cdot \Delta \cdot \Delta_\vartheta^2 - \Theta \cdot \Delta_\vartheta \Delta_\vartheta'.$$

Die zweite ist, wegen der Identität V, gleich der Grösse:

$$\frac{1}{3} \Delta \cdot (c \Delta' \Delta'')(\Delta' \Delta'' u)\, c_x^4 \Delta_x'^7 \Delta_x''^7 \cdot u_x = \frac{1}{3} \Delta \cdot (f \Delta \Delta')(\Delta \Delta' u) \cdot u_x.$$

Man hat also

$$N = \Theta \cdot \Delta \cdot \Delta_{\vartheta'}'^2 - \Theta \cdot \Delta_{\vartheta'} \Delta_{\vartheta'}' + \frac{1}{3} \Delta \cdot (f \Delta \Delta')(\Delta \Delta' u) \cdot u_x,$$

$$(20)\; \Theta_{\vartheta'} u_{\vartheta'} \Delta_{\vartheta'}' u_\vartheta - \Delta_\vartheta' \cdot \Delta_{\vartheta'} = -\Delta_\vartheta \Delta_{\vartheta'}'^2 \Theta_\vartheta' \cdot u_x^2 + u_\vartheta \Theta_\vartheta' \Delta_{\vartheta'}'^2 \cdot \Delta \cdot u_x$$
$$+ \frac{1}{3} \Delta \cdot (f \Delta \Delta')(\Delta \Delta' u) \cdot u_x + \Delta_\vartheta \Theta_\vartheta' \Delta_{\vartheta'}' u_{\vartheta'} \cdot u_x - \Theta \cdot \Delta_\vartheta \Delta_\vartheta'.$$

§ 3.

Berechnung von Δ_φ.

Berechnung von $A_0 A_2 - A_1^2$. —

Man hat wegen der Formeln (1) (2) (3):

$$A_0 A_2 - A_1^2 = -\frac{25}{36} u_x^4 (2 \Delta^2 \Theta + \Delta \cdot f_{\Theta\Theta}^4 \cdot u_x^2 - 4 \Delta \cdot \Delta_\vartheta \cdot u_x)$$
$$-\frac{25}{9} u_x^4 (f \Delta u) \cdot (f \Delta u),$$

und hieraus, von der Beziehung (9) Gebrauch machend:

$$(21)\qquad A_0A_2 - A_1^2 = -\frac{25}{36}u_x^6(\Delta\cdot f^4_{\Theta\Theta} - 2\Delta_\vartheta\Delta_\vartheta').$$

Berechnung von $A_1A_3 - A_2^2$. —

Durch die Formeln (2), (3), (6) hat man:

$$\begin{aligned}
A_1A_3 - A_2^2 = {} & \frac{5}{36}u_x^4[-6\Theta(f\Delta u)\cdot(f\Delta u) - 4\Delta\cdot(f\Delta u)\cdot(f\Theta u) \\
& + 24(f\Delta u)\cdot(f\Theta u)\Delta_\vartheta u_\vartheta\cdot u_x + 15(f\Delta u)\cdot(afu)a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}\cdot u_x^2 \\
& - 12(f\Delta u)\cdot(af\Theta')a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2\cdot u_x^3] \\
& - \frac{25}{144}u_x^4[4\Delta^2\Theta^2 + f^4_{\Theta\Theta}\cdot f^4_{\Theta\Theta}u_x^4 + 16\Delta_\vartheta\cdot\Delta'_{\vartheta'}\cdot u_x^2 \\
& + 4\Delta\cdot\Theta f^4_{\Theta\Theta}u_x^2 - 16\Delta\cdot\Theta\cdot\Delta'_{\vartheta'}\cdot u_x - 8f^4_{\Theta\Theta}\cdot\Delta_\vartheta\cdot u_x^3] \\
= {} & \frac{25}{144}u_x^4[-8\Theta(f\Delta u)\cdot(f\Delta u) + 16(f\Delta u)\cdot(f\Theta u)\Delta_\vartheta u_\vartheta\cdot u_x \\
& + 12(f\Delta u)\cdot(afu)a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2\cdot u_x^2 \\
& - \frac{48}{5}(f\Delta u)\cdot(af\Theta')a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2 u_x^3 - 4\Delta^2\cdot\Theta^2 \\
& - f^4_{\Theta\Theta}\cdot f^4_{\Theta\Theta}\cdot u_x^4 - 16\Delta_\vartheta\cdot\Delta'_{\vartheta'}\cdot u_x^2 \\
& - 4\Delta\cdot\Theta\cdot f^4_{\Theta\Theta}\cdot u_x^2 + 16\Delta\cdot\Theta\cdot\Delta_\vartheta\cdot u_x + 8\Delta_\vartheta\cdot f^4_{\Theta\Theta}\cdot u_x^3],
\end{aligned}$$

wobei wir die Beziehung (7) benutzt haben.

Wenn man die Quadrate und die Producte, die in der rechten Seite der letzten Gleichung enthalten sind, den Beziehungen (9), (10), (11), (12), (19) gemäss, umgestaltet, erhält man:

$$\begin{aligned}
(22)\quad A_1A_3 - A_2^2 = \frac{25}{144}u_x^6[& -4\Theta\cdot\Delta_\vartheta\Delta'_\vartheta + 2\Delta\cdot\Theta\cdot f^4_{\Theta\Theta} + 8u_\vartheta\Theta'_\vartheta\Delta'^2_{\vartheta'}\cdot\Delta\cdot u_x \\
& + \frac{8}{3}(f\Delta\Delta')(\Delta\Delta'u)\cdot\Delta''\cdot u_x \\
& - \frac{6}{5}a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2 a_{\vartheta''}u_{\vartheta''}\cdot\Delta\cdot u_x + 2\Delta_\vartheta\cdot f^4_{\Theta\Theta}\cdot u_x \\
& - \frac{24}{5}a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2 a_x\Theta_{\vartheta''}u_{\vartheta''}\cdot\Delta\cdot u_x - 8\Delta_\vartheta\Theta'_\vartheta\Delta'^2_{\vartheta'}\cdot u_x^2 \\
& + \frac{6}{5}a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2 a_{\vartheta''}\Delta_{\vartheta''}\cdot u_x^2 + \frac{24}{5}a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2 a_x\Delta_{\vartheta''}\Theta_{\vartheta''}\cdot u_x^2 \\
& - f^4_{\Theta\Theta}\cdot f^4_{\Theta\Theta}\cdot u_x^2].
\end{aligned}$$

Berechnung von $A_0A_3 - A_1A_2$. —

Man hat durch die Formeln (1), (2), (3), (6):

$$\begin{aligned}
A_0A_3 - A_1A_2 = -\frac{5}{36}u_x^4[& 4\Delta\cdot\Theta\cdot(f\Delta u) - 4\Delta^2\cdot(f\Theta u) \\
& + 24\Delta\cdot(f\Theta u)\Delta_\vartheta u_\vartheta\cdot u_x - 20\Delta_\vartheta\cdot(f\Delta u)\cdot u_x \\
& + 15\Delta\cdot(afu)a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2\cdot u_x^2 + 5f^4_{\Theta\Theta}\cdot(f\Delta u)\cdot u_x^2 \\
& - 12\Delta\cdot(af\Theta')a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2\cdot u_x^3],
\end{aligned}$$

und wegen der Beziehungen (7), (8)

$$(23)\quad A_0 A_3 - A_1 A_2 = -\frac{25}{36} u_x{}^6 \big[-4(\Theta f u)\Delta_\vartheta \Delta'_\vartheta + 3\Delta\cdot(afu) a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2 + f_{\Theta\Theta}^4 \cdot (f\Delta u) - \frac{12}{5}\Delta\cdot(af\Theta') a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2 \cdot u_x\big].$$

Die beiden Seiten ins Quadrat erhebend und von den Formeln (9), (10), (12), (13), (14), (15), (16), (17), (18), (19) Gebrauch machend, finden wir:

$$\begin{aligned}
(24)\quad (A_0 A_3 - A_1 A_2)^2 = \frac{25^2}{36^2} u_x{}^{12} \Big[& -8\Theta[\Delta_\vartheta \Delta'_\vartheta]^2 - 2\Delta^2\cdot\Theta[f_{\Theta\Theta}^4]^2 \\
& + 8\Delta\cdot\Theta\cdot f_{\Theta\Theta}^4 \cdot \Delta_\vartheta \Delta'_\vartheta + 16\Delta_\vartheta \Delta'_\vartheta \cdot \Delta''_{\vartheta'} \Delta'''_{\vartheta'} \Theta'_{\vartheta''} u_{\vartheta''} \cdot u_x \\
& + \frac{6}{5}\Delta^2 \cdot f_{\Theta\Theta}^4 \cdot a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2 a_{\vartheta''} u_{\vartheta''} \cdot u_x - 2\Delta\cdot\Delta'_\vartheta \cdot [f_{\Theta\Theta}^4]^2 \cdot u_x \\
& - \frac{12}{5}\Delta\cdot\Delta_\vartheta \Delta'_\vartheta \cdot a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2 a_{\vartheta''} u_{\vartheta''} \cdot u_x \\
& - 8\Delta\cdot f_{\Theta\Theta}^4 \cdot \Delta_\vartheta \Delta'_\vartheta \Theta_{\vartheta'} u_{\vartheta'} \cdot u_x + 4 f_{\Theta\Theta}^4 \cdot \Delta_\vartheta \cdot \Delta'_{\vartheta'} \Delta''_{\vartheta'} \cdot u_x \\
& - \frac{48}{5}\Delta\cdot a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2 a_x \Theta_{\vartheta''} u_{\vartheta''} \cdot \Delta_\vartheta \Delta'_\vartheta \cdot u_x \\
& + \frac{24}{5}\Delta^2 \cdot f_{\Theta\Theta}^4 \cdot a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2 a_x \Theta_{\vartheta''} u_{\vartheta''} \cdot u_x \\
& - 8\Delta_\vartheta \Delta'_\vartheta \Delta''_{\vartheta'} \Delta'''_{\vartheta'} \Theta_{\vartheta''} \Theta'_{\vartheta''} \cdot u_x{}^2 \\
& - \frac{69}{50}\Delta^2 \cdot a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2 b_{\vartheta''}^2 b_{\vartheta'''}^2 a_{\vartheta^{IV}} b_{\vartheta^{IV}} \cdot u_x{}^2 \\
& - \frac{1}{2}\Delta_\vartheta \Delta'_\vartheta \cdot [f_{\Theta\Theta}^4]^2 \cdot u_x{}^2 \\
& - \frac{36}{25}\Delta^2 \cdot a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2 b_{\vartheta''}^2 b_{\vartheta'''}^2 a_x b_{\vartheta^{IV}} \Theta_{\vartheta^{IV}} \cdot u_x{}^2 \\
& - \frac{72}{25}\Delta^2 \cdot a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2 a_x b_{\vartheta''}^2 b_{\vartheta'''}^2 b_x \Theta_{\vartheta^{IV}} \Theta''_{\vartheta^{IV}} \cdot u_x{}^2 \\
& + \frac{12}{5}\Delta\cdot a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2 a_{\vartheta''} \Theta'''_{\vartheta''} \Delta_{\vartheta'''} \Delta'_{\vartheta'''} \cdot u_x{}^2 \\
& - 4 f_{\Theta\Theta}^4 \cdot \Delta_\vartheta \Delta'_\vartheta \Delta''_{\vartheta'} \Theta_{\vartheta'} \cdot u_x{}^2 \\
& + \frac{48}{5}\Delta\cdot\Theta_{\vartheta'''} \Theta'_{\vartheta'''} a_{\vartheta'}^2 a_{\vartheta''}^2 a_x \Delta_\vartheta \Delta'_\vartheta \cdot u_x{}^2 \\
& + \frac{3}{5}\Delta\cdot f_{\Theta\Theta}^4 \cdot a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2 a_{\vartheta''} \Delta_{\vartheta''} \cdot u_x{}^2 \\
& + \frac{12}{5}\Delta\cdot f_{\Theta\Theta}^4 \cdot a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2 a_x \Delta_{\vartheta''} \Theta_{\vartheta''} \cdot u_x{}^2 \Big].
\end{aligned}$$

Berechnung von Δ_φ. —

Aus den Formeln (21) und (22) leitet man das folgende Product her.

$$
\begin{aligned}
(25)\quad 4(A_0A_2-A_1^2)(A_1A_3-A_2^2) = -\frac{25^2}{36^2}u_x^{12}\Big[& 8\Theta\cdot[\Delta_\vartheta\Delta'_\vartheta]^2+2\Delta^2\cdot\Theta\cdot[f^4_{\theta\theta}]^2 \\
& -8\Delta\cdot\Theta\cdot f^4_{\theta\theta}\cdot\Delta_\vartheta\Delta'_\vartheta-16\Delta\cdot\Delta_\vartheta\Delta'_{\vartheta'}\cdot u_{\vartheta'}\Theta''_{\vartheta'}\Delta^2_{\vartheta''}\cdot u_x \\
& -\frac{6}{5}\Delta^2\cdot f^4_{\theta\theta}\cdot a^2_\vartheta a^2_{\vartheta'}a_{\vartheta''}u_{\vartheta''}\cdot u_x+2\Delta\cdot\Delta'_{\vartheta'}\cdot[f^4_{\theta\theta}]^2\cdot u_x \\
& +\frac{12}{5}\Delta\cdot\Delta_\vartheta\Delta'_\vartheta\cdot a^2_\vartheta a^2_{\vartheta'}a_{\vartheta''}u_{\vartheta''}\cdot u_x \\
& +8\Delta^2\cdot f^4_{\theta\theta}\cdot u_\vartheta\Theta'_\vartheta\Delta^2_{\vartheta'}\cdot u_x-4\Delta_\vartheta\Delta'_{\vartheta'}\cdot\Delta''_{\vartheta'}\cdot f^4_{\theta\theta}\cdot u_x \\
& +\frac{48}{5}\Delta\cdot\Delta'_\vartheta\Delta''_\vartheta\cdot a^2_{\vartheta'}a^2_{\vartheta''}a_x\Theta'_{\vartheta'''}u_{\vartheta'''}\cdot u_x \\
& -\frac{24}{5}\Delta^2\cdot f^4_{\theta\theta}\cdot a^2_\vartheta a^2_{\vartheta'}a_x\Theta'_{\vartheta''}u_{\vartheta''}\cdot u_x \\
& +\frac{8}{3}\Delta^2\cdot f^4_{\theta\theta}\cdot(f\Delta\Delta')(\Delta\Delta'u)\cdot u_x \\
& -\frac{16}{3}\Delta\cdot\Delta_\vartheta\Delta'_\vartheta\cdot(\Delta\Delta'u)(\Delta\Delta'f)\cdot u_x \\
& -8\Delta\cdot f^4_{\theta\theta}\cdot\Delta_\vartheta\Theta'_\vartheta\Delta'^2_{\vartheta'}\cdot u_x^2 \\
& +\frac{6}{5}\Delta\cdot f^4_{\theta\theta}\cdot a^2_\vartheta a^2_{\vartheta'}a_{\vartheta''}\Delta_{\vartheta''}\cdot u_x^2 \\
& +\frac{24}{5}a^2_\vartheta a^2_{\vartheta'}a_x\Delta_{\vartheta''}\Theta_{\vartheta''}\cdot\Delta\cdot f^4_{\theta\theta}\cdot u_x^2 \\
& -\Delta\cdot[f^4_{\theta\theta}]^3\cdot u_x^2+16\Delta_\vartheta\Theta'_\vartheta\Delta'^2_{\vartheta'}\cdot\Delta_\vartheta\Delta'_\vartheta\cdot u_x^2 \\
& -\frac{12}{5}\Delta_\vartheta\Delta'_\vartheta\cdot a^2_\vartheta a^2_{\vartheta'}a_{\vartheta''}\Delta_{\vartheta''}\cdot u_x^2 \\
& -\frac{48}{5}a^2_\vartheta a^2_{\vartheta'}a_x\Theta_{\vartheta''}\Delta_{\vartheta''}\cdot\Delta_\vartheta\Delta'_\vartheta\cdot u_x^2 \\
& +2[f^4_{\theta\theta}]^2\cdot\Delta_\vartheta\Delta'_\vartheta\cdot u_x^2\Big].
\end{aligned}
$$

Subtrahirt man Seite für Seite die beiden Gleichungen (24) und (25), so fallen die drei ersten Glieder weg, und die folgenden geben die Differenz:

$$\Delta\cdot u_\vartheta\Theta'_\vartheta\Delta'^2_{\vartheta'}-\Delta_\vartheta\Delta'_\vartheta\Theta_{\vartheta'}u_{\vartheta'},$$

welche sich in nachstehender Weise auf Formen kleineren Ranges reduciren lässt. Die Differenz ist, durch Anwendung der Identität (II), gleich dem Ausdruck:

$$u_{\vartheta'}b_{\vartheta'}a_x^3b_x^2(ab\Delta')\Delta'^7_x\Delta_x^8\{(a\Delta\Delta')b_x-(b\Delta\Delta')a_x\}.$$

Das erste Glied ist, kraft der Identität V, gleich der Grösse:

$$-\frac{1}{3}\Delta\cdot(a\Delta'\Delta'')(a\Delta''u)\Delta'^8_x\Delta''^7_x a_x^3,$$

und wird ferner, Δ' mit Δ'' vertauschend, und die halbe Summe der Glieder, die man bekommt, nehmend, endlich die Identität II anwendend, gleich der Grösse:

$$-\frac{1}{6}\Delta\cdot(a\Delta'\Delta'')a_x^3\Delta_x'^7\Delta_x''^7\left\{-(a\Delta'\Delta'')u_x+(\Delta'\Delta''u)a_x\right\}$$
$$=\frac{1}{6}\Delta\cdot(f\Delta'\Delta'')^2\cdot u_x-\frac{1}{6}\Delta\cdot(\Delta'\Delta''u)(f\Delta'\Delta'').$$

Dieselbe Identität II anwendend, wird das zweite Glied gleich der Grösse:

$$-\frac{1}{2}(b\Delta\Delta')b_x^2 b_{\vartheta'}\Delta_x^7\Delta_x'^7 u_{\vartheta'}\cdot a_x^4\left\{(a\Delta\Delta')b_x-(b\Delta\Delta')a_x\right\}$$
$$=-\frac{1}{2}(a\Delta\Delta')(b\Delta\Delta')\Delta_x^7\Delta_x'^7 b_{\vartheta'}u_{\vartheta'}b_x^3 a_x^4,$$

welche dann, vermöge der Identität V gleich

$$-\frac{1}{6}\Delta\cdot(\Delta'\Delta''u)(\Delta'\Delta''f)$$

wird. Man hat also:

$$\Delta\cdot u_\vartheta\Theta'_\vartheta\Delta_{\vartheta'}'^2-\Delta_\vartheta\Delta'_\vartheta\Theta_{\vartheta'}u_{\vartheta'}=\frac{1}{6}\Delta\cdot(f\Delta'\Delta'')^2\cdot u_x \tag{26}$$
$$-\frac{1}{3}\Delta\cdot(f\Delta'\Delta'')(\Delta'\Delta''u).$$

Letztere Beziehung gebrauchend, sieht man sogleich, dass die übrigen Zwischenformen wegbleiben und man also erhält:

$$\Delta_\varphi=2[4(A_0A_2-A_1^2)(A_1A_3-A_2^2)-(A_0A_3-A_1A_2)^2] \tag{27}$$
$$=-\frac{2\cdot 25^2}{36^2}u_x^{14}\Big[-\frac{69}{50}\Delta^2\cdot a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2 b_{\vartheta''}^2 b_{\vartheta'''}^2 a_{\vartheta^{IV}} b_{\vartheta^{IV}}$$
$$-\frac{36}{25}\Delta^2\cdot a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2 b_{\vartheta''}^2 b_{\vartheta'''}^2 a_x b_{\vartheta^{IV}}\Theta_{\vartheta^{IV}}$$
$$-\frac{72}{25}\Delta^2\cdot a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2 b_{\vartheta''}^2 b_{\vartheta'''}^2 a_x b_x\Theta_{\vartheta^{IV}}\Theta''_{\vartheta^{IV}}$$
$$+\frac{4}{3}\Delta^2\cdot f_{\Theta\Theta}^4\cdot(\Delta\Delta'f)^2$$
$$+\frac{12}{5}\Delta\cdot a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2 a_{\vartheta''}\Theta'''_{\vartheta''}\Delta'_{\vartheta'''}\Delta''_{\vartheta'''}$$
$$+\frac{48}{5}\Delta\cdot a_{\vartheta'}^2 a_{\vartheta''}^2 a_x\Delta'_\vartheta\Delta''_\vartheta\Theta_{\vartheta'''}\Theta'_{\vartheta'''}$$
$$+\frac{9}{5}\Delta\cdot f_{\Theta\Theta}^4\cdot a_{\vartheta'}^2 a_{\vartheta''}^2 a_{\vartheta'''}\Delta_{\vartheta'''}$$
$$-8\Delta\cdot f_{\Theta\Theta}^4\cdot\Delta_\vartheta\Theta'_\vartheta\Delta_{\vartheta'}'^2$$
$$+\frac{36}{5}\Delta\cdot f_{\Theta\Theta}^4\cdot a_\vartheta^2 a_{\vartheta'}^2\Theta_{\vartheta''}\Delta_{\vartheta''}a_x$$
$$-\frac{8}{3}\Delta\cdot(f\Delta\Delta')^2\cdot\Delta_\vartheta\Delta'_\vartheta-\Delta\cdot[f_{\Theta\Theta}^4]^3$$
$$-\frac{12}{5}\Delta_\vartheta\Delta'_\vartheta\cdot a_{\vartheta'}^2 a_{\vartheta''}^2 a_{\vartheta'''}\Delta_{\vartheta'''}$$

$$
\begin{aligned}
&+16\,\Delta_\vartheta\Delta'_\vartheta\cdot\Delta''_{\vartheta'}\Theta''_{\vartheta'}\Delta'''^{\,2}_{\vartheta''}\\
&-\frac{48}{5}\Delta_\vartheta\Delta'_\vartheta\cdot a^2_{\vartheta'}a^2_{\vartheta''}a_x\Delta''_{\vartheta'''}\,\Theta'_{\vartheta''}\\
&+\frac{3}{2}\Delta_\vartheta\Delta'_\vartheta\cdot[f^4_{\theta\theta}]^2-8\,\Delta_\vartheta\Delta'_\vartheta\Delta''_{\vartheta'}\Delta'''_{\vartheta'}\Theta_{\vartheta''}\Theta'_{\vartheta''}\\
&-4f^4_{\theta\theta}\,\Delta_\vartheta\Delta'_\vartheta\Delta''_{\vartheta'}\Theta_{\vartheta'}\Big].
\end{aligned}
$$

Mezzojuso, den 4. October 1886.

Ueber die mit der Erzeugung der Raumcurven 4. Ordnung II. Species verknüpften algebraischen Processe.

Von

Franz Meyer in Tübingen.

Man hat neuerdings, von algebraischer, wie geometrischer Seite her*), dem Studium der im Titel erwähnten Raumcurven, neue Gesichtspunkte abzugewinnen versucht. Diese Bestrebungen lassen sich im Wesentlichen dahin charakterisiren, die räumlich (oder *quaternär*)-projectivischen Eigenschaften dieser Curven mit den Ergebnissen der (*binären*) Geometrie *auf der Curve selbst* in einen organischen Zusammenhang zu bringen, oder, schärfer ausgedrückt, invariante Processe herzustellen, die die beiden genannten Untersuchungsrichtungen gleichmässig umfassen.

In dieser Fortschreitungsrichtung bewegt sich der Beitrag der nachfolgenden Mittheilung: die Curve, sie sei mit R_4 bezeichnet und ein für allemal in der *Ordnungsform* d. i. als Punktort gedacht, soll *erzeugt* werden einerseits als Ort der Schnittpunkte von (Schmiegungs)-Ebenen dreier, projectivisch auf einander bezogener, rationaler Ebenenbüschel (*beliebig hoher Ordnung*), andererseits aber, wenn auch nur in secundärer Weise, als umhüllt von den Verbindungsebenen dreier, projectivisch verknüpfter Punkte rationaler Ordnungscurven (gleichfalls von beliebig hoher Ordnung). Ist eine rationale Classen- resp. Ordnungscurve in der angegebenen Art verwendbar zur Erzeugung der R_4, so heisse sie eine „*erzeugende*“ Curve. In § 1 wird zuerst gezeigt, wie man nach H. Brill **) diese erzeugenden Curven mittelst Auflösung linearer Gleichungen bestimmt.

*) Study, Ueber die rationalen Raumcurven 4. Ordnung. Leipziger Berichte, 11. Jan. 1886. Jolles. Die Theorie der Osculanten und das Sehnensystem der Raumcurve IV. Ordnung II. Species. Habilitationsschrift, Aachen 1886. Seitdem hat H. Jolles diesen Gegenstand weitergeführt: H. W. Stahl hat ihn von synthetischer Seite her in Angriff genommen (beide Arbeiten sollen demnächst im Journal für Mathematik erscheinen).

**) Brill, Ueber rationale Curven und Regelflächen. Münchener Berichte, 1885. Vgl. meine, daran anknüpfende, in den Berichten desselben Jahres publicirte

Sodann wird eine Methode angegeben, nach der man aus drei erzeugenden Curven niedrigsten Grades *alle* übrigen durch lineare Combination ableitet, wobei willkürliche ganze Functionen die Rolle der Coefficienten übernehmen.

Damit reducirt sich die Aufgabe darauf, jene drei Curven in einfachster Weise durch invariante Processe zu bilden. Dies geschieht für die Curven erster Classe in § 4, für die zweiter (in dreifacher Darstellung) in §§ 5 und 6, nachdem in §§ 2 und 3 einige, der Geometrie auf der Curve entnommene binäre und ternäre Hülfsformeln vorangestellt sind. Ueber das Wesen der dabei sich abspielenden Ueberschiebungsprocesse, die mit Untersuchungen der Herren Brill und Study in engem Zusammenhange stehen, vergleiche die Anmerkung auf pag. 455.

In § 7 folgt die parallele Entwicklung bezüglich der erzeugenden Ordnungscurven. In § 8 endlich wird der eigentliche algebraische Kern der durchgeführten Betrachtungen herausgeschält. Die erledigte Frage erscheint hierbei als sehr specieller Fall der anderen nach den Criterien für die Zerlegbarkeit ganzer Functionen mehrerer Variabler.

Noch zwei Bemerkungen seien gestattet, eine mehr materielle und eine zweite mehr formale. Unter verschiedenen Typen ähnlichen Charakters habe ich gerade den Fall der R_4 vor anderen herausgewählt, weil bei ihm kein einziger Ausnahmefall von der Behandlung ausgeschlossen zu werden brauchte.

Sodann habe ich mit ausdrücklicher Absicht die erforderlichen Invarianten-Rechnungen mit Ausschluss symbolischen Calcüls erledigt, da ich den leitenden Gedanken möglichst hervortreten zu sehen wünschte.

§ 1.

Die zur R_4 perspectivischen Classencurven.

Es soll eine R_4, die mittelst der Gleichungen

$$(1) \qquad \varrho x_i = \overset{4}{f_i}(\lambda) = a_{i0} + a_{i1}\lambda + \cdots + a_{i4}\lambda^4 \quad (i=1,2,3,4)$$

gegeben sei (wo die ϱx_i homogene Punktcoordinaten und die $f_i(\lambda)$ ganze Functionen*) vierten Grades in λ bedeuten) erzeugt werden als

---

Arbeit „Ueber Reducibilität von Gleichungen, insbesondere derer vom fünften Grade."

*) Soll die R_4 eine „*eigentliche*" sein d. h. weder zerfallen, noch in einer Ebene liegen, so haben die $\overset{4}{f_i}(\lambda)$ in (1) der doppelten Beschränkung zu unterliegen, weder linear abhängig zu sein, noch einen gemeinsamen Factor in λ zu besitzen. Mit der ersteren Forderung ist dann zugleich auch die andere erfüllt, dass die R_4 nicht in einen doppelt zählenden Kegelschnitt resp. eine vierfach zählende Gerade

Ort der Punkte, in denen sich die Schmiegungsebenen dreier, projectivisch auf einander bezogenen rationalen Classencurven treffen. Diese Schmiegungsebenen seien dargestellt durch resp.:

$$(2)\quad \begin{cases} \sigma u_i = \varphi_i(\overset{\nu_1}{\mu}) = \alpha_{i0} + \alpha_{i1}\mu + \cdots + \alpha_{i\nu_1}\mu^{\nu_1}, \\ \sigma u_i = \psi_i(\overset{\nu_2}{\mu}) = \beta_{i0} + \beta_{i1}\mu + \cdots + \beta_{i\nu_2}\mu^{\nu_2}, \\ \sigma u_i = \chi_i(\overset{\nu_3}{\mu}) = \gamma_{i0} + \gamma_{i1}\mu + \cdots + \gamma_{i\nu_3}\mu^{\nu_3}, \end{cases}$$

und die Curven bezeichnet mit P_{ν_1}, P_{ν_2}, P_{ν_3}, wo die Grade ν_1, ν_2, ν_3 nur der Ungleichung*) zu genügen haben:

$$(3)\qquad \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 \geqq 4.$$

Irgend eine der Classencurven (2), z. B. P_{ν_1} ist durch die Eigenschaft charakterisirt, zur R_4 *„perspectivisch"* zu liegen, d. h. so, dass die Schmiegungsebenen von P_{ν_1} den Punkten der R_4 projectivisch entsprechen und zugleich jeder dieser Punkte auf der ihm zugeordneten Ebene liegt.

Die projectivische Verwandtschaft zwischen den Punkten der R_4 und den „Ebenen" der P_{ν_1} ist einfach darstellbar durch

$$(4)\qquad \lambda - \mu = 0,$$

da vermöge einer geeigneten linearen Umformung des Parameters μ eine beliebige, in λ, μ bilineare Form in die Gestalt $\lambda - \mu$ gebracht werden kann. Damit dann die R_4 zu den Curven (2) perspectivisch liegt, ist die Erfüllung der folgenden Identitäten nothwendig und hinreichend:

$$(5)\quad \begin{cases} f_1(\overset{4}{\lambda})\varphi_1(\overset{\nu_1}{\mu}) + f_2(\overset{4}{\lambda})\varphi_2(\overset{\nu_1}{\mu}) + f_3(\overset{4}{\lambda})\varphi_3(\overset{\nu_1}{\mu}) + f_4(\overset{4}{\lambda})\varphi_4(\overset{\nu_1}{\mu}) \equiv (\lambda-\mu)\Phi(\overset{3,\nu_1-1}{\lambda,\mu}), \\ f_1(\overset{4}{\lambda})\psi_1(\overset{\nu_2}{\mu}) + f_2(\overset{4}{\lambda})\psi_2(\overset{\nu_2}{\mu}) + f_3(\overset{4}{\lambda})\psi_3(\overset{\nu_2}{\mu}) + f_4(\overset{4}{\lambda})\psi_4(\overset{\nu_2}{\mu}) \equiv (\lambda-\mu)\Psi(\overset{3,\nu_2-1}{\lambda,\mu}), \\ f_1(\overset{4}{\lambda})\chi_1(\overset{\nu_3}{\mu}) + f_2(\overset{4}{\lambda})\chi_2(\overset{\nu_3}{\mu}) + f_3(\overset{4}{\lambda})\chi_3(\overset{\nu_3}{\mu}) + f_4(\overset{4}{\lambda})\chi_4(\overset{\nu_3}{\mu}) \equiv (\lambda-\mu)\mathrm{X}(\overset{3,\nu_3-1}{\lambda,\mu}) \end{cases}$$

wo unter Φ, Ψ, X unbekannte ganze Functionen in λ, μ von den bezeichneten Graden zu verstehen sind.

Setzt man nach dem Vorgang von H. Brill (l. c.) linker Hand von (5) $\lambda = \mu$, so erhält man in λ identisch verschwindende ganze Functionen vom resp. Grade $4 + \nu_i$ $(i = 1, 2, 3)$, mithin $4 + \nu_i + 1$ Gleichungen, die in den $4(\nu_i + 1)$ homogenen unbekannten Coefficienten

---

ausarten darf, das heisst, dass die $f_i(\overset{4}{\lambda})$ nicht die Formen $f_i(\overset{2}{\lambda'})$, $f_i(\overset{1}{\lambda'})$ annehmen dürfen, wo λ' eine rationale Function zweiten resp. vierten Grades bedeutet.

Nur eigentliche R_4 werden im Folgenden berücksichtigt.

*) Für $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 > 4$ erzeugt man ausser der R_4 selbst noch $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 - 4$ Gerade d. s. Tangenten der R_4. Die Argumente der letzteren sind Wurzeln einer Form, die sich unmittelbar als Factor abspaltet, wenn man die $f_i(\lambda)$ aus den Gleichungen (5) (für $\lambda = \mu$) berechnet.

der $\varphi(\mu)$ (resp. $\psi(\mu)$, $\chi(\mu)$) linear sind. Die Letzteren sind also bis auf

$$(6) \qquad 4(\nu_i+1)-(4+\nu_i+1)=3\nu_i-1$$

unter ihnen, die willkürlich bleiben, bestimmt*) und hängen von den Coefficienten der $f_i(\lambda)$ rational ab.

Oder, wie wir uns ausdrücken wollen:

„*Die Coefficienten der ganzen Functionen $\varphi_i(\mu)$, die eine zur R_4 perspectivisch liegende rationale Curve P_ν von der Classe ν darstellen, bilden noch eine $\infty^{3\nu-2}$ lineare***) *Schaar.*“

Speciell für die niedrigsten Zahlen $\nu=1, 2$ kommt $3\nu-2=1, 4$.

Nehmen wir jetzt die drei Classenzahlen ν_1, ν_2, ν_3 in (2) so niedrig als möglich, sodass also ihre Summe den Grad 4 der R_4 nicht übersteigt, so bleibt nur die *eine* Anordnung:

$$(7) \qquad \nu_1=\nu_2=1, \quad \nu_3=2.$$

Wir denken uns bereits irgend drei, diesen Anzahlen (7) entsprechende Functionensysteme $\varphi(\overset{1}{\mu})$, $\psi(\overset{1}{\mu})$, $\chi(\overset{2}{\mu})$ gefunden. Dann wollen wir nachweisen, wie wir aus ihnen ohne Weiteres *sämmtliche*, für ein beliebig gegebenes ν existirende P_ν:

$$(8) \qquad \sigma u_i=\omega_i(\overset{\nu}{\mu})$$

dadurch gewinnen, dass wir die $\omega_i(\mu)$ aus den $\varphi_i(\overset{1}{\mu})$, $\psi_i(\overset{1}{\mu})$, $\chi_i(\overset{2}{\mu})$ linear und homogen zusammensetzen mittelst Coefficienten, die selbst ganze Functionen von μ sind.

Es genügen nämlich auch die $\omega_i(\mu)$ einer Identität von der Form (5):

$$(5') \quad f_1(\overset{4}{\lambda})\,\omega_1(\overset{\nu}{\mu})+f_2(\overset{4}{\lambda})\,\omega_2(\overset{\nu}{\mu})+f_3(\overset{4}{\lambda})\,\omega_3(\overset{\nu}{\mu})+f_4(\overset{4}{\lambda})\,\omega_4(\overset{\nu}{\mu})\equiv(\lambda-\mu)\,\Omega(\overset{3}{\lambda},\overset{\nu-1}{\mu}).$$

Macht man auf den linken Seiten von (5) und (5') $\lambda=\mu$, und eliminirt die $f_i(\mu)$, so verschwindet die Determinante der $\varphi(\mu)$, $\psi(\mu)$, $\chi(\mu)$, $\omega(\mu)$. Mithin sind die $\omega_i(\mu)$ lineare, homogene Functionen der $\varphi_i(\mu)$, $\psi_i(\mu)$, $\chi_i(\mu)$:

$$(9) \qquad \tau\,\omega_i(\overset{\nu}{\mu})=\alpha(\mu)\,\varphi_i(\overset{1}{\mu})+\beta(\mu)\,\psi_i(\overset{1}{\mu})+\gamma(\mu)\,\chi_i(\overset{2}{\mu}).$$

Hier hat man für die $\alpha(\mu)$, $\beta(\mu)$, $\gamma(\mu)$ solche, im Uebrigen willkürliche, ganze Functionen von μ einzusetzen, dass die rechten Seiten von (9) den Grad ν in μ erreichen, etwa abgesehen von einem, ihnen allen gemeinsamen Factor $\tau(\mu)$ (der dann eine Erhöhung des Grades zur Folge hätte.) Es lässt sich aber zeigen, dass die letztere Möglichkeit

---

*) Symmetrischer stellt man natürlich sämmtliche Coefficienten als lineare, homogene Functionen von $3\nu_i-1$ variablen Parametern dar.

**) Es sei erlaubt, diesen Ausdruck auch auf die Curven P_ν selbst zu übertragen, was, zum mindesten bei räumlichen Curven, kein Missverständniss veranlassen dürfte.

immer vermieden werden kann, das heisst, dass ein solcher Factor $\tau(\mu)$ stets in den $\alpha(\mu)$, $\beta(\mu)$, $\gamma(\mu)$ *einzeln* enthalten sein muss, (und folglich für die homogenen $\omega_i(\mu)$ irrelevant wird).

Sei $\mu - \mu'$ irgend ein Linearfactor von $\tau(\mu)$, so finden die vier Beziehungen statt:

$$\alpha(\mu')\varphi_i(\mu') + \beta(\mu')\psi_i(\mu') + \gamma(\mu')\chi_i(\mu') = 0 \quad (i=1,2,3,4) \tag{10}$$

die entweder zur Folge haben, dass die $\alpha(\mu')$, $\beta(\mu')$, $\gamma(\mu')$ einzeln verschwinden, oder aber sämmtliche dreireihige Determinanten der $\varphi_i(\mu')$, $\psi_i(\mu')$, $\chi_i(\mu')$.

Die letztere Eventualität ist ausgeschlossen, denn diese dreireihigen Determinanten sind mit Rücksicht auf (5) den $f_i(\mu')$ (bis auf einen constanten Factor) proportional: die $f_i(\mu')$ können aber nicht zugleich verschwinden, da sonst entgegen der Voraussetzung über die $f_i(\lambda)$, dieselben einen Factor $\lambda - \mu'$ gemein hätten.

Mithin enthalten die $\alpha(\mu)$, $\beta(\mu)$, $\gamma(\mu)$ jede den Factor $\lambda - \mu'$, und in gleicher Weise den ganzen Factor $\tau(\mu)$. Dieser Beweis*) bleibt auch gültig für die extremen Fälle $\nu = 2, 1$; nur hat man bei $\nu = 1$ den Coefficienten $\gamma(\mu)$ gleich Null zu nehmen.

Somit ist das Resultat erwiesen:

„*Ist ν irgend eine der Zahlen 1, 2, 3, . . ., so sind sämmtliche, zur R_4 perspectivische Classencurven P_ν geliefert durch die Formel:*

$$\sigma u_i = \overset{\nu}{\omega_i}(\mu) = \overset{\nu-1}{\alpha}(\mu)\overset{1}{\varphi_i}(\mu) + \overset{\nu-1}{\beta}(\mu)\overset{1}{\psi_i}(\mu) + \overset{\nu-2}{\gamma}(\mu)\overset{2}{\chi_i}(\mu) \tag{11}$$

wo die $\overset{1}{\varphi_i}(\mu)$, $\overset{1}{\psi_i}(\mu)$, $\overset{2}{\chi_i}(\mu)$ irgend drei Systeme ganzer Functionen sind, die (für $\nu_1 = \nu_2 = 1$, $\nu_3 = 2$) die Identitäten (5) *befriedigen, dagegen die $\alpha(\mu)$, $\beta(\mu)$, $\gamma(\mu)$ willkürliche ganze Functionen (zu den angegebenen Graden) bedeuten.*"

Die Darstellung (11) möge dazu dienen, die Mannigfaltigkeit der erzeugenden Classencurven P_ν, für die in (6) erst eine untere Grenze ermittelt war, vollständig, d. h. auch *für alle R_4 specieller Natur* zu bestimmen.

Die ganzen Functionen $\overset{\nu-1}{\alpha}(\mu)$, $\overset{\nu-1}{\beta}(\mu)$, $\overset{\nu-2}{\gamma}(\mu)$ führen im Ganzen

$$(\nu-1+1) + (\nu-1+1) + (\nu-2+1) = 3\nu - 1 \tag{12}$$

willkürliche homogene Constanten mit sich.

Somit liefert dieselbe Zahl $3\nu - 2$ zugleich die untere, wie die obere Grenze für die Mannigfaltigkeit der P_ν, ergiebt also diese Mannigfaltigkeit, wie auch die $f_i(\lambda)$ in (1) beschaffen sein mögen, wenn sie nur überhaupt eine eigentliche R_4 repräsentiren.

---

*) Der Beweis ist übrigens wesentlich an die gemachte Voraussetzung gebunden, dass die Summe $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3$ nicht grösser als 4 sein sollte.

Dies gilt auch für den Fall $\nu = 1$; denn gäbe es drei linear unabhängige Functionensysteme $\overset{1}{\varphi_i}(\mu)$, $\overset{1}{\psi_i}(\mu)$, $\overset{1}{\chi_i}(\mu)$, so würden diese nach (5) eine R_3 erzeugen können.

Wir haben daher:

„*Die Mannigfaltigkeit der zu irgend einer R_4 perspectivischen Curven P_ν von der Classe ν ist in* a l l e n *Fällen eine* $(3\nu - 2)$*-fach lineare*".

Demnach bleibt uns nur noch übrig, die Curven P_1 und P_2 in einfachster Weise aufzustellen.

Anstatt aber zu dem Zwecke 6 resp. 7 lineare Gleichungen mit 8 resp. 12 homogenen Unbekannten aufzulösen (wie dies die Erörterung auf pag. 449 fordern würde), werden wir erkennen, wie wir die gewünschten Formen $\overset{1}{\varphi_i}(\mu)$, $\overset{2}{\chi_i}(\mu)$, (abgesehen von rein elementaren Processen, wie des der Division), mit alleiniger Anwendung des Ueberschiebungsprocesses unmittelbar bekommen.

Einige Vorbemerkungen über die dabei zur Verwendung kommenden binären und ternären Formen stellen wir voran.

§ 2.

Binäre Hülfsformeln.

Zu Grunde legen wir die Gordan'sche*) Grundform

$$(13) \qquad F(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \mu) = |f_i(\lambda), f_i(\lambda_1), f_i(\lambda_2), f_i(\mu)|$$

d. i. die Determinante der $f_i(\lambda), \dots f_i(\mu)$, deren Verschwinden die Bedingung angiebt, unter welcher irgend vier Punkte $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \mu$ der R_4:

$$(1) \qquad \varrho x_i = \overset{4}{f_i}(\lambda)$$

in einer Ebene liegen.

Um diese Bedingung selbst in reiner Form zu erhalten, haben wir die Form F von einem fremden Factor, dem Differenzenproduct der $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \mu$ durch Division zu befreien. So kommt die quadrilineare Form:

$$(14) \qquad \frac{F(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \mu)}{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda-\mu)(\lambda_1-\mu)(\lambda_2-\mu)}$$
$$= \delta_0 s_0 + \delta_1 s_1 + \delta_2 s_2 + \delta_3 s_3 + \delta_4 s_4 \equiv \delta_s = 0$$

wo die $\frac{s_i}{s_0}$ $(i=1,2,3,4)$ die elementaren symmetrischen Functionen der

*) cf. Gordan, Ueber Combinanten. Math. Ann. 5.

Die in den §§ 2, 3 aufgeführten Formeln gehören der Geometrie auf der Curve an. Wegen der, übrigens einfachen, Beweise vgl. des Verfassers „Apolarität und rationale Raumcurven" Tübingen, 1883. § 24.

λ, λ_1, λ_2, μ bedeuten, und die δ den aus der Matrix der Coefficienten von (1) zu bildenden Determinanten proportional sind.

Für $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \mu$ geht (14) über in:

$$\delta_{\lambda^4} = 0 \tag{15}$$

d. i. die Gleichung der vier Hyperosculationspunkte der R_4. Die Form δ_{λ^4} ist die einfachste binäre Combinante der $f_i(\lambda)$, die Determinante ihrer dritten Differentialquotienten*); vermöge Polarisation nach λ, λ_1, λ_2, μ gelangt man von δ_{λ^4} zu δ_s zurück:

$$\delta_s \equiv \delta_{\lambda\lambda_1\lambda_2\mu}\,. \tag{16}$$

Im Folgenden interessiren am meisten die Tripel (λ, λ_1, λ_2) solcher drei Punkte der R_4, die auf gerader Linie liegen. Für sie verschwindet δ_s hinsichtlich μ identisch.

Nun schreibt sich δ_s, wenn $\delta_{1\lambda^3}$, $\delta_{2\lambda^3}$ die ersten Differentialquotienten von δ_{λ^4} bedeuten, auch in der Form:

$$\delta_s \equiv \delta_{1\lambda\lambda_1\lambda_2}\mu + \delta_{2\lambda\lambda_1\lambda_2}. \tag{16}$$

Mithin genügen die gesuchten Tripel (λ, λ_1, λ_2) den beiden Gleichungen:

$$\delta_{1\lambda\lambda_1\lambda_2} = 0, \quad \delta_{2\lambda\lambda_1\lambda_2} = 0, \tag{17}$$

bilden also die zur „Involution" der ersten Polaren von δ_{λ^4}:

$$\delta_{1\lambda^3}\,\mu + \delta_{2\lambda^3} \tag{18}$$

„conjugirte" Involution**): sie sei bezeichnet durch:

$$\varepsilon_{1\lambda^3}\,\nu + \varepsilon_{2\lambda^3}\,. \tag{19}$$

Beide Involutionen besitzen die nämliche Functionaldeterminante, die Hesse'sche Form H von δ_{λ^4}.

---

*) Sie ist auch durch die vier Bedingungen $(\delta_{\lambda^4}, f_i(\lambda))^4 = 0$ definirbar, d. h. sie ist die zu den $f_i(\lambda)$ „conjugirte" Form.

**) Sei $\varepsilon_{1\lambda^3} = \varepsilon_0^{(1)}\lambda^3 - \varepsilon_1^{(1)}\lambda^2 + \varepsilon_2^{(1)}\lambda^1 - \varepsilon_3^{(1)}$, $\varepsilon_{2\lambda^3} = \varepsilon_0^{(2)}\lambda^3 - \varepsilon_1^{(2)}\lambda^2 + \varepsilon_2^{(2)}\lambda^1 - \varepsilon_3^{(2)}$, so ist die Involution (19) (wie aus den Gleichungen (17) sofort hervorgeht) völlig (und in allen Fällen) dadurch bestimmt, dass die Determinanten

$$\pi_{ik} = \begin{vmatrix} \varepsilon_i^{(1)} & \varepsilon_k^{(1)} \\ \varepsilon_i^{(2)} & \varepsilon_k^{(2)} \end{vmatrix} \quad \text{der Matrix} \quad \begin{vmatrix} \varepsilon_0^{(1)} & \varepsilon_1^{(1)} & \varepsilon_2^{(1)} & \varepsilon_3^{(1)} \\ \varepsilon_0^{(2)} & \varepsilon_1^{(2)} & \varepsilon_2^{(2)} & \varepsilon_3^{(2)} \end{vmatrix}$$

proportional sind den

$$p_{lm} = \begin{vmatrix} \delta_l & \delta_m \\ \delta_{l+1} & \delta_{m+1} \end{vmatrix} \quad \text{der Matrix} \quad \begin{vmatrix} \delta_0 & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \end{vmatrix},$$

wo die i, k, l, m die Zahlen 0, 1, 2, 3 in irgend einer cyklischen Folge sind.

Den Proportionalitätsfactor setzen wir im Folgenden einfach gleich Eins.

Führen wir in (19) statt des Parameters ν eine der drei Wurzeln λ_1 von $\varepsilon_{1\lambda^3}\nu + \varepsilon_{2\lambda^3} = 0$ als neuen Parameter ein $\left(\text{setzen also } -\nu = \frac{\varepsilon_{2\lambda_1^3}}{\varepsilon_{1\lambda_1^3}}\right)$, so geht

§ 3.

Ternäre Hülfsformeln.

Lässt man in Formel (14) λ gleich λ_1, und μ gleich λ_2 werden, und setzt

$$(20) \qquad \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_0}, \quad \lambda_1 \lambda_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_0},$$

so resultiren die Argumente der Doppelberührebenen der R_4:

$$(21) \qquad \delta_{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \equiv \delta_{\sigma^2} = 0$$

wo die links stehende Form in den homogenen σ quadratisch ist.

Wir führen in (21) Variable u ein, die zu den σ *contragredient*, d. h. mit ihnen durch die Relation:

$$(22) \qquad u_2 \sigma_2 + u_1 \sigma_1 + u_0 \sigma_0 = 0$$

verbunden sind; dann transformirt sich die Form (21) in die neue:

$$(23) \qquad \begin{vmatrix} \delta_0 & \delta_1 & \delta_2 & u_0 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & u_1 \\ \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 & u_2 \\ u_0 & u_1 & u_2 & 0 \end{vmatrix} \equiv u_{\Delta^2} \equiv \Sigma\Sigma\, u_i u_k \Delta_{ik} = 0.$$

§ 4.

Die Ebenenbüschel der Trisecanten der R_4.

Wir wenden uns jetzt zur Bildung der zur R_4 perspectivischen Classencurven P_1. Dies sind offenbar diejenigen Ebenenbüschel, deren Axen durch die Trisecanten der R_4 gebildet werden. Denn die erste der Gleichungen (5) wird für $\nu_1 = 1$ zu:

$$(24) \quad f_1(\overset{4}{\lambda})\varphi_1(\overset{1}{\mu}) + f_2(\overset{4}{\lambda})\varphi_2(\overset{1}{\mu}) + f_3(\overset{4}{\lambda})\varphi_3(\overset{1}{\mu}) + f_4(\overset{4}{\lambda})\varphi_4(\overset{1}{\mu}) \equiv (\lambda - \mu)\Phi(\overset{3}{\lambda}).$$

---

(19) über in (19') $\begin{vmatrix} \varepsilon_{1\lambda^3}, & \varepsilon_{2\lambda^3} \\ \varepsilon_{1\lambda_1^3}, & \varepsilon_{2\lambda_1^3} \end{vmatrix}$, d. i. eine Form, die unmittelbar nach den $\pi_{ik} = p_{lm}$ entwickelbar ist.

So lange die Discriminante D von (15) $\delta_{\lambda^4} = f$ von Null verschieden ist, lässt sich die Involution (19) auffassen als die der ersten Polaren einer anderen Form vierten Grades $f' = jf - iH$, wo j, i die bekannten Invarianten von f sind (cf. Clebsch, Binäre Formen § 61, „Apolarität" pag. 158).

Die Hesse'sche Form $H(f')$ von f' ist dann, bis auf den Factor D, gleich der von f und wir können somit setzen:

$$(19'') \qquad \frac{1}{\lambda - \lambda_1} \begin{vmatrix} \varepsilon_{1\lambda^3}, & \varepsilon_{2\lambda^3} \\ \varepsilon_{1\lambda_1^3}, & \varepsilon_{2\lambda_1^3} \end{vmatrix}_{(\lambda = \lambda_1)} = \frac{1}{D} H(f') = H(f).$$

Dies überträgt sich ohne Weiteres auf die Identität (31). Da diese aber auch für $D = 0$ (und die noch specielleren Ausnahmefälle) gültig bleibt, so wird man umgekehrt gerade sie als die *allgemeingültige* Darstellung der zu (16) conjugirten Involution ansehen.

Also schneidet die bewegliche Ebene irgend einer P_1 drei feste Punkte $(\lambda, \lambda_1, \lambda_2)$:

$$\Phi(\lambda^3) = 0 \tag{25}$$

aus, und diese Tripel sind genau die in (10) angegebenen.

In der That müssen ja die $\varphi_i(\mu)$, also auch $\Phi(\lambda)$, nach § 1 noch einen Parameter ν linear mit sich führen.

Wir leiten nun zuvörderst aus der Form*) F (13):

$$F(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \mu) = |f_i(\lambda), f_i(\lambda_1), f_i(\lambda_2), f_i(\mu)| \tag{13}$$

unmittelbar eine Identität vom Typus (5) her, in der die Variable μ noch bis zum *dritten* Grade ansteigt, und suchen dann diesen Grad mittelst abwechselnder Division und Ueberschiebung bis auf Eins *herabzudrücken.*

Dabei substituiren wir vor der Hand an Stelle der $f_i(\lambda)$, $f_i(\lambda_1)$ willkürliche Grössen x_i, y_i, und schreiben:

$$G(x_i, y_i, \lambda_2, \mu) = |x_i, y_i, f_i(\lambda_2), f_i(\mu)|. \tag{13'}$$

Diese, zuvor noch mit $\lambda_2 - \mu$ dividirte Form G fassen wir auf als eine, in λ_2 cubische, binäre Form, und bezeichnen sie in diesem Sinne mit:

$$\frac{1}{\lambda_2 - \mu} G(x_i, y_i, \lambda_2, \mu) \equiv Q_{\lambda_2^3}(\overset{1}{x_i}, \overset{1}{y_i}, \overset{3}{\mu}) = Q_{\lambda_2^3} \tag{26}$$

wo rechts die Grade bemerkt sind, zu denen die Grössen x_i, y_i, μ in den Coefficienten von $Q_{\lambda_2^3}$ vorkommen.

Ferner mögen unter λ_2, λ_2', λ_2'' die Wurzeln der Gleichung $Q_{\lambda_2^3} = 0$ verstanden werden; augenscheinlich sind dies die drei Punkte, welche

---

*) Anstatt näherer Auseinandersetzungen über die innere Natur der im Verlaufe des Textes vorgenommenen Divisions- und Ueberschiebungsprocesse citire ich eine Bemerkung, die H. Brill in einer Vorlesung vom Winter 1885/86 mit Beweis vorgetragen hat, (vgl. übrigens damit Study, l. c.), und die so lautet:

„Um die zu einem Systeme von vier ganzen Functionen $f_i(\overset{n}{\lambda})$ gehörenden binären, ternären, quaternären Combinanten zu erhalten, verfahre man derart, dass man zunächst aus der Gordan'schen Grundform $|f_i(\lambda), f_i(\lambda_1), f_i(\lambda_2), f_i(\mu)|$ eine geschlossene Reihe weiterer dadurch ableitet, dass man in jener successive eine, zwei, drei, Verticalreihen ersetzt durch quaternäre Variable x_i, y_i, z_i, und jede der so entstehenden Bildungen mit dem Differenzenproducte der je noch verbleibenden Argumente dividirt denkt.

Die so erhaltenen Formen bilden zusammen mit der Ausgangsform die Gesammtheit der „erzeugenden" Functionen für alle Co- und Invarianten der „Raumcurve" $\varrho x_i = f_i(\lambda)$. Man kann dieselben je durch die zugehörigen „Elementarcombinanten" ersetzen, welche je nur *eine* Reihe von binären Variabeln enthalten."

So erhält man *alle* zu der Curve in invarianter Beziehung stehenden Raumgebilde, während die aus der Gordan'schen Form $F(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \mu)$ ohne Einführung jener quaternären Variabeln x_i, y_i, z_i abgeleiteten Combinanten nur den der Geometrie *auf* der Raumcurve zugehörigen Bildungen entsprechen.

eine durch die drei Raumpunkte mit den Coordinaten x_i, y_i und den Punkt μ der Curve R_4 gelegte Ebene aus dieser noch ausschneidet.

Daher wird die Gleichung (14) $\delta_s = 0$ immer befriedigt, wenn an Stelle von $\mu, \lambda, \lambda_1, \lambda_2$ ein ganz beliebiger Werth μ nebst drei zugehörigen $\lambda_2, \lambda_2', \lambda_2''$ eingesetzt wird.

Es ist aber das Resultat der Substitution der drei letztgenannten Werthe in die Form $\delta_s = \delta_{\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \mu}$ nichts Anderes, als die dritte Ueberschiebung der beiden cubischen Formen $Q_{\lambda_2^3}$ und $\delta_{\lambda_2^3 \mu}$: also verschwindet folgende Gleichung in μ *identisch:*

$$(26) \qquad (Q_{\lambda_2^3}, \delta_{\lambda_2^3 \mu})^3 \equiv 0.$$

Bedeutet daher ω eine neue, willkürliche Grösse, so ist in der Form $(Q_{\lambda_2^3}, \delta_{\lambda_2^3 \omega})^3$ jedenfalls der Factor $\omega - \mu$ enthalten, in Zeichen:

$$(28) \qquad (Q_{\lambda_2^3}, \delta_{\lambda_2^3 \omega})^3 \equiv (\omega - \mu) R(\overset{1,}{x_i}, \overset{1,}{y_i}, \overset{2}{\mu}).$$

Nimmt man hier die willkürliche Grösse ω gleich λ_2 selbst, so geht $\delta_{\lambda_2^3 \omega}$ über in $\delta_{\lambda_2^4}$, und wir haben die Identität:

$$(29) \qquad (Q_{\lambda_2^3}, \delta_{\lambda_2^4})^3 \equiv (\lambda_2 - \mu) R(\overset{1,}{x_i}, \overset{1,}{y_i}, \overset{2}{\mu}).$$

Nun enthielt die Form $F(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \mu)$, vermöge ihrer Bildung als Determinante (13), auch die Factoren $\lambda_1 - \mu$, und $\lambda - \mu$ (sowie noch $\lambda_1 - \lambda$), und zwar unabhängig von dem Werthe von λ_2. Mithin gilt das Gleiche von der Form R in (29), sobald nur statt der x_i, y_i wieder die früheren $f_i(\lambda), f_i(\lambda_1)$ eingeführt werden, und es kommt successive:

$$(30) \qquad R(\overset{1}{x_i}, \overset{1}{f_i}(\overset{4}{\lambda_1}) \overset{2}{\mu}) \equiv (\lambda_1 - \mu) S(\overset{1}{x_i}, \overset{3}{\lambda_1}, \overset{1}{\mu}),$$

$$(31) \qquad S(\overset{1}{f_i}(\overset{4}{\lambda}), \overset{3}{\lambda_1}, \overset{1}{\mu}) \equiv (\lambda - \mu) T(\overset{3}{\lambda_1}, \overset{3}{\lambda}).$$

Diese letzte Identität (31) besitzt hinsichtlich der Variabeln λ, μ ganz die Natur der von uns gesuchten (24): auch tritt hier, wie dort ein veränderlicher Parameter in die $\varphi_i(\mu)$ ein, nur, dass er in (31) bis zum dritten, in (24) dagegen bloss bis zum ersten Grade ansteigt.

Es wird sich aber bald herausstellen, dass beide Parameter, λ_1 und ν, mit Leichtigkeit in einander übergeführt werden können, da sie durch die Relation (19):

$$(32) \qquad \varepsilon_{1\lambda_1^3} \nu + \varepsilon_{2\lambda_1^3} = 0$$

verknüpft sind.

Denn erstens ist die Bedeutung der Gleichung $T(\overset{3}{\lambda_1}, \overset{3}{\lambda}) = 0$, dieselbe, wie die von (25) $\Phi(\overset{3}{\lambda}) = 0$, oder (19) $\varepsilon_{1\lambda^3} \nu + \varepsilon_{2\lambda^3} = 0$; es sind die Argumente der von den Trisecanten der R_4 ausgeschnittenen Punktetripel der Curve.

Ferner verschwindet die linke, also auch die rechte Seite der Identität (31) für $\lambda = \lambda_1$ identisch, mithin ist bis auf einen gleich zu bestimmenden Factor C:

$$T(\overset{3}{\lambda}_1, \overset{3}{\lambda}) \equiv C \cdot \begin{vmatrix} \varepsilon_{1\lambda^3} & \varepsilon_{2\lambda^3} \\ \varepsilon_{1\lambda_1^3} & \varepsilon_{2\lambda_1^3} \end{vmatrix}. \tag{33}$$

Dieser Factor kann nur ein Zahlenfactor*) sein. Denn aus den Gleichungen (17) geht hervor, dass die Coefficienten der in (33) rechts figurirenden Determinante mit den Determinanten der Matrix:

$$\begin{vmatrix} \vartheta_0 & \vartheta_1 & \vartheta_2 & \vartheta_3 \\ \vartheta_1 & \vartheta_2 & \vartheta_3 & \vartheta_4 \end{vmatrix} \tag{34}$$

übereinstimmen. Aber auch die linke Seite S von (31) ist vom zweiten Grade in den ϑ_i, wie aus ihrer Ableitung folgt.

Demnach ist die Identität (31), (wie (24)) mit einem linearen Parameter ν, der durch (32) bestimmten rationalen Function dritten Grades von λ_1, behaftet.

Ziehen wir die Processe, die uns zur Identität (31) führten, in einen einzigen zusammen, so haben wir:

„*Man entwickle die Form* $\frac{1}{\lambda_2 - \mu} F(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \mu)$ *nach den* $f_i(\lambda)$, *wie folgt:*

$$\frac{1}{\lambda_2 - \mu} \left| f_i(\lambda), f_i(\lambda_1), f_i(\lambda_2), f_i(\mu) \right| \equiv \sum_1^4 {}^i f_i(\lambda)\, Q_{i\lambda_2^3}, \tag{35}$$

dann sind die zur R_4 *perspectivischen Ebenenbüschel* P_1 *dargestellt durch:*

$$\sigma u_i = \varphi_i(\overset{1}{\mu}) = \frac{(Q_{i\lambda_2^3}, \vartheta_{\lambda_2^4})^3}{(\lambda_2 - \mu)(\lambda_1 - \mu)} = \frac{\left(\frac{Q_{i\lambda_2^3}}{\lambda_1 - \mu}, \vartheta_{\lambda_2^4}\right)^3}{\lambda_2 - \mu}, \tag{36}$$

oder auch, da man die rechts stehenden Nennerfactoren in den Factor σ *eingehen lassen kann:*

$$\sigma u_i = \varphi_i(\overset{1}{\mu}) = (Q_{i\lambda_2^3}, \vartheta_{\lambda_2^4})^3 = \varphi_i(\overset{1}{\mu}, \overset{3}{\lambda}_1) = \varphi_i(\overset{1}{\mu}, \overset{1}{\nu}). \tag{37}$$

Diese Darstellung der $\varphi_i(\overset{1}{\mu})$ würde nur dann ihre Gültigkeit verlieren, wenn die Determinanten der Matrix (34) sämmtlich, mithin

---

*) Dieser Factor kann mit Rücksicht auf die längere Anmerkung auf pag. 454 gleich Eins gesetzt werden. Bezeichnen für den Augenblick $\alpha_{\lambda^2}, \beta_{\lambda^2}, \gamma_{\lambda^2}$ die zweiten Differentialquotienten der dort erwähnten Form $f' = jf - iH$ (wo $f = \vartheta_{\lambda^4}$), so kann man den Ausdruck (33), so lange die Discriminante D von f nicht verschwindet, die Gestalt einer *directen* Polarenbildung von f geben; wie leicht zu sehen, wird er gleich $\begin{vmatrix} \alpha_{\lambda\lambda_1}, & \beta_{\lambda\lambda_1} \\ \beta_{\lambda\lambda_1}, & \gamma_{\lambda\lambda_1} \end{vmatrix} (\lambda - \lambda_1)$.

beide Seiten der Identität (31), unabhängig von λ und λ_1 verschwinden würden.

Aber dann wäre auch die R_4 keine eigentliche mehr. Denn entweder verhalten sich in diesem Falle die δ_i wie die Potenzen einer einzigen Grösse α:

$$\delta_4 : \delta_3 : \delta_2 : \delta_1 : \delta_0 = 1 : \alpha : \alpha^2 : \alpha^3 : \alpha^4, \tag{38}$$

oder sie verschwinden sämmtlich.

Träte das Erste ein, so wäre δ_{λ^4} ein Biquadrat:

$$\delta_{\lambda^4} = (\lambda + \alpha)^4 \tag{39}$$

und die Gleichung $\delta_5 = 0$ müsste bei ganz beliebigen $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ durch die Werthe $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \mu = -\alpha$ erfüllt werden, oder, was dasselbe ist, die $f_i(\lambda)$ den Factor $\lambda + \alpha$ gemein haben.

Verschwänden aber alle δ_i, so wären die $f_i(\lambda)$ nicht mehr linear unabhängig.

Beide Folgerungen verstossen somit gegen die Definition einer eigentlichen R_4.

§ 5.

Die erzeugenden Kegel zweiter Ordnung. Erste Darstellung.

Die Tangentenebenen eines zur R_4 perspectivischen Kegels zweiter Ordnung waren von der Form:

$$\sigma u_i = \chi_i(\overset{2}{\mu}), \tag{40}$$

wo die χ die Identität zu erfüllen haben:

$$\chi_1(\overset{2}{\mu})\, f_1(\overset{4}{\lambda}) + \chi_2(\overset{2}{\mu})\, f_2(\overset{4}{\lambda}) + \chi_3(\overset{2}{\mu})\, f_3(\overset{4}{\lambda}) + \chi_4(\overset{2}{\mu})\, f_4(\overset{4}{\lambda}) \equiv (\lambda - \mu)\, X(\overset{3}{\lambda}, \overset{1}{\mu}) \tag{41}$$

und daher noch fünf homogene lineare Parameter mit sich führen müssen.

Zu solchen Identitäten (41) gelangt man unmittelbar von der Grundform (13) $F(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \mu)$ aus, nachdem man zuvor den Factor $(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \mu)(\lambda_2 - \mu)$ herausgehoben hat.

Wir setzen, wie in (20):

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_0}, \quad \lambda_1 \lambda_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_0}, \tag{20}$$

ferner:

$$\frac{|f_i(\lambda), f_i(\lambda_1), f_i(\lambda_2), f_i(\mu)|}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \mu)(\lambda_2 - \mu)} \equiv \sum_{i=0}^{i=2} \sum_{k=0}^{k=2} Q_{ik}[\overset{1}{f_i}(\lambda), \overset{2}{\mu}]\, \sigma_i \sigma_k \equiv Q_{\sigma^2}, \tag{42}$$

dann können wir schreiben:

$$Q_{ik}[\overset{1}{f_i}(\lambda), \overset{2}{\mu}] \equiv (\lambda - \mu)\, q_{ik}(\overset{3}{\lambda}, \overset{1}{\mu}), \tag{43}$$

denn die Form Q_{σ^2} ist unabhängig von den σ durch $\lambda - \mu$ theilbar. Multipliciren wir also die letzteren sechs Identitäten mit willkürlichen Constanten r_{ik} und addiren, so ist die Identität:

$$(44) \qquad \sum\sum Q_{ik}\,[\overset{1}{f_i}(\lambda),\, \overset{2}{\mu}]\, r_{ik} \equiv (\lambda - \mu) \sum\sum q_{ik}(\overset{3}{\lambda},\, \overset{1}{\mu})\, r_{ik}$$

genau eine solche vom Typus (41), nur dass in (44) *sechs* homogene Parameter (statt der erforderlichen fünf) auftreten. Soll demnach die Identität (44) die *allgemeinste* ihrer Art sein, so muss zwischen den Formen Q_{ik} eine, aber auch nur eine lineare Identität herrschen.

Diese eine (thatsächlich nur allein existirende) Identität stellen wir nunmehr auf. Sei dieselbe:

$$(45) \qquad \sum\sum Q_{ik}\,\alpha_{ik} \equiv 0,$$

(wo die α unbekannte Functionen der δ_i sind), so ist auch:

$$(46) \qquad \sum\sum q_{ik}\,\alpha_{ik} \equiv 0$$

und umgekehrt. Wir werden lieber die letztere Identität zur Bestimmung der α verwenden, da die Bildung der q_{ik} leicht auf directem Wege ermöglicht wird.

Denn diese Grössen sind offenbar die Coefficienten der $\sigma_i\sigma_k$ in dem Producte von

$$(47) \qquad (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2\sigma_0 - \lambda\sigma_1 + \sigma_2$$

in den (nach den σ_i geordneten) Ausdruck δ_5 (14):

$$(48) \qquad (\lambda^2\sigma_0 - \lambda\sigma_1 + \sigma_2)$$
$$\times\Big[\sigma_0\{\delta_0 + \delta_1(\lambda+\mu) + \delta_2\lambda\mu\} + \sigma_1\{\delta_1 + \delta_2(\lambda+\mu) + \delta_3\lambda\mu\}$$
$$+ \sigma_2\{\delta_2 + \delta_3(\lambda+\mu) + \delta_4\lambda\mu\}\Big].$$

Die daraus fliessenden Werthe der $q_{ik}(\overset{3}{\lambda},\, \overset{1}{\mu})$ sind durch folgende Tabelle verdeutlicht:

	λ^3	$\lambda^3\mu$	λ^2	$\lambda^2\mu$	λ	$\lambda\mu$	1	μ
q_{00}	δ_1	δ_2	δ_0	δ_1	0	0	0	0
$\frac{1}{2}q_{01}$	δ_2	δ_3	0	0	$-\delta_0$	$-\delta_1$	0	0
$\frac{1}{2}q_{02}$	δ_3	δ_4	δ_2	δ_3	δ_1	δ_2	δ_0	δ_1
q_{11}	0	0	$-\delta_2$	$-\delta_3$	$-\delta_1$	$-\delta_2$	0	0
$\frac{1}{2}q_{12}$	0	0	$-\delta_3$	$-\delta_4$	0	0	δ_1	δ_2
q_{22}	0	0	0	0	δ_3	δ_4	δ_2	δ_3

sodass z. B. q_{00}, der Coefficient von σ_0^2, lautet:

$$q_{00} = \lambda^3(\delta_1 + \delta_2\mu) + \lambda^2(\delta_0 + \delta_1\mu) + \lambda \cdot 0 + 1 \cdot 0.$$

Somit haben die sechs homogenen α_{ik} folgende vier Paare von linearen Gleichungen*) zu befriedigen:

$$\begin{cases} \alpha_{00}\delta_1 + \alpha_{01}\delta_2 + \alpha_{02}\delta_3 = 0, \\ \alpha_{00}\delta_2 + \alpha_{01}\delta_3 + \alpha_{02}\delta_4 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_{00}\delta_0 + (\alpha_{02} - \alpha_{11})\delta_2 - \alpha_{12}\delta_3 = 0, \\ \alpha_{00}\delta_1 + (\alpha_{02} - \alpha_{11})\delta_3 - \alpha_{12}\delta_4 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\alpha_{01}\delta_0 + (\alpha_{02} - \alpha_{11})\delta_1 + \alpha_{22}\delta_3 = 0, \\ -\alpha_{01}\delta_1 + (\alpha_{02} - \alpha_{11})\delta_2 + \alpha_{22}\delta_4 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_{02}\delta_0 + \alpha_{12}\delta_1 + \alpha_{22}\delta_2 = 0, \\ \alpha_{02}\delta_1 + \alpha_{12}\delta_2 + \alpha_{22}\delta_3 = 0. \end{cases}$$

Bedienen wir uns für die Determinanten der Matrix:

$$(34) \qquad \begin{vmatrix} \delta_0 & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \end{vmatrix}$$

der Bezeichnung:

$$(49) \qquad \begin{vmatrix} \delta_i & \delta_k \\ \delta_{i+1} & \delta_{k+1} \end{vmatrix} = p_{ik},$$

so sind die obigen vier Gleichungspaare successive den Proportionen äquivalent:

$$(50) \qquad \begin{cases} \alpha_{00} : \alpha_{01} : \alpha_{02} = p_{23} : p_{31} : p_{12}, \\ \alpha_{00} : \alpha_{12} : \alpha_{02} - \alpha_{11} = p_{23} : p_{20} : p_{03}, \\ \alpha_{01} : \alpha_{02} - \alpha_{11} : \alpha_{22} = p_{31} : p_{03} : p_{01}, \\ \alpha_{02} : \alpha_{12} : \alpha_{22} = p_{12} : p_{20} : p_{01}, \end{cases}$$

welche sich in die einzige zusammenziehen lassen:

$$(50') \qquad \alpha_{00} : \alpha_{01} : \alpha_{02} : \alpha_{11} : \alpha_{12} : \alpha_{22} = p_{23} : p_{31} : p_{12} : p_{03} + p_{12} : p_{20} : p_{01}.$$

Entwickelt man andererseits die Form u_Δ (23) nach Potenzen und Producten der u_i, so kommt:

$$(23) \qquad u_\Delta \equiv u_0^2 p_{23} + 2u_0u_1p_{31} + 2u_0u_2p_{12} + u_1^2(p_{03} + p_{12}) + 2u_1u_2p_{20} + u_{22}p_{01}.$$

*) Diese Gleichungen sind keine anderen, als die bekannten, denen die „Liniencoordinaten" p_{ik} genügen, und die man aus der Entwicklung der ersten Minoren der Determinante

$$\begin{vmatrix} \delta_0 & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \\ \delta_0 & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \end{vmatrix}$$

erhält.

Mithin sind die α_{ik} in (50′) den Δ_{ik} in (23) proportional, und die Einsetzung dieser Werthe in die Identität (46) ergiebt das Verschwinden der zweiten Ueberschiebung der Formen Q_{σ^2} und $u_{\mathcal{A}^2}$, oder in Zeichen:

$$(46') \qquad \sum\sum q_{ik}\alpha_{ik} \equiv (Q_{\sigma^2}, u_{\mathcal{A}^2})^2 \equiv \sum\sum Q_{ik}\Delta_{ik} = 0.$$

Dies ist die gesuchte lineare Identität*), welche zwischen den Q_{ik} statt hat. Und eine zweite solche kann nicht existiren: denn sonst müssten die Verhältnisse der α_{ik} unbestimmt werden, also nach (50′) die p_{ik} sämmtlich verschwinden, was, wie am Ende von § 4 dargelegt wurde, bei eigentlichen R_4 unstatthaft ist.

Das Endresultat lässt zich so zusammenfassen:

„Setzt man $\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_0}$, $\lambda_1\lambda_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_0}$, *und entwickelt die mit* $(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \mu)(\lambda_2 - \mu)$ *dividirte Grundform* $F(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \mu)$ *nach Potenzen und Producten der* σ*:*

$$(42) \qquad \frac{F(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \mu)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \mu)(\lambda_2 - \mu)} \equiv \sum\sum Q_{ik}\sigma_i\sigma_k \equiv Q_{\sigma^2},$$

bildet sodann die zweite Ueberschiebung (bilineare Invariante) von Q_{σ^2} *über eine, mit ganz willkürlichen Coefficienten* r_{ik} *behaftete Form* u_{r^2}

$$(51) \qquad (Q_{\sigma^2}, u_{r^2})^2 \equiv (\overset{1}{f_i}(\lambda), \overset{2}{\mu}) \equiv \sum_{i=1}^{i=4} f_i(\lambda)\,\chi_i(\overset{2}{\mu})$$

*) Der Grund dieser Identität wird durchsichtiger (und man gelangt zugleich zu einem zweiten Beweise für ihre Existenz), wenn man sich einer nahe liegenden geometrischen Interpretation bedient. Man fasse die Grössen (20)

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_0} = \lambda_1 + \lambda_2, \qquad \frac{\sigma_2}{\sigma_0} = \lambda_1\lambda_2$$

als Coordinaten eines Punktes (σ) in der Ebene auf. Ebenso repräsentiren die

$$\frac{\tau_1}{\tau_0} = \lambda + \mu, \qquad \frac{\tau_2}{\tau_0} = \lambda\mu$$

einen zweiten Punkt (τ). Die Form (16) $\delta_s = \delta_{\lambda\lambda_1\lambda_2\mu}$ geht rückwärts aus (21) $\delta_{\sigma^2} = \delta_{\lambda_1^2\lambda_2^2}$ durch Polarisation nach den τ hervor, d. h. „Bei festgehaltenen λ, μ stellt die Gleichung $\delta_s \equiv \delta_{\sigma\tau} = 0$ die Polare des Punktes (τ) in Bezug auf den Kegelschnitt (21) $\delta_\sigma{}^2 = 0$ dar, und $\lambda^2\sigma_0 - \lambda\sigma_1 + \sigma_2 = 0$ die Gleichung einer der beiden Tangenten, die vom Punkte (τ) an den Kegelschnitt $(\lambda_1 - \lambda_2)^2 \equiv \sigma_1{}^2 - 4\sigma_0\sigma_2 = 0$ gelegt werden können."

Somit ist das Linienpaar $\lambda^2\sigma_0 - \lambda\sigma_1 + \sigma_2 = 0$, $\delta_{\sigma\tau} = 0$ conjugirt bez. des Kegelschnitts (21) $\delta_{\sigma^2} = 0$, es verschwindet demnach die bilineare Invariante des Productes jener beiden:

$$\sum\sum q_{ik}\sigma_i\sigma_k \equiv (\lambda^2\sigma_0 - \lambda\sigma_1 + \sigma_2)\,\delta_{\sigma\tau}$$

und der Classenkegelschnittsform (23) $u_{\mathcal{A}^2}$ von (21). Dies ist aber die linke Seite der Identität (46′).

und ordne dieselbe nach den $f_i(\lambda)$ an, so stellen die Gleichungen:

(52) $$\sigma u_i = \chi_i(\overset{2}{\mu})$$

mit Rücksicht auf die Identität (46′):

(46′) $$(Q_{\sigma^2}, u_{\mathcal{A}^2})^2 \equiv 0$$

die Tangentenebenen der vierfach linearen Schaar von erzeugenden, zur R_4 perspectivisch liegenden Kegel zweiter Ordnung dar."

§ 6.

Die erzeugenden Kegel zweiter Ordnung. Zweite und dritte Darstellung.

Wir wollen unsere Ergebnisse dadurch ergänzen, dass wir nachweisen, wie wir zu den Gleichungen für die erzeugenden Kegel zweiter Ordnung noch auf zwei weitere Weisen gelangen können.

Diese erfreuen sich sogar des Vorzugs weit grösserer Kürze, als die im letzten Paragraphen mitgetheilte Methode: trotzdem haben wir jene nicht unterdrücken wollen, da ihr die Fähigkeit zukommt, sich auf entsprechende höhere Fälle ausdehnen zu lassen.

Erinnern wir uns der in § 4 hergeleiteten Identität (29):

(29) $$(Q_{\lambda_2^3}, \delta_{\lambda_2^3})^3 \equiv (\lambda_2' - \mu)\; R\left\{\overset{1}{f_i}(\lambda), \overset{1}{f_i}(\lambda_1), \overset{2}{\mu}\right\},$$

wo wir von der, rechter Hand stehenden Form R wiederum den Factor $\lambda - \mu$, und zwar unabhängig vom Werthe des λ_1, abspalten konnten. Entwickeln wir demnach die Form R nach Potenzen von λ_1, wie folgt:

(53) $$R \equiv \lambda_1^4 Q_4' + \lambda_1^3 Q_3' + \lambda_1^2 Q_2' + \lambda_1 Q_1' + Q_0' \equiv R_{\lambda_1^4},$$

so genügt jeder der Coefficienten Q' einer Identität von der Art:

(54) $$Q_r'\left\{\overset{1}{f_i}(\lambda), \overset{2}{\mu}\right\} \equiv (\lambda - \mu)\,(\overset{3}{\lambda}, \overset{1}{\mu})_r \quad (r = 0, 1, \ldots, 4).$$

Also auch eine beliebige lineare Combination der Q_r'. Wie in § 5 beweist man, dass eine lineare Identität zwischen den Q_r' nicht herrschen kann, es müssten denn sämmtliche p_{ik} (49) verschwinden, was für eigentliche R_4 nicht eintreten konnte (cf. den Schluss von § 4). Damit ist das Resultat erhärtet:

„Fasst man die Bildung:

(26′) $$\frac{1}{\lambda_2 - \mu} \mid x_i, f_i(\lambda_1), f_i(\lambda_2), f_i(\mu) \mid \equiv Q_{\lambda_2^3}\left\{\overset{1}{x_i}, \overset{1}{f_i}(\lambda_1)\, \overset{3}{\mu}\right\} \equiv Q_{\lambda_2^3}$$

als binäre (cubische) Form in λ_2 auf, desgleichen die aus ihr abgeleitete:

(29′) $$\frac{1}{\lambda_2 - \mu}\,(Q_{\lambda_2^3}, \delta_{\lambda_2^3})^3 \equiv R\left\{\overset{1}{x_i}, \overset{1}{f_i}(\lambda_1), \overset{2}{\mu}\right\} \equiv R_{\lambda_1^4}$$

als binäre (biquadratische) Form in λ_1, so stellt die Gleichung:

$$(55)\quad (R_{\lambda_1^4},\ z_4\lambda_1^4 + 4z_3\lambda_1^3 + 6z_2\lambda_1^2 + 4z_1\lambda_1 + z_0)^4 \equiv (R_{\lambda_1^4}, z_{\lambda_1^4})^4 \equiv 0$$

wo die z ganz willkürliche Constante sind, die Tangentenebenen:

$$(52)\qquad x_1\chi_1(\overset{2}{\mu}) + x_2\chi_2(\overset{2}{\mu}) + x_3\chi_3(\overset{2}{\mu}) + x_4\chi_4(\overset{2}{\mu}) = 0$$

aller zur R_4 perspectivischen Kegel zweiter Ordnung dar."

Die dritte Darstellung endlich ist bereits in § 1 Formel (8) formal enthalten, man hat dieselbe nur mit den in §§ 4 und 5 gefundenen Gleichungen (36) und (44) zu combiniren, und hat alsdann den Satz:

„*Entnimmt man der Formel* (36) *irgend zwei* (*linear unabhängige*) *erzeugende* P_1:

$$(56)\qquad \sigma u_i = \varphi_i(\overset{1}{\mu}),\quad \sigma u_i = \psi_i(\overset{1}{\mu}),$$

ferner der Formel (44) *irgend eine erzeugende* P_2:

$$(57)\qquad \sigma u_i = \chi_i(\overset{2}{\mu}),$$

(*wozu man der Kenntniss der in* § 5 *entwickelten Identität* (46′) *nicht bedarf, so umfasst, bei willkürlichen Parametern* $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma$, *die Darstellung:*

$$(58)\qquad \sigma u_i = \varphi_i(\overset{1}{\mu})(\alpha_1\mu + \alpha_2) + \psi_i(\overset{1}{\mu})(\beta_1\mu + \beta_2) + \chi_i(\overset{2}{\mu})\gamma$$

die Gesammtheit der erzeugenden Kegel zweiter Ordnung P_2."

§ 7.

Die erzeugenden Ordnungscurven.

Den voraufgegangenen Betrachtungen stehen andere*) gegenüber, die sich in gewissem Sinne reciprok zu ihnen verhalten. Denn gerade wie die R_4 als Ordnungscurve (1) durch drei zu ihr perspectivisch liegende Classencurven, so kann sie auch, als Classencurve (oder Rückkehrkante ihrer developpabeln Fläche) aufgefasst, durch irgend drei zu ihr perspectivisch gelegene Ordnungscurven erzeugt werden.

Diese letzteren bezeichnen wir mit $R_{n_1}, R_{n_2}, R_{n_3}$; die R_4 als Classencurve mit P_k, wo die Classe k im Allgemeinen gleich sechs ist, im Besonderen aber auf fünf und vier sinken kann, wenn nämlich die R_4 eine Inflexions- resp. Spitzentangente oder sogar zwei Inflexionstangenten aufweist. Dann sehen wir die R_4, nach wie vor, als gegeben an durch ihre Ordnungsgleichung:

$$(1)\qquad \varrho x_i = f_i(\overset{4}{\lambda}).$$

*) Das Verfahren dieses Paragraphen ist auf irgend welche Functionensysteme $f_i(\overset{n}{\lambda})$ ausdehnbar.

Die Gleichung der P_k, d. i. der Schmiegungsebenen von (1), ist nach Clebsch:

$$\sigma u_i = \Phi_i(\overset{k}{\lambda}), \tag{59}$$

wo die Φ_i den dreireihigen Determinanten proportional sind, welche man aus der Matrix der zweiten Differentialquotienten f_{i11}, f_{i12}, f_{i22} von den $f_i(\lambda)$ bilden kann.

Somit finden die zu (5) analogen Identitäten statt ($i = 1, 2, 3, 4$):

$$\sum \Phi_i(\overset{k}{\lambda}) f_{i11}(\overset{2}{\lambda}) \equiv 0, \quad \sum \Phi_i(\overset{k}{\lambda}) f_{i12}(\overset{2}{\lambda}) \equiv 0, \quad \sum \Phi_i(\overset{k}{\lambda}) f_{i22}(\overset{2}{\lambda}) \equiv 0. \tag{60}$$

Dann beweist sich, wie in § 1, dass im allgemeinen Falle ($k = 6$) die Gesammtheit der die P_6 erzeugenden Ordnungscurven $R_n (n \geq 2)$ unmittelbar geliefert wird durch:

$$\varrho x_i = f_{i11}(\overset{2}{\lambda})\, \alpha(\overset{n-2}{\lambda}) + f_{i12}(\overset{2}{\lambda})\, \beta(\overset{n-2}{\lambda}) + f_{i22}(\overset{2}{\lambda})\, \gamma(\overset{n-2}{\lambda}), \tag{61}$$

wo die α, β, γ wieder willkürliche ganze Functionen in λ bedeuten, des Grades $n - 2$. Die Mannigfaltigkeit der R_n ist von der Zahl $3(n-2) + 2$. Für $n - 2$ ergiebt sich die bekannte zweifache (lineare) Schaar der erzeugenden Kegelschnitte.

Erhält aber die R_4 eine Inflexions(resp. Spitzen)-tangente*) — ihr Argument sei $\lambda = \lambda'$ — so haben die $\Phi_i(\overset{6}{\lambda})$ den Factor $\lambda - \lambda'$ gemein, nach dessen Hebung Ausdrücke vom fünften Grade in λ verbleiben. Alsdann sind die niedrigsten Grade dreier erzeugender Ordnungscurven $2, 2, 1$ d. h. die ausgezeichnete Tangente λ' tritt selbst als erzeugende Punktreihe auf. Es tritt also hier noch die Aufgabe hinzu, diese Punktreihe algebraisch zu construiren, nämlich Constante α, β, γ so zu bestimmen, dass sich in

$$\varrho x_i = f_{i11}(\overset{2}{\lambda})\, \alpha + f_{i12}(\overset{2}{\lambda})\, \beta + f_{i22}(\overset{2}{\lambda})\, \gamma = g_i(\overset{2}{\lambda}) \tag{62}$$

rechtsseitig überall der Factor $\lambda - \lambda'$ abspaltet, und damit (62) in die Gleichung jener Tangente λ' übergeht.

Die α, β, γ müssen sich daher aus den vier linearen Gleichungen:

$$g_i(\lambda') \equiv f_{i11}(\lambda')\, \alpha + f_{i12}(\lambda')\, \beta + f_{i22}(\lambda')\, \gamma = 0 \tag{63}$$

berechnen lassen. Dies ist in der That ausführbar, da zwischen den linken Seiten $g_i(\lambda')$ von (63) zwei lineare Identitäten herrschen von der Form:

---

*) Dies ist der Fall, wenn die Form (15) δ_{λ_4} einen zwei- resp. dreifachen Factor $(\lambda - \lambda')^2$ resp. $(\lambda - \lambda')^3$ erhält. Hat δ_{λ_4} zwei Doppelfactoren, so treten zwei Inflexionstangenten der Curve auf, cf. „Apolarität" § 24.

$$(64)\qquad \sum k_{i1} g_i(\lambda') \equiv 0, \quad \sum k_{i2} g_i(\lambda') \equiv 0,$$

wo die unbekannten Factoren k_{i1}, k_{i2} bestimmt sind durch die Angabe, dass die Determinanten ihrer Matrix

$$(65)\qquad \begin{vmatrix} k_{i1}, & k_{k1} \\ k_{i1}, & k_{k2} \end{vmatrix}$$

proportional sind den Determinanten

$$(66)\qquad \begin{vmatrix} f_{i1}(\lambda'), & f_{m1}(\lambda') \\ f_{i2}(\lambda'), & f_{m2}(\lambda') \end{vmatrix} \qquad (i, k, l, m = 1, 2, 3, 4)$$

aus der Matrix der ersten Differentialquotienten der $f_i(\lambda)$.

Sind also ε_i, η_i beliebige Constante, so lassen sich die Gleichungen (63) ersetzen durch die beiden folgenden:

$$(67)\qquad \begin{cases} \alpha \sum \varepsilon_i f_{i11}(\lambda') + \beta \sum \varepsilon_i f_{i12}(\lambda') + \gamma \sum \varepsilon_i f_{i22}(\lambda') = 0, \\ \alpha \sum \eta_i f_{i11}(\lambda') + \beta \sum \eta_i f_{i12}(\lambda') + \gamma \sum \eta_i f_{i22}(\lambda') = 0. \end{cases}$$

Demnach gewinnen wir als Gleichung der erzeugenden Punktreihe R_1 unserer Inflexions- resp. Spitzentangente:

$$(68)\qquad \varrho x_i = \begin{vmatrix} f_{i11}(\overset{2}{\lambda}) & f_{i12}(\overset{2}{\lambda}) & f_{i22}(\overset{2}{\lambda}) \\ \sum \varepsilon_i f_{i11}(\lambda'), & \sum \varepsilon_i f_{i12}(\lambda'), & \sum \varepsilon_i f_{i22}(\lambda') \\ \sum \eta_i f_{i11}(\lambda'), & \sum \eta_i f_{i12}(\lambda'), & \sum \eta_i f_{i22}(\lambda') \end{vmatrix} \equiv (\lambda - \lambda') h_i(\overset{1}{\lambda})$$

und die vollständige Schaar der zur $R_4 = \mathsf{P}_5$ perspectivischen Ordnungscurven R_n ist für irgend ein $n \geqq 2$:

$$(69)\qquad \varrho x_i = g_i(\overset{2}{\lambda})\, \alpha(\overset{n-2}{\lambda}) + g_i'(\overset{2}{\lambda})\, \beta(\overset{n-2}{\lambda}) + h_i(\overset{1}{\lambda})\, \gamma(\overset{n-1}{\lambda}),$$

wo die $g_i(\lambda)$, $g_i'(\lambda)$ Ausdrücke von der Gestalt (62) d. s. beliebige zweite Polaren der $f_i(\lambda)$ bedeuten.

Die Mannigfaltigkeit solcher R_n ist jetzt um Eins gestiegen, gleich $3(n-1)$.

Ist endlich die R_4 eine P_4, treten also zwei Inflexionstangenten auf, so ist das eben geschilderte Verfahren für jede dieser Tangenten einzeln anzuwenden. Ist man so zu ihren Gleichungen gelangt:

$$(70)\qquad \varrho x_i = h_i(\overset{1}{\lambda}), \quad \varrho x_i = h_i'(\overset{1}{\lambda}),$$

so lautet für diesen Fall die Formel für die erzeugenden R_n:

$$(71)\qquad \varrho x_i = g_i(\overset{2}{\lambda})\, \alpha(\overset{n-2}{\lambda}) + h_i(\overset{1}{\lambda})\, \beta(\overset{n-1}{\lambda}) + h_i'(\overset{1}{\lambda})\, \gamma(\overset{n-1}{\lambda}),$$

bei willkürlichen Coefficienten in den $\alpha(\lambda), \beta(\lambda), \gamma(\lambda)$ eine $\{3(n-1)+1\}$-fache Schaar.

§ 8.

Ueber den algebraischen Charakter der behandelten Aufgaben.

Lösen wir die in §§ 1—6 gemachten Entwicklungen von ihrem geometrischen Inhalte ab, so lehren die Gleichungen (5), dass wir dieses rein algebraische Problem in allgemeinster Weise erledigt haben:

„Die Elemente einer Matrix vom Typus:

$$
\begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3, & a_4 \\ b_1, & b_2, & b_3, & b_4 \\ c_1, & c_2, & c_3, & c_4 \end{vmatrix} \tag{72}
$$

als ganze Functionen einer Variablen λ so zu bestimmen, dass die vier Determinanten der Matrix vorgegebenen ganzen Functionen vierten Grades in λ proportional werden."

Aber die nämlichen Gleichungen (5) deuten auch an, wie man dem eben formulirten Problem eine ungemein fruchtbarere und in die modernen Bestrebungen der Algebra füglicher eingreifende Fassung geben kann:

„Eine, in den Variabeln λ, μ ganze Function $(\overset{4}{\lambda}, \mu)$, die in λ vom vierten, in μ von beliebigem Grade ist, sei aus *vier*, (und *nicht weniger*) *linear unabhängigen* ganzen Functionen $f_i(\overset{4}{\lambda})$ linear componirbar:

$$
(\overset{4}{\lambda}, \mu) \equiv f_1(\overset{4}{\lambda})\varphi_1(\mu) + f_2(\overset{4}{\lambda})\varphi_2(\mu) + f_3(\overset{4}{\lambda})\varphi_3(\mu) + f_4(\overset{4}{\lambda})\varphi_4(\mu). \tag{73}
$$

Man soll die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür angeben, dass die ganze Function (73) derart reducibel wird, dass sich aus ihr ein in den Variabeln λ, μ linearer Factor abscheiden lässt, und man soll zugleich sämmtliche, — bei irgendwie gegebenen $f_i(\lambda)$ — jenen Bedingungen genügenden Functionen $\varphi_i(\mu)$ wirklich aufstellen."

Beide Forderungen werden durch das, in Formel (11) deponirte (auf die Ergebnisse der §§ 4, 5, 6 implicite sich stützende) Resultat befriedigt, dass sich die Factoren $\varphi(\mu)$ in (73) in die Form der $\omega(\mu)$ (11) bringen lassen müssen.

Hierbei ist beachtenswerth, dass die Coefficienten der die rechten Seiten von (11) fundirenden ganzen Functionen $\varphi_i(\overset{1}{\mu})$, $\psi_i(\overset{1}{\mu})$, $\chi_i(\overset{2}{\mu})$ in *rationaler* Weise von denen der $f_i(\lambda)$ abhängen.

Es liegt auf der Hand, nach welchen Richtungen sich diese beiden Einkleidungen unseres Problems ausdehnen lassen. Ich will hier nur bemerken, was die zweite jener Fassungen betrifft, dass mir die Lösung

der Aufgabe, die Criterien dafür zu ermitteln, wann eine ganze Function*) (λ, μ) (von beliebigen Graden in diesen Variabeln) einen in λ linearen Factor $(\overset{1}{\lambda}, \mu)$ zulässt, in befriedigender Weise gelungen ist.

Tübingen, Februar 1887.

*) Diese darf ausser μ noch beliebig viele weitere Variable enthalten. Vgl. über einen von mir gehaltenen Vortrag den Bericht der Berliner Naturforscherversammlung von 1886.

Ueber eine Gattung doppelt reell periodischer Functionen zweier Veränderlicher.

Von

Otto Staude in Dorpat.

Das Umkehrproblem der hyperelliptischen Integrale 1. Gattung vom Geschlecht p knüpft sich an p Gleichungen von der Form:

$$\sum_1^p{}_h \int_{a_h}^{x_h} \frac{x^{i-1}\,dx}{\sqrt{R(x)}} = t_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, p,$$

an, welche die zweimal p Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_p$ und $t_1, t_2, \ldots, t_p$ mit einander verbinden und in

$$R(x) = (a_0 - x)(a_1 - x)(a_2 - x)\ldots(a_{2p} - x)$$

eine ganze rationale Function vom $(2p+1)^{\text{ten}}$ Grade enthalten. Das Umkehrproblem besteht in der Aufgabe, die Coefficienten derjenigen Gleichung p^{ten} Grades, deren Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_p$ sind, als Functionen von $t_1, t_2, \ldots, t_p$ darzustellen. Diesem mittels der Thetafunctionen von p Argumenten gelösten „vollständigen" Umkehrproblem stellen sich eine Reihe anderer, „unvollständiger" Umkehrprobleme zur Seite. Das erste derselben bezieht sich auf die folgenden $p-1$ Gleichungen zwischen zweimal $p-1$ Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$ und $t_1, t_2, \ldots, t_{p-1}$:

$$\sum_1^{p-1}{}_h \int_{a_h}^{x_h} \frac{x^{i-1}\,dx}{\sqrt{R(x)}} = t_i, \quad i = 1, 2, \ldots, p-1;$$

es verlangt die rationalen symmetrischen Functionen der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$ durch die Variablen $t_1, t_2, \ldots, t_{p-1}$ darzustellen. Ein zweites unvollständiges Umkehrproblem würde eine ähnliche Fragestellung an ein entsprechend weiter reducirtes System von $p-2$

Gleichungen zwischen zweimal $p-2$ Variablen anschliessen. Ein $(p-2)^{\text{tes}}$ und $(p-1)^{\text{tes}}$ Problem jener Reihe endlich geht beziehungsweise von den Gleichungen:

$$\int_{a_1}^{x_1}\frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}}+\int_{a_2}^{x_2}\frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}}=t_1,$$

$$\int_{a_1}^{x_1}\frac{x_1\,dx_1}{\sqrt{R(x_1)}}+\int_{a_2}^{x_2}\frac{x_2\,dx_2}{\sqrt{R(x_2)}}=t_2$$

und der Gleichung:

$$\int_{a_1}^{x_1}\frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}}=t_1$$

aus und verlangt die symmetrischen Functionen von x_1, x_2 und bezüglich die Variable x_1 durch t_1, t_2 und durch t_1 auszudrücken. Dabei bleibt $R(x)$ überall vom Grade $2p+1$.

Gerade diese „unvollständigen“ Umkehrprobleme haben für Anwendungen auf Mechanik ein besonderes Interesse, wobei die in ihnen auftretenden Variablen im Wesentlichen auf reelle Werthe beschränkt werden können.

Das Problem der Umkehrung eines einzelnen hyperelliptischen Integrals von beliebigem Geschlecht hat Weierstrass behandelt*), und zwar in einer wesentlich verallgemeinerten Form. Er stellt die Aufgabe eine eindeutige, endliche und stetige Function $E(x)$ der oberen Grenze des Integrals

$$\int_a^x\frac{dx}{\sqrt{F(x)}}=t$$

als Function von t zu untersuchen, wenn $F(x)$ eine gegebene eindeutige Function von x ist. Nach dem Ergebniss seiner Untersuchung ist eine solche Function $E(x)$ unter gewissen Voraussetzungen über $F(x)$ für alle reellen Werthe von t eine eindeutige, stetige und endliche, sowie einfach reell periodische Function von t. Sie ist ferner durch eine für alle Werthe von t gleichmässig convergente trigonometrische Reihe darstellbar. Unter Beschränkung auf reelle Variable hat man hiermit eine Gattung periodischer Functionen gewonnen, welche sich als Verallgemeinerungen der Umkehrfunctionen der cyklometrischen und elliptischen Integrale darstellen.

Man kann nun ähnliche Untersuchungen, wie sie hierdurch an das letzte der oben erwähnten unvollständigen Umkehrprobleme

*) Weierstrass, Ueber eine Gattung reell periodischer Functionen, Monatsberichte der Königl. Academie der Wissenschaften zu Berlin, 1866.

sich angeknüpft haben, auch an die anderen unvollständigen Umkehrprobleme anschliessen. Die vorliegende Mittheilung beschäftigt sich zunächst mit dem vorletzten jener unvollständigen Umkehrprobleme, welches zugleich in wesentlich verallgemeinerter Gestalt (vgl. § 1) behandelt wird. Es wird vor Allem die Symmetrie des Ansatzes in Bezug auf die beiden Variablen x_1, x_2 und die Symmetrie der zu untersuchenden Functionen dieser Variablen aufgegeben. Die Betrachtung führt zu einer Gattung doppelt reell periodischer Functionen zweier reeller Veränderlicher, zu welchen als specielle Fälle die hyperelliptischen Functionen zweier Variabler vom Geschlecht $p = 2$ gehören.

Wie die Weierstrass'schen reell periodischen Functionen einer Veränderlichen, so finden auch die hier betrachteten doppelt reell periodischen Functionen zweier Argumente in der Mechanik eine mehrfache Verwerthung. Dabei geben diese Functionen, indem eine der Variablen t_1, t_2 constant gesetzt wird, in bedingt periodische Functionen (vgl. § 8) der anderen über. Ich beabsichtige in einer späteren Arbeit auf die verschiedenen Anwendungen in der Mechanik näher einzugehen.*)

§ 1.

Formulirung des zu behandelnden Umkehrproblems.

Zwischen zwei Paaren reeller Veränderlicher x_1, x_2 und t_1, t_2 sollen die Gleichungen:

$$(1)\qquad \begin{cases} t_1 = \displaystyle\int_{a_1}^{x_1} \frac{g_{11}(x_1)\,dx_1}{\sqrt{F_{11}(x_1)}} + \int_{a_2}^{x_2} \frac{g_{12}(x_2)\,dx_2}{\sqrt{F_{12}(x_2)}}, \\[2ex] t_2 = \displaystyle\int_{a_1}^{x_1} \frac{g_{21}(x_1)\,dx_1}{\sqrt{F_{21}(x_1)}} + \int_{a_2}^{x_2} \frac{g_{22}(x_2)\,dx_2}{\sqrt{F_{22}(x_2)}} \end{cases}$$

bestehen.

Unter $F_{11}(x)$, $F_{21}(x)$, $F_{12}(x)$, $F_{22}(x)$ sind gegebene Functionen von x zu verstehen, von denen die beiden ersten für zwei reelle Werthe $x = a_1$, $x = b_1$ und die beiden letzten für zwei reelle Werthe $x = a_2$, $x = b_2$ verschwinden. Setzt man mit Rücksicht darauf:

$$(2)\qquad \begin{cases} F_{\alpha 1}(x) = (x - a_1)(b_1 - x) f_{\alpha 1}(x), \\ F_{\alpha 2}(x) = (x - a_2)(b_2 - x) f_{\alpha 2}(x), \end{cases}$$

$\alpha = 1, 2$, so sollen $f_{\alpha 1}(x)$ in dem Intervalle $a_1 < x < b_1$ und $f_{\alpha 2}(x)$ in dem Intervalle $a_2 < x < b_2$ eindeutige und stetige Functionen von x sein, daselbst einen beständig positiven reellen Werth besitzen und weder 0 noch ∞ werden. Zugleich sollen zwischen den Vorzeichen

*) Vgl. die vorläufige Mittheilung: Ueber bedingt periodische Bewegungen, Sitzungsberichte der Dorpater Naturforschergesellschaft, April, 1887.

der Quadratwurzeln aus den einzelnen Bestandtheilen der Gleichungen (2) die Beziehungen:

$$(3) \qquad \sqrt{F_{\alpha\beta}(x_\beta)} = \sqrt{(x_\beta - a_\beta)(b_\beta - x_\beta)}\,\sqrt{f_{\alpha\beta}(x_\beta)},$$

$\alpha, \beta = 1, 2$, festgesetzt und unter $\sqrt{f_{\alpha\beta}(x_\beta)}$ der positive Werth der Quadratwurzel aus der positiven reellen Grösse $f_{\alpha\beta}(x_\beta)$ verstanden sein.

Was ferner die Functionen $g_{11}(x)$, $g_{21}(x)$ und $g_{12}(x)$, $g_{22}(x)$ angeht, so sollen dieselben beziehungsweise in den Intervallen $a_1 < x < b_1$ und $a_2 < x < b_2$ eindeutige und stetige Functionen von x sein, die daselbst niemals ihr Vorzeichen wechseln und niemals ∞ werden.

Endlich soll die Determinante:

$$(4) \qquad D(x_1, x_2) = \frac{g_{11}(x_1)}{\sqrt{f_{11}(x_1)}}\,\frac{g_{22}(x_2)}{\sqrt{f_{22}(x_2)}} - \frac{g_{21}(x_1)}{\sqrt{f_{21}(x_1)}}\,\frac{g_{12}(x_2)}{\sqrt{f_{12}(x_2)}}$$

für alle den Ungleichungen:

$$(5) \qquad a_1 < x_1 < b_1, \qquad a_2 < x_2 < b_2$$

genügenden Werthepaare x_1, x_2 beständig positiv oder beständig negativ sein und für solche Werthepaare niemals verschwinden.

Nach diesen Voraussetzungen über die in den Gleichungen (1) auftretenden Functionen soll eine beliebig gegebene Function der reellen Variablen x_1, x_2 : $E(x_1, x_2)$, welche für alle den Ungleichungen (5) genügenden Werthepaare x_1, x_2 eindeutig, endlich und stetig ist, in ihrer Abhängigkeit von den reellen Variablen t_1, t_2 untersucht werden. Es sei etwa:

$$(6) \qquad E(x_1, x_2) = G(t_1, t_2).$$

Daneben sollen auch eindeutige Functionen von x_1, x_2 und den vier Quadratwurzeln:

$$(7) \qquad \sqrt{x_1 - a_1},\ \sqrt{b_1 - x_1},\ \sqrt{x_2 - a_2},\ \sqrt{b_2 - x_2}$$

unter gleichen Beschränkungen der Betrachtung unterworfen werden.

§ 2.

Spaltung des vorgelegten Umkehrproblems in zwei Umkehrprobleme.

Es werden jetzt zwei Hülfsvariable u_1, u_2 eingeführt durch die Gleichungen:

$$(8) \qquad u_1 = \int_{a_1}^{x_1} \frac{dx_1}{\sqrt{(x_1 - a_1)(b_1 - x_1)}}, \quad u_2 = \int_{a_2}^{x_2} \frac{dx_2}{\sqrt{(x_2 - a_2)(b_2 - x_2)}}.$$

Die Auflösung dieser Gleichungen giebt umgekehrt:

$$(9)\quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{a_1+b_1}{2} + \dfrac{a_1-b_1}{2}\cos u_1, \\ \sqrt{(x_1-a_1)(b_1-x_1)} = -\dfrac{a_1-b_1}{2}\sin u_1, \\ x_2 = \dfrac{a_2+b_2}{2} + \dfrac{a_2-b_2}{2}\cos u_2, \\ \sqrt{(x_2-a_2)(b_2-x_2)} = -\dfrac{a_2-b_2}{2}\sin u_2. \end{cases}$$

Ferner kann man setzen:

$$(10)\quad \begin{cases} \sqrt{x_1-a_1} = \sqrt{b_1-a_1}\cdot\sin\dfrac{u_1}{2}, & \sqrt{x_2-a_2} = \sqrt{b_2-a_2}\cdot\sin\dfrac{u_2}{2}, \\ \sqrt{b_1-x_1} = \sqrt{b_1-a_1}\cdot\cos\dfrac{u_1}{2}, & \sqrt{b_2-x_2} = \sqrt{b_2-a_2}\cdot\cos\dfrac{u_2}{2}. \end{cases}$$

Hiernach bleiben x_1, x_2 für alle positiven und negativen reellen Werthe der Variablen u_1, u_2 immer zwischen den durch die Ungleichungen (5) angegebenen Grenzen. Ueberdies entsprechen sich die Werthe:

$$(11)\quad \begin{cases} x_1 = a_1 : u_1 = 0, & x_1 = b_1 : u_1 = \pi, \\ x_2 = a_2 : u_2 = 0, & x_2 = b_2 : u_2 = \pi. \end{cases}$$

Setzt man unter Ausführung der Substitutionen (9):

$$(12)\quad \begin{cases} f_{\alpha 1}(x_1) = p_{\alpha 1}(u_1), & f_{\alpha 2}(x_2) = p_{\alpha 2}(u_2), \\ g_{\alpha 1}(x_1) = q_{\alpha 1}(u_1), & g_{\alpha 2}(x_2) = q_{\alpha 2}(u_2), \\ \dfrac{g_{\alpha 1}(x_1)}{\sqrt{f_{\alpha 1}(x_1)}} = \dfrac{q_{\alpha 1}(u_1)}{\sqrt{p_{\alpha 1}(u_1)}} = h_{\alpha 1}(u_1), & \dfrac{g_{\alpha 2}(x_2)}{\sqrt{f_{\alpha 2}(x_2)}} = \dfrac{q_{\alpha 2}(u_2)}{\sqrt{p_{\alpha 2}(u_2)}} = h_{\alpha 2}(u_2), \end{cases}$$

so sind die Functionen $p_{\alpha 1}(u_1)$, $q_{\alpha 1}(u_1)$, $h_{\alpha 1}(u_1)$ und $p_{\alpha 2}(u_2)$, $q_{\alpha 2}(u_2)$, $h_{\alpha 2}(u_2)$ der Variablen u_1, respective u_2 gerade und mit 2π periodisch. Nach den Voraussetzungen des § 1 bleiben für alle reellen Werthe von u_1, u_2 die Functionen $p_{\alpha 1}(u_1)$ und $p_{\alpha 2}(u_2)$ positiv und von 0 und ∞ verschieden, und behalten die Functionen $q_{\alpha 1}(u_1)$ und $q_{\alpha 2}(u_2)$, ohne ∞ zu werden, immer ihr Vorzeichen. Daher werden $h_{\alpha 1}(u_1)$ und $h_{\alpha 2}(u_2)$ für alle reellen Werthe von u_1, u_2 endlich sein und niemals ihr Vorzeichen wechseln.

Zugleich verwandelt sich die Determinante:

$$(13)\quad D(x_1, x_2) = h_{11}(u_1)\cdot h_{22}(u_2) - h_{21}(u_1)\,.\,h_{12}(u_2) = h(u_1, u_2)$$

in eine gerade Function der beiden Variablen u_1, u_2, welche für alle reellen Werthe von u_1, u_2 ein festes Vorzeichen hat, für solche Werthe u_1, u_2 niemals verschwindet und in Bezug auf jede der Variablen u_1, u_2 mit 2π periodisch ist.

Die Function $E(x_1, x_2)$ geht nach Substitution der Werthe (9) in eine für alle reellen Werthe u_1, u_2 eindeutige und endliche Function der Variabeln u_1, u_2 über:

(14) $$E(x_1, x_2) = H(u_1, u_2),$$

die gerade ist und in Bezug auf jedes der Argumente u_1, u_2 die Periode 2π hat. Eine eindeutige Function der vier Wurzelgrössen (7) würde mit Rücksicht auf die Gleichungen (10) als eine eindeutige, im Allgemeinen nicht mehr gerade Function der Variablen u_1, u_2 mit der Periode 4π in Bezug auf jede derselben sich darstellen.

Zwischen u_1, u_2 und t_1, t_2 bestehen jetzt die Relationen:

(15) $$\begin{cases} t_1 = \displaystyle\int_0^{u_1} \frac{q_{11}(u_1)\,du_1}{\sqrt{p_{11}(u_1)}} + \int_0^{u_2} \frac{q_{12}(u_2)\,du_2}{\sqrt{p_{12}(u_2)}}, \\[2ex] t_2 = \displaystyle\int_0^{u_1} \frac{q_{21}(u_1)\,du_1}{\sqrt{p_{21}(u_1)}} + \int_0^{u_2} \frac{q_{22}(u_2)\,du_2}{\sqrt{p_{22}(u_2)}}. \end{cases}$$

Da nun, wie in §§ 3; 4 weiter zu erörtern, für alle reellen Werthe von t_1, t_2 auch u_1, u_2 reelle Werthe annehmen, so bleiben x_1, x_2 auch für alle reellen Werthe der Variablen t_1, t_2 zwischen den unter (5) angegebenen Grenzen.

Nachdem so von dem Umkehrproblem (1) das trigonometrische Umkehrproblem in (8) abgespalten ist, bleibt das Umkehrproblem (15) übrig, welches vor dem ursprünglich vorgelegten sich dadurch auszeichnet, dass die Quadratwurzeln in (15) ihr Vorzeichen nicht mehr wechseln können.

§ 3.

Die Eindeutigkeit der Functionen t_1, t_2 von u_1, u_2.

Die Functionen t_1, t_2 sind von u_1, u_2 abhängig gemacht durch die Gleichungen:

(15) $$\begin{cases} t_1 = \displaystyle\int_0^{u_1} h_{11}(u_1)\,du_1 + \int_0^{u_2} h_{12}(u_2)\,du_2, \\[2ex] t_2 = \displaystyle\int_0^{u_1} h_{21}(u_1)\,du_1 + \int_0^{u_2} h_{22}(u_2)\,du_2. \end{cases}$$

Es werde zur Abkürzung gesetzt:

(16) $$\begin{cases} \psi_{11}(u_1) = \displaystyle\int_0^{u_1} h_{11}(u_1)\,du_1, & \psi_{12}(u_2) = \displaystyle\int_0^{u_2} h_{12}(u_2)\,du_2, \\[2ex] \psi_{21}(u_1) = \displaystyle\int_0^{u_1} h_{21}(u_1)\,du_1, & \psi_{22}(u_2) = \displaystyle\int_0^{u_2} h_{22}(u_2)\,du_2, \end{cases}$$

sodass:

$$(17)\qquad \begin{cases} t_1 = \psi_1(u_1, u_2) = \psi_{11}(u_1) + \psi_{12}(u_2), \\ t_2 = \psi_2(u_1, u_2) = \psi_{21}(u_1) + \psi_{22}(u_2). \end{cases}$$

Umgekehrt sei:

$$(18)\qquad u_1 = \varphi_1(t_1, t_2), \qquad u_2 = \varphi_2(t_1, t_2).$$

Jedes der Integrale $\psi_{\alpha 1}(u_1)$ und $\psi_{\alpha 2}(u_2)$ hat für jeden reellen Werth von u_1, respective u_2 selbst einen bestimmten, mit dem Argument stetig sich ändernden Werth, da die Functionen $h_{\alpha 1}(u_1)$ und $h_{\alpha 2}(u_2)$ für alle reellen Werthe von u_1, respective u_2 eindeutig, endlich und stetig sind und besondere Singularitäten derselben ausgeschlossen werden. Da überdies die Functionen $h_{\alpha 1}(u_1)$ und $h_{\alpha 2}(u_2)$ gerade Functionen sind, so ist:

$$\psi_{\alpha 1}(-u_1) = -\psi_{\alpha 1}(u_1), \qquad \psi_{\alpha 2}(-u_2) = -\psi_{\alpha 2}(u_2)$$

und somit auch:

$$(19)\qquad \begin{cases} \psi_1(-u_1, -u_2) = -\psi_1(u_1, u_2), \\ \psi_2(-u_1, -u_2) = -\psi_2(u_1, u_2). \end{cases}$$

Es folgt also zunächst:

Die Functionen $t_1 = \psi_1(u_1, u_2)$ und $t_2 = \psi_2(u_1, u_2)$ sind für alle reellen Werthepaare u_1, u_2 eindeutige und stetige, sowie ungerade Functionen von u_1, u_2.

Man denke sich die Functionen t_1 und t_2 von u_1, u_2 geometrisch dargestellt, indem man t_1 und t_2 als Ordinaten auf einer Abscissenebene u_1, u_2 aufträgt. Es werden dann zwei Flächen entstehen, welche für jeden Punkt u_1, u_2 der Abscissenebene eine und nur eine Ordinate besitzen. Aus der Differentialgleichung der Fläche $t_\alpha = \psi_\alpha(u_1, u_2)$:

$$dt_\alpha = h_{\alpha 1}(u_1)\,du_1 + h_{\alpha 2}(u_2)\,du_2$$

geht noch hervor, dass die Fläche in jedem ihrer Punkte eine bestimmte, ihre Normalenrichtung stetig verändernde Tangentialebene hat, und dass diese letztere niemals der Abscissenebene u_1, u_2 parallel werden kann, da $h_{\alpha 1}(u_1)$ und $h_{\alpha 2}(u_2)$, bei der über die Determinante $D(x_1, x_2) = h(u_1, u_2)$ in § 1 gemachten Voraussetzung, niemals gleichzeitig verschwinden.

Die Fläche $t_\alpha = \psi_\alpha(u_1, u_2)$ sei im Besonderen längs der Geraden

$$u_2 = \varepsilon_\alpha u_1 + a$$

der Abscissenebene betrachtet, wo $\varepsilon_\alpha = \pm 1$ und a eine beliebige Constante ist. Man hat für die Punkte dieser Geraden:

$$t_\alpha = \int_0^{u_1} h_{\alpha 1}(u_1)\,du_1 + \varepsilon_\alpha \int_0^{u_1} h_{\alpha 2}(\varepsilon_\alpha u_1 + a)\,du_1 + \int_0^{a} h_{\alpha 2}(u_2)\,du_2$$

$$= \int_0^{u_1} \big(h_{\alpha 1}(u_1) + \varepsilon_\alpha h_{\alpha 2}(\varepsilon_\alpha u_1 + a)\big)\,du_1 + A,$$

wo:

$$A = \int_0^a h_{\alpha 2}(u_2)\,du_2.$$

Da nun $h_{\alpha 1}(u_1)$ und $h_{\alpha 2}(u_2)$ für alle reellen Werthe von u_1 und u_2 je das nämliche Vorzeichen besitzen und niemals gleichzeitig verschwinden, so kann man $\varepsilon_\alpha = \pm 1$ stets so wählen, dass die Function $h_{\alpha 1}(u_1) + \varepsilon_\alpha h_{\alpha 2}(\varepsilon_\alpha u_1 + a)$ für alle reellen Werthe von u_1 beständig positiv oder beständig negativ und niemals gleich 0 ist. Hiernach wird t_α längs der betrachteten Geraden beständig wachsen oder beständig abnehmen, während u_1 stetig wachsend von $-\infty$ bis $+\infty$ läuft.

Dabei wird aber t_α längs der Geraden nach beiden Seiten derselben hin auch schliesslich $-\infty$ und respective $+\infty$ werden, da die Function $h_{\alpha 1}(u_1) + \varepsilon_\alpha h_{\alpha 2}(\varepsilon_\alpha u_1 + a)$ eine periodische Function von u_1 mit der Periode 2π und A eine für jedes endliche a endliche Constante ist.

Es giebt also stets ein System paralleler gerader Linien in der Abscissenebene u_1, u_2, längs deren jeder in der einen oder anderen Richtung die Ordinate der Fläche $t_1 = \psi_1(u_1, u_2)$ oder $t_2 = \psi_2(u_1, u_2)$ stetig wachsend alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft.

Verbindet man alle Punkte u_1, u_2 der Abscissenebene, denen gleiche Ordinaten t_1 oder t_2 entsprechen, so erhält man bezüglich Curven $t_1 = \text{const.}$ und $t_2 = \text{const.}$, welche die Orthogonalprojectionen der Höhenlinien der Flächen $t_1 = \psi_1(u_1, u_2)$ und $t_2 = \psi_2(u_1, u_2)$ sind. Die Differentialgleichung einer Curve $t_\alpha = \text{const.}$ ist:

$$0 = h_{\alpha 1}(u_1)\,du_1 + h_{\alpha 2}(u_2)\,du_2,$$

woraus mit Rücksicht darauf, dass $h_{\alpha 1}(u_1)$ und $h_{\alpha 2}(u_2)$ für alle reellen Werthe u_1, u_2 eindeutig, endlich und stetig und niemals beide 0 sind, hervorgeht, dass die Curve in jedem ihrer Punkte eine einzige bestimmte Tangente hat. Es folgt daher:

Jede Curve $t_1 = \text{const.}$ und $t_2 = \text{const.}$ bildet einen einzigen, unverzweigten vom Unendlichen her ins Unendliche zurücklaufenden Zug).*

---

*) Die Gesammtheit aller Punkte der Ebene u_1, u_2, deren Coordinaten ihrem absoluten Betrage nach eine beliebig grosse endliche Grenze nicht überschreiten, bildet ein einfach zusammenhängendes Flächenstück; nach dem vorliegenden Satze läuft jede Curve $t_\alpha = \text{const.}$ als einfacher, sich selbst nicht schneidender Curvenzug von einem Randpunkte dieses Flächenstückes zu einem anderen Randpunkte. Der vorliegende und folgende Satz entsprechen daher einer der Bedingungen für die eindeutige Umkehrung eines Functionensystems, welche Lipschitz, Beiträge zu der Theorie der Umkehrung eines Functionensystems, Nachrichten der Kgl. Ges. d. Wissenschaften zu Göttingen, 1870, S. 439, angiebt.

Die Verbindung der beiden letzten Sätze giebt weiter:

Die Function $t_1 = \psi_1(u_1, u_2)$, *und ebenso* $t_2 = \psi_2(u_1, u_2)$, *nimmt jeden Werth zwischen* $-\infty$ *und* $+\infty$ *längs einer und nur einer vom Unendlichen her ins Unendliche zurücklaufenden, unverzweigten Curve der Abscissenebene an.*

§ 4.

Die Eindeutigkeit der Functionen u_1, u_2 von t_1, t_2.

Die Tangenten zweier Curven $t_1 =$ const. und $t_2 =$ const. in einem Schnittpunkte u_1, u_2 derselben sind in laufenden Coordinaten u_1', u_2':

$$h_{11}(u_1) \cdot (u_1' - u_1) + h_{12}(u_2) \cdot (u_2' - u_2) = 0,$$
$$h_{21}(u_1) \cdot (u_1' - u_1) + h_{22}(u_2) \cdot (u_2' - u_2) = 0;$$

diese Tangenten können niemals zusammenfallen, da die Determinante $h(u_1, u_2)$ dieser beiden linearen Gleichungen niemals verschwindet. Mit andern Worten:

Zwei Curven $t_1 =$ *const. und* $t_2 =$ *const. können sich niemals unter dem Winkel* 0 *oder* π *schneiden.*

Man denke sich nun jede solche Curve mit einem bestimmten Durchlaufungssinne versehen, der sich von Curve zu Curve eines jeden der beiden Systeme $t_1 =$ const. und $t_2 =$ const. continuirlich übertrage. Man betrachte ferner, indem man längs einer Curve $t_1 =$ const. in ihrem Durchlaufungssinne fortschreitet, die Aenderung in der Richtung der sie schneidenden Curven $t_2 =$ const. Diese Richtung wird sich von Punkt zu Punkt der ersteren Curve stetig ändern, ohne je mit der Richtung derselben zusammenzufallen oder ihr gerade entgegengesetzt zu sein. Daher durchschneiden, mit Bezug auf den festgesetzten Durchlaufungssinn, die Curven $t_2 =$ const. die Curve $t_1 =$ const. immer von derselben Seite her, von der rechten oder von der linken. Es ist somit ausgeschlossen, dass eine Curve $t_2 =$ const. mehr als einmal die Curve $t_1 =$ const. schneidet.

Eine Curve $t_1 =$ *const. und eine Curve* $t_2 =$ *const. in der Abscissenebene* u_1, u_2 *können sich niemals in mehr als einem Punkte schneiden.*

Denkt man sich jetzt eine Ordinate t_1 der Fläche $t_1 = \psi_1(u_1, u_2)$ und eine Ordinate t_2 der Fläche $t_2 = \psi_2(u_1, u_2)$ gegeben, so kann es nicht mehr als einen Punkt u_1, u_2 der Abscissenebene geben, wo gleichzeitig die erstere Fläche die Ordinate t_1 und die letztere die Ordinate t_2 besitzt.

Es gehört also zu einem reellen Werthepaare t_1, t_2, *nicht mehr als ein Werth jeder der beiden Functionen* $u_1 = \varphi_1(t_1, t_2)$ *und* $u_2 = \varphi_2(t_1, t_2)$.

Die diesen Functionen entsprechenden Flächen mögen mit den

verticalen Ordinaten u_1, u_2 über einer horizontalen Abscissenebene t_1, t_2 construirt werden. Die Differentialgleichungen dieser beiden Flächen lauten:

$$du_1 = \frac{h_{22}(u_2)}{h(u_1, u_2)} dt_1 - \frac{h_{12}(u_2)}{h(u_1, u_2)} dt_2,$$

$$du_2 = -\frac{h_{21}(u_1)}{h(u_1, u_2)} dt_1 + \frac{h_{11}(u_1)}{h(u_1, u_2)} dt_2,$$

wo für die Coefficienten die Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind. Geht man nun von einem beliebig gegebenen Werthepaare u_1, u_2 aus, so gehört zu diesem nach § 3 ein und nur ein Werthepaar t_1, t_2 und man kann je einen Punkt der beiden Flächen $u_1 = \varphi_1(t_1, t_2)$ und $u_2 = \varphi_2(t_1, t_2)$ construiren. Die Tangentialebenen in diesen Punkten sind in laufenden Coordinaten u_1', t_1', t_2', respective u_2', t_1', t_2':

$$u_1' - u_1 = \frac{h_{22}(u_2)}{h(u_1, u_2)} (t_1' - t_1) - \frac{h_{12}(u_2)}{h(u_1, u_2)} (t_2' - t_2),$$

$$u_2' - u_2 = -\frac{h_{21}(u_1)}{h(u_1, u_2)} (t_1' - t_1) + \frac{h_{11}(u_1)}{h(u_1, u_2)} (t_2' - t_2).$$

Geht man jetzt von t_1, t_2 zu einem beliebigen, unendlich nahen Nachbarpunkte t_1, t_2 der Abscissenebene t_1, t_2 über, so geben diese Gleichungen die zugehörigen Werthe von u_1', u_2'; für die entsprechenden Punkte der Flächen $u_1 = \varphi_1(t_1, t_2)$ und $u_1 = \varphi_2(t_1, t_2)$ kann man dann wieder die Gleichungen der Tangentialebene angeben und so fortfahrend die Flächen weiter und weiter construiren. Soweit diese Fortsetzung auch geführt wird, sie bleibt immer eindeutig und bestimmt. Nimmt man hierzu noch, dass zu einem Werthepaare t_1, t_2 nie mehr als ein Werth von u_1 oder u_2 gehört, so folgt, dass jede der beiden Flächen $u_1 = \varphi_1(t_1, t_2)$ und $u_2 = \varphi_2(t_1, t_2)$ die Abscissenebene t_1, t_2 in ihrer ganzen Ausdehnung einfach über- respective unter-decken muss. Die Zusammenfassung dieser Schlüsse führt aber zu dem Satze:

Die Functionen $u_1 = \varphi_1(t_1, t_2)$ und $u_2 = \varphi_2(t_1, t_2)$ sind für alle reellen Werthepaare t_1, t_2 eindeutige und stetige Functionen von t_1, t_2.

§ 5.

Die doppelte reelle Periodicität der Functionen von t_1, t_2.

Nachdem die Eindeutigkeit der Functionen

$$u_1 = \varphi_1(t_1, t_2), \quad u_2 = \varphi_2(t_1, t_2)$$

bewiesen ist, kann man sofort eine weitere charakteristische Eigenschaft derselben herleiten. Da nämlich die Functionen $h_{\alpha 1}(u_1)$ und $h_{\alpha 2}(u_2)$ nach § 2 doppelt reell periodisch sind mit den zusammengehörigen Periodicitätsmoduln 2π, 0 und 0, 2π, und mit Rücksicht auf die Gleichungen (15) und (17):

$$\frac{\partial \psi_\alpha(u_1, u_2)}{\partial u_1} = h_{\alpha 1}(u_1), \qquad \frac{\partial \psi_\alpha(u_1, u_2)}{\partial u_2} = h_{\alpha 2}(u_2),$$

so folgt sofort:

$$\frac{\partial \psi_\alpha(u_1+2\pi, u_2+0)}{\partial u_1} = \frac{\partial \psi_\alpha(u_1, u_2)}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial \psi_\alpha(u_1+2\pi, u_2+0)}{\partial u_2} = \frac{\partial \psi_\alpha(u_1, u_2)}{\partial u_2},$$

und entsprechend mit Bezug auf die Aenderung von u_1, u_2 um 0, 2π. Multiplicirt man diese beiden Gleichungen bezüglich mit du_1, du_2 und addirt sie, so ergiebt sich für das vollständige Differential:

$$d\psi_\alpha(u_1+2\pi, u_2+0) = d\psi_\alpha(u_1, u_2).$$

Durch Integration erhält man hieraus, unter $\omega_{\alpha 1}$ eine Constante verstehend:

$$\psi_\alpha(u_1+2\pi, u_2+0) = \psi_\alpha(u_1, u_2) + 2\omega_{\alpha 1} \tag{20}$$

und auf demselben Wege:

$$\psi_\alpha(u_1+0, u_2+2\pi) = \psi_\alpha(u_1, u_2) + 2\omega_{\alpha 2}. \tag{20}$$

Wegen der wechselseitigen Eindeutigkeit der Beziehungen zwischen den Variablen u_1, u_2 einerseits und t_1, t_2 andererseits schliesst man hieraus weiter:

$$\text{(21)} \quad \begin{cases} u_1 + 2\pi = \varphi_1(t_1+2\omega_{11}, \ t_2+2\omega_{21}), \\ u_2 + 0 \quad = \varphi_2(t_1+2\omega_{11}, \ t_2+2\omega_{21}), \\ u_1 + 0 \quad = \varphi_1(t_1+2\omega_{12}, \ t_2+2\omega_{22}), \\ u_2 + 2\pi = \varphi_2(t_1+2\omega_{12}, \ t_2+2\omega_{22}). \end{cases}$$

So oft die Variablen t_1, t_2 respective um $2\omega_{11}$, $2\omega_{21}$ oder $2\omega_{12}$, $2\omega_{22}$ wachsen, nehmen u_1, u_2 respective um 2π, O oder O, 2π zu.

Da aber die Function $H(u_1, u_2)$ in (14) in Bezug auf u_1, u_2 die Periodicitätsmoduln 2π, 0 und 0, 2π hat, so gelangt man zu dem Resultate, *dass diese Function, als Function $G(t_1, t_2)$ von t_1, t_2 betrachtet, doppelt periodisch ist mit den Periodenpaaren $2\omega_{11}$, $2\omega_{21}$ und $2\omega_{12}$, $2\omega_{22}$.*

Um die Werthe der Constanten $\omega_{\alpha\beta}$ zu bestimmen, entnimmt man aus den Gleichungen (20) mit $u_1 = -\pi$, $u_2 = O$:

$$\psi_\alpha(\pi, 0) = \psi_\alpha(-\pi, 0) + 2\omega_{\alpha 1}$$

und hieraus mit Rücksicht auf (19):

$$2\psi_\alpha(\pi, 0) = 2\omega_{\alpha 1};$$

ebenso erhält man:

$$2\psi_\alpha(0, \pi) = 2\omega_{\alpha 2}.$$

Da aber den Werthepaaren π, 0 und 0, π von u_1, u_2 nach (11) die Werthepaare b_1, a_2 und a_1, b_2 von x_1, x_2 entsprechen, so ist:

$$(22)\quad \begin{cases} \omega_{11} = \int\limits_{a_1}^{b_1} \frac{g_{11}(x_1)\,dx_1}{\sqrt{F_{11}(x_1)}}, & \omega_{12} = \int\limits_{a_2}^{b_2} \frac{g_{12}(x_2)\,dx_2}{\sqrt{F_{12}(x_2)}}, \\ \omega_{21} = \int\limits_{a_1}^{b_1} \frac{g_{21}(x_1)\,dx_1}{\sqrt{F_{21}(x_1)}}, & \omega_{22} = \int\limits_{a_2}^{b_2} \frac{g_{22}(x_2)\,dx_2}{\sqrt{F_{22}(x_2)}}, \end{cases}$$

wo die Quadratwurzeln sämmtlich positiv genommen werden können.

Das Gesammtresultat der vorstehenden Entwicklungen kann sonach folgendermaassen formulirt werden:

Eine beliebig gegebene Function $E(x_1, x_2)$ *der oberen Grenzen* x_1, x_2 *der Integralsummen:*

$$t_1 = \int\limits_{a_1}^{x_1} \frac{g_{11}(x_1)\,dx_1}{\sqrt{F_{11}(x_1)}} + \int\limits_{a_2}^{x_2} \frac{g_{12}(x_2)\,dx_2}{\sqrt{F_{12}(x_2)}},$$

$$t_2 = \int\limits_{a_1}^{x_1} \frac{g_{21}(x_1)\,dx_1}{\sqrt{F_{21}(x_1)}} + \int\limits_{a_2}^{x_2} \frac{g_{22}(x_2)\,dx_2}{\sqrt{F_{22}(x_2)}},$$

welche für alle den Ungleichungen $a_1 < x_1 < b_1$, $a_2 < x_2 < b_2$ *genügenden Werthepaare* x_1, x_2 *eindeutig, endlich und stetig ist, wird unter den in § 1 angegebenen Voraussetzungen eine für alle reellen Werthepaare von* t_1, t_2 *eindeutige, endliche und stetige Function* $G(t_1, t_2)$ *von* t_1, t_2, *die überdies gerade und doppelt periodisch mit den Periodenpaaren* $2\omega_{11}, 2\omega_{21}$ *und* $2\omega_{12}, 2\omega_{22}$ *ist.*

In derselben Beziehung zu t_1, t_2 *stehen entsprechende eindeutige Functionen der Variablen* x_1 *und* x_2 *und der Wurzelgrössen:*

$$\sqrt{x_1 - a_1},\ \sqrt{b_1 - x_1},\ \sqrt{x_2 - a_2},\ \sqrt{b_2 - x_2},$$

nur dass diese im Allgemeinen nicht mehr gerade sind und dass sie die Periodenpaare $4\omega_{11}, 4\omega_{21}$ *und* $4\omega_{12}, 4\omega_{22}$ *besitzen.*

§ 6.

Die Umkehrung der hyperelliptischen Integrale im reellen Gebiet.

Das behandelte Umkehrproblem ist eine auf das reelle Gebiet beschränkte Verallgemeinerung des Jacobi'schen Umkehrproblems der hyperelliptischen Integrale 1. Gattung vom Geschlecht $p = 2$:

$$(23)\quad \begin{cases} t_1 = \int\limits_{a_1}^{x_1} \frac{(x_1 - a')\,dx_1}{\sqrt{r(x_1)}} + \int\limits_{a_2}^{x_2} \frac{(x_2 - a')\,dx_2}{\sqrt{r(x_2)}}, \\ t_2 = \int\limits_{a_1}^{x_1} \frac{(x_1 - a'')\,dx_1}{\sqrt{r(x_1)}} + \int\limits_{a_2}^{x_2} \frac{(x_2 - a'')\,dx_2}{\sqrt{r(x_2)}}, \end{cases}$$

worin:

$$r(x) = (a_0 - x)(a_1 - x)(a_2 - x)(a_3 - x)(a_4 - x),$$
$$a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4,$$

und a', a'' irgend 2 von den Verzweigungspunkten a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 der Quadratwurzel $\sqrt{r(x)}$ sind. Es ist in diesem Falle nach den Bezeichnungen des § 1:

$$g_{11}(x) = g_{12}(x) = x - a', \qquad g_{21}(x) = g_{22}(x) = x - a'',$$
$$F_{11}(x) = F_{12}(x) = F_{21}(x) = F_{22}(x) = r(x),$$
$$f_{11}(x) = f_{21}(x) = (x - a_0)(a_3 - x)(a_4 - x),$$
$$f_{12}(x) = f_{22}(x) = (x - a_0)(x - a_1)(x - a_2),$$
$$D(x_1, x_2) = \frac{(x_2 - x_1)(a'' - a')}{\sqrt{f_{11}(x_1)}\sqrt{f_{22}(x_2)}}.$$

Zugleich sind die Bezeichnungen a_1, a_2, a_3, a_4 an Stelle von a_1, b_1, a_2, b_2 getreten. Die Bedingungen des § 1 sind, wie man sofort sieht, alle erfüllt, sobald $a'' - a' \neq 0$ ist. Es sind also z. B. die Functionen:

$$\sqrt{x_1 - a_0}\sqrt{x_2 - a_0}, \ \sqrt{x_1 - a_1}\sqrt{x_2 - a_1}, \ \sqrt{a_2 - x_1}\sqrt{x_2 - a_2},$$
$$\sqrt{a_3 - x_1}\sqrt{x_2 - a_3}, \ \sqrt{a_4 - x_1}\sqrt{a_4 - x_2}$$

als in den Intervallen $a_1 < x_1 < a_2$, $a_3 < x_2 < a_4$ eindeutige, endliche und stetige Functionen von

$$x_1, \ x_2, \ \sqrt{x_1 - a_1}, \ \sqrt{a_2 - x_1}, \ \sqrt{x_2 - a_3}, \ \sqrt{a_4 - x_2}$$

nach § 5 eindeutige, endliche und stetige Functionen von t_1, t_2 mit 2 Paaren reeller Perioden.

Die vorstehend entwickelte Theorie giebt aber im reellen Gebiete auch die Lösung des Umkehrproblems (23), wenn die Integrale derselben nicht mehr von der 1. Gattung, sondern etwa theilweise von der 2. Gattung sind, z. B.

$$t_1 = \int_{a_1}^{x_1} \frac{(x_1 - a_0)\,dx_1}{\sqrt{r(x_1)}} + \int_{a_3}^{x_2} \frac{(x_2 - a_0)\,dx_2}{\sqrt{r(x_2)}},$$

$$t_2 = \int_{a_1}^{x_1} \frac{(x_1 - a_0)(x_1 - a_2)\,dx_1}{\sqrt{r(x_1)}} + \int_{a_3}^{x_2} \frac{(x_2 - a_0)(x_2 - a_2)\,dx_2}{\sqrt{r(x_2)}}.$$

Auch hier sind alle Voraussetzungen des § 1 erfüllt. Dies gilt aber auch dann noch, wenn in (23) $r(x)$ von höherem als dem 6. Grade ist und in $x = a_1, a_2$ und $x = a_3, a_4$ je zwei nebeneinanderfolgende Nullpunkte hat, sodass die Integrale hyperelliptisch von höherem Geschlecht als $p = 2$ werden.

§ 7.

Die Darstellung der betrachteten doppelt reell periodischen Functionen.

Die Function $E(x_1, x_2) = G(t_1, t_2)$ in § 5 hat die Eigenschaften:

$$(24)\qquad \begin{cases} G(-t_1, -t_2) = G(t_1, t_2), \\ G(t_1 + 2\omega_{11}, t_2 + 2\omega_{21}) = G(t_1, t_2), \\ G(t_1 + 2\omega_{12}, t_2 + 2\omega_{22}) = G(t_1, t_2). \end{cases}$$

Führt man nun statt t_1, t_2 zwei neue Variable τ_1, τ_2 ein durch die Gleichungen:

$$(25)\qquad \tau_1 = \frac{t_1\omega_{22} - t_2\omega_{12}}{\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{21}\omega_{12}}\pi, \quad \tau_2 = \frac{\omega_{11}t_2 - \omega_{21}t_1}{\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{21}\omega_{12}}\pi,$$

wo

$$(26)\qquad \omega = \omega_{11}\omega_{22} - \omega_{21}\omega_{12} = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} \frac{D(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2}{\sqrt{(x_1 - a_1)(b_1 - x_1)}\sqrt{(x_2 - a_2)(b_2 - x_2)}}$$

von Null verschieden und von gleichem Vorzeichen mit $D(x_1, x_2)$ ist, setzt man ferner:

$$G(t_1, t_2) = \Gamma(\tau_1, \tau_2),$$

so sind die entsprechenden Eigenschaften der Function $\Gamma(\tau_1, \tau_2)$ in den Formeln enthalten:

$$(27)\qquad \begin{cases} \Gamma(-\tau_1, -\tau_2) = \Gamma(\tau_1, \tau_2), \\ \Gamma(\tau_1 + 2\pi, \tau_2) = \Gamma(\tau_1, \tau_2), \\ \Gamma(\tau_1, \tau_2 + 2\pi) = \Gamma(\tau_1, \tau_2). \end{cases}$$

Die Function $\Gamma(\tau_1, \tau_2)$ ist also eine für alle reellen Werthe von τ_1, τ_2 eindeutige, endliche und stetige Function der beiden Argumente τ_1, τ_2 und mit Bezug auf jedes der beiden Argumente periodisch mit der Periode 2π. Sie kann daher*) durch eine für alle Werthe von τ_1, τ_2 gleichmässig convergente, zweifach unendliche trigonometrische Reihe dargestellt werden, welche die Form hat:

$$\begin{aligned} \Gamma(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{4} A_{00} &+ \frac{1}{2}\sum_1^{\infty}{}^{n_1} (A_{n_1 0} \cos n_1\tau_1 + B_{n_1 0} \sin n_1\tau_1) \\ &+ \frac{1}{2}\sum_1^{\infty}{}^{n_2} (A_{0 n_2} \cos n_2\tau_2 + C_{0 n_2} \sin n_2\tau_2) \\ &+ \sum_1^{\infty}{}^{n_1} \sum_1^{\infty}{}^{n_2} (A_{n_1 n_2} \cos n_1\tau_1 \cdot \cos n_2\tau_2 + B_{n_1 n_2} \sin n_1\tau_1 \cdot \cos n_2\tau_2 \\ &\qquad + C_{n_1 n_2} \cos n_1\tau_1 \cdot \sin n_2\tau_2 + D_{n_1 n_2} \sin n_1\tau_1 \cdot \sin n_2\tau_2) \end{aligned}$$

*) Vgl. Ascoli, Sulla rappresentibilità di una funzione a due variabili per serie doppia trigonometrica und Sulle serie trigonometriche a due variabili, Atti

und die Fourier'sche Reihe zweier Veränderlicher ist, sodass ihre Coefficienten die Werthe haben:

$$A_{n_1 n_2} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \Gamma(\tau_1, \tau_2) \cdot \cos n_1\tau_1 \cdot \cos n_2\tau_2 \cdot d\tau_1\, d\tau_2,$$

$$B_{n_1 n_2} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \Gamma(\tau_1, \tau_2) \cdot \sin n_1\tau_1 \cdot \cos n_2\tau_2 \cdot d\tau_1\, d\tau_2,$$

$$C_{n_1 n_2} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \Gamma(\tau_1, \tau_2) \cdot \cos n_1\tau_1 \cdot \sin n_2\tau_2 \cdot d\tau_1\, d\tau_2,$$

$$D_{n_1 n_2} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \Gamma(\tau_1, \tau_2) \cdot \sin n_1\tau_1 \cdot \sin n_2\tau_2 \cdot d\tau_1\, d\tau_2.$$

Da im vorliegenden Falle die Function gerade ist, verschwinden die ungeraden Glieder der Reihe und nimmt dieselbe mit Vertauschung der Buchstaben B und D die einfachere Form an:

$$(28)\quad \Gamma(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{4} A_{00} + \frac{1}{2}\sum_1^{\infty}{}_{n_1} A_{n_1 0} \cos n_1\tau_1 + \frac{1}{2}\sum_1^{\infty}{}_{n_2} A_{0 n_2} \cos n_2\tau_2$$
$$+ \sum_1^{\infty}{}_{n_1} \sum_1^{\infty}{}_{n_2} (A_{n_1 n_2} \cos n_1\tau_1 \cdot \cos n_2\tau_2 + B_{n_1 n_2} \sin n_1\tau_1 \cdot \sin n_2\tau_2),$$

worin:

$$(29)\quad \begin{cases} A_{n_1 n_2} = \dfrac{1}{\pi^2} \displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \Gamma(\tau_1, \tau_2) \cdot \cos n_1\tau_1 \cos n_2\tau_2 \cdot d\tau_1\, d\tau_2, \\ B_{n_1 n_2} = \dfrac{1}{\pi^2} \displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \Gamma(\tau_1, \tau_2) \cdot \sin n_1\tau_1 \cdot \sin n_2\tau_2 \cdot d\tau_1\, d\tau_2. \end{cases}$$

Zur Darstellung der zweiten am Schluss des § 5 erwähnten Functionen würde die allgemeinere, nicht gerade Reihe dienen.

In die Coefficienten (29) sollen jetzt an Stelle der Integrationsvariablen τ_1, τ_2 die Variablen u_1, u_2 aus § 2 eingeführt werden. Dies geschieht unter Vermittlung der Variablen t_1, t_2, deren Zusammenhang mit u_1, u_2 einerseits und τ_1, τ_2 anderseits durch die Formeln (15) und (25) gegeben wird. Für die verschiedenen Functionaldeterminanten zwischen diesen Variablen hat man:

della R. Accademia dei Lincei, ser. III, vol. 4 (1879) und vol. 8 (1880); ferner Weierstrass, Abhandlungen zur Functionenlehre, Berlin 1886, S. 160.

$$(30)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \tau_1}{\partial t_1}\dfrac{\partial \tau_2}{\partial t_2}-\dfrac{\partial \tau_1}{\partial t_2}\dfrac{\partial \tau_2}{\partial t_1}=\dfrac{\pi^2}{\omega}, \\ \dfrac{\partial t_1}{\partial u_1}\dfrac{\partial t_2}{\partial u_2}-\dfrac{\partial t_1}{\partial u_2}\dfrac{\partial t_2}{\partial u_1}=h(u_1,u_2); \\ \dfrac{\partial \tau_1}{\partial u_1}\dfrac{\partial \tau_2}{\partial u_2}-\dfrac{\partial \tau_1}{\partial u_2}\dfrac{\partial \tau_2}{\partial u_1}=\dfrac{\pi^2 h(u_1,u_2)}{\omega}. \end{cases}$$

Die dritte dieser Determinanten hat, wie $h(u_1, u_2)$, für alle reellen Werthe von u_1, u_2 das nämliche Vorzeichen, und zwar ist sie positiv, da $h(u_1, u_2)$ und ω nach (26) gleiches Vorzeichen haben. Führt man daher unter dem Doppelintegral $A_{n_1 n_2}$ in (29) die Variablen u_1, u_2 ein, so erhält man zunächst ohne Rücksicht auf die Grenzen:

$$(31)\quad \begin{aligned} A_{n_1 n_2} = \frac{1}{\omega}\int\!\!\int & H(u_1,u_2)\cdot h(u_1,u_2) \\ & \cdot\cos\left(n_1\frac{\psi_1(u_1,u_2)\cdot\omega_{22}-\psi_2(u_1,u_2)\cdot\omega_{12}}{\omega}\pi\right) \\ & \cdot\cos\left(n_2\frac{\omega_{11}\,\psi_2(u_1,u_2)-\omega_{21}\,\psi_1(u_1,u_2)}{\omega}\pi\right)du_1\,du_2. \end{aligned}$$

Hier sind $H(u_1, u_2)$ und $h(u_1, u_2)$ bekannte eindeutige Functionen von u_1, u_2, letztere in (13), erstere in (6) und (14) eingeführt. Ferner sind $\psi_1(u_1, u_2)$ und $\psi_2(u_1, u_2)$ eindeutige Functionen von u_1, u_2, welche nach (16) und (17) durch Quadratur berechnet werden können. Der Coefficient von du_1, du_2 unter dem Doppelintegral ist überdies eine doppelt periodische Function der Variablen u_1, u_2 mit den Periodenpaaren 2π, 0 und 0, 2π, wie mit Bezug auf $H(u_1, u_2)$ und $h(u_1, u_2)$ in § 2 bemerkt wurde und mit Bezug auf das Product der beiden Cosinus aus (20) hervorgeht.

Um die Grenzen des Doppelintegrals (31) zu bestimmen, bemerkt man zuerst, dass das ursprüngliche Integral (29) über ein Periodenparallelogramm der Function $\Gamma(\tau_1, \tau_2)$ in der Ebene der Coordinaten τ_1, τ_2 auszudehnen war; die Ecken desselben sind $\tau_1, \tau_2 = 0, 0$; $0, 2\pi$; $2\pi, 0$; $2\pi, 2\pi$. Durch die Substitution (25) wird dieses Parallelogramm auf ein Parallelogramm in der Ebene der Coordinaten t_1, t_2 abgebildet mit den Eckpunkten $t_1, t_2 = 0, 0$; $2\omega_{11}, 2\omega_{21}$; $2\omega_{12}, 2\omega_{22}$; $2\omega_{11}+2\omega_{12}$, $2\omega_{21}+2\omega_{22}$. Diesem Parallelogramm aber entspricht wieder ein Parallelogramm der Ebene der Coordinaten u_1, u_2 mit den Ecken $u_1, u_2 = 0, 0$; $0, 2\pi$; $2\pi, 0$; $2\pi, 2\pi$. Das Integral (31) ist daher über ein solches Parallelogramm der Ebene u_1, u_2, ein Periodenparallelogramm der Function unter dem Integral, auszudehnen, wobei es wegen der Periodicität der bezeichneten Function auf die Gestalt der Conturen des Parallelogramms nicht ankommt. Man wird sie geradlinig annehmen und setzen:

$$(32)\quad A_{n_1 n_2} = \frac{1}{\omega}\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi} H(u_1, u_2)\cdot h(u_1, u_2)$$
$$\cdot\cos\left(n_1\frac{\omega_{22}\psi_1(u_1, u_2) - \omega_{12}\psi_2(u_1, u_2)}{\omega}\pi\right)$$
$$\cdot\cos\left(n_2\frac{\omega_{11}\psi_2(u_1, u_2) - \omega_{21}\psi_1(u_1, u_2)}{\omega}\pi\right)\cdot du_1\, du_2.$$

Damit ist die Möglichkeit der Berechnung des Coefficienten $A_{n_1 n_2}$ dargethan. Die der Coefficienten $B_{n_1 n_2}$ und eventuell der Coefficienten $C_{n_1 n_2}$, $D_{n_1 n_2}$ gestaltet sich dementsprechend.

§ 8.

Ueber eine Gattung bedingt periodischer Functionen einer reellen Veränderlichen.

Die zweifach unendliche trigonometrische Reihe (28) des § 7, als Function von t_1, t_2 betrachtet, schreitet nach den Cosinus und Sinus der Vielfachen der beiden Ausdrücke:

$$\tau_1 = \frac{t_1\omega_{22} - t_2\omega_{12}}{\omega}\pi,\quad \tau_2 = \frac{\omega_{11}t_2 - \omega_{21}t_1}{\omega}\pi$$

fort. Setzt man jetzt:

$$t_1 = 0,\qquad t_2 = t,$$

so werden diese:

$$(33)\qquad \tau_1 = -\frac{\omega_{12}}{\omega}\pi t,\quad \tau_2 = \frac{\omega_{11}}{\omega}\pi t.$$

Die Reihe (28) ist jetzt als Function von t im Allgemeinen nicht mehr periodisch, weil in Folge der Voraussetzung $t_1 = 0$ gleichzeitige Aenderungen von t_1 und t_2 um $2\omega_{11}$ und $2\omega_{21}$ oder $2\omega_{12}$ und $2\omega_{22}$ nicht mehr stattfinden können.

Nimmt man jedoch an, dass zwischen ω_{11} und ω_{12} mit zwei positiven oder negativen ganzen Zahlen m_1 und m_2 die Relation besteht:

$$(34)\qquad m_1\omega_{11} + m_2\omega_{12} = 0$$

und setzt man ferner:

$$(35)\qquad m_1\omega_{21} + m_2\omega_{22} = T,$$

so folgt zunächst:

$$-\frac{\omega_{12}}{\omega} = \frac{m_1}{T},\qquad \frac{\omega_{11}}{\omega} = \frac{m_2}{T}$$

und wird damit aus (33):

$$(36)\qquad \tau_1 = \frac{m_1\pi t}{T},\qquad \tau_2 = \frac{m_2\pi t}{T}.$$

Demnach werden die einzelnen Glieder der trigonometrischen Reihen periodische Functionen von t mit der Periode $2T$, und damit die durch die Reihen dargestellten Functionen $G(0, t)$ selbst periodische Functionen von t mit der Periode $2T$. Es folgt daher:

Bestehen zwischen 3 reellen Variablen x_1, x_2, t die Gleichungen:

$$(37)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{a_1}^{x_1}\frac{g_{11}(x_1)\,dx_1}{\sqrt{F_{11}(x_1)}} + \int_{a_2}^{x_2}\frac{g_{12}(x_2)\,dx_2}{\sqrt{F_{12}(x_2)}} = 0, \\ \displaystyle\int_{a_1}^{x_1}\frac{g_{21}(x_1)\,dx_1}{\sqrt{F_{21}(x_1)}} + \int_{a_2}^{x_2}\frac{g_{22}(x_2)\,dx_2}{\sqrt{F_{22}(x_2)}} = t, \end{cases}$$

so ist eine beliebig gegebene Function $E(x_1, x_2)$ der oberen Integralgrenzen x_1, x_2, welche für alle den Ungleichungen $a_1 < x_1 < b_1$, $a_2 < x_2 < b_2$ genügenden Werthepaare x_1, x_2 eindeutig, endlich und stetig ist, unter den in § 1 angegebenen Bedingungen eine für alle reellen Werthe von t eindeutige, endliche und stetige, sowie bedingt periodische Function von t.

Sie ist nämlich im Allgemeinen nicht periodisch, wird aber periodisch mit der Periode

$$(38)\qquad 2T = 2m_1\int_{a_1}^{b_1}\frac{g_{21}(x_1)\,dx_1}{\sqrt{F_{21}(x_1)}} + 2m_2\int_{a_2}^{b_2}\frac{g_{22}(x_2)\,dx_2}{\sqrt{F_{22}(x_2)}},$$

sobald die Bedingung:

$$(39)\qquad 0 = 2m_1\int_{a_1}^{b_1}\frac{g_{11}(x_1)\,dx_1}{\sqrt{F_{11}(x_1)}} + 2m_2\int_{a_2}^{b_2}\frac{g_{12}(x_2)\,dx_2}{\sqrt{F_{12}(x_2)}}$$

mit irgend welchen ganzen positiven oder negativen Zahlen m_1, m_2 erfüllt ist.

Analoges würde für die zweite, am Ende von § 5 angegebene Art von Functionen gelten, nur dass diese unter derselben Bedingung (39) die Periode $4T$ bekommen.

Dorpat, im Januar 1887.

Ueber die mit Ecken behafteten Schwingungen gespannter Saiten.

Von

Axel Harnack in Dresden.

In zwei grundlegenden Arbeiten, betitelt: „Untersuchungen über die mit dem Fortbestehen linearer partieller Differentialgleichungen verträglichen Unstetigkeiten" und „Ueber die Fortpflanzung von Stössen durch elastische feste Körper" (Annali die Matematica S. II, T. VIII) hat Herr Christoffel, im Anschluss an die Abhandlung von Riemann über die Fortpflanzung ebener Luftwellen, festgestellt, welche Bedingungen bei der Integration partieller Differentialgleichungen in der Mechanik zu berücksichtigen sind, wenn die ursprünglich gemachten Voraussetzungen über die durchgängige Stetigkeit der Ableitungen der gesuchten Functionen unzulässig werden. Für das einfachste Beispiel dieser Art, für diejenigen Schwingungen gespannter Saiten, bei denen Ecken auftreten, giebt Herr Christoffel diese Bedingungen nur kurz an, und betont mit Recht, dass es unstatthaft ist, die Formeln, welche für die Transversalbewegung bei stetiger Biegung abgeleitet worden sind, ohne weitere Begründung auch hier gelten zu lassen. Denn auch aus den Eigenschaften der Fourier'schen Reihe könne man die Berechtigung hiezu nicht ohne weiteres entnehmen. Der Nachweis, dass das Vorhandensein von Ecken auf die Schlussformeln keinen Einfluss habe, liesse sich zwar führen, er beruhe aber nicht auf den Eigenschaften der Fourier'schen Reihe, sondern auf der besonderen Beschaffenheit jener Bedingungen.

Wenn ich mir erlaube, im folgenden einen kurzen Beweis dieser Sätze zu geben und dieselben an den von Herrn Helmholtz ausführlich behandelten Beispielen der gezupften und gestrichenen Saite zu erörtern, so bestimmt mich dazu vornehmlich die Erkenntniss, dass die Einführung der Fourier'schen Reihe zur Darstellung des Integrals auch in dem gewöhnlichen und regulären Falle nirgendwo, soviel mir bekannt, mit befriedigender Genauigkeit begründet ist, sodann dass die von

Helmholtz ausgeführten Beispiele*) eine richtige Begründung vermissen lassen und bei dem letzteren auch im Resultate nicht fehlerfrei sind. Zwar hat schon Herr Lindemann diese beiden Fälle ausführlich und zwar auf Grund der Christoffel'schen Unstetigkeitsbedingungen behandelt**); indem er es aber bei dem zweiten Beispiele absichtlich vermeidet, die Fourier'sche Reihe für die Herleitung der Function zu benutzen, werden die Untersuchungen nicht so einfach und übersichtlich.

§ 1.

Die Integration unter Voraussetzung der Stetigkeit.

Da ich in Bezug auf die Aufstellung der partiellen Differentialgleichung für die sogenannten unendlich kleinen Schwingungen auf die üblichen Darstellungen, z. B. die Vorlesungen von Riemann oder Kirchhoff, verweisen kann, führe ich das Resultat nur kurz an.

Bezeichnet $\eta(t, x)$ die transversale Ordinate eines Elementes der Saite zur Zeit t, und ϱ die Masse der Längeneinheit, P die Grösse der Spannung, so ist die Beschleunigung eines Elementes dx gleich $\varrho\,\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\,dx$; dieselbe wird hervorgebracht durch die Componenten $P\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)_x$ und $-P\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)_{x-dx}$ der elastischen Kräfte. Also ist

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = \frac{P}{\varrho}\,\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} = \alpha^2\,\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}. \tag{1}$$

Indem wir zur Vereinfachung der Formeln die Länge der Saite mit π bezeichnen, liegt folgendes Integrationsproblem vor.

Es soll eine Function η als Integral der Gleichung (1) bestimmt werden, welche bei allen Werthen von $x = 0$ bis $x = \pi$ und von $t = 0$ bis $t = \infty$ nebst ihren ersten Ableitungen stetig ist. Für $t = 0$ soll die Function $\eta(t, x)$ übergehen in den Werth $f(x)$, und die Function $\frac{\partial\eta}{\partial t}$ übergehen in den Werth $F(x)$. Für $x = 0$ und $x = \pi$ soll $\eta(t, x)$ gleich Null werden, bei allen Werthen von t.***)

*) „Die Lehre von den Tonempfindungen"; Beilage II, IV, V. Zweite Ausgabe. Braunschweig 1865, sowie „Ueber die Bewegung der Violinsaiten". Neuer Abdruck in den wissenschaftl. Abhandlungen. Bd. 1, Leipzig 1881.

**) „Die Schwingungsformen gezupfter und gestrichener Saiten." Berichte über die Verhandl. der naturf. Gesellschaft zu Freiburg, Bd. VII, 1879.

***) Man könnte auch den allgemeinen Fall behandeln, dass an den Grenzen $x = 0$ und $x = \pi$ zwei beliebige Functionen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ vorgeschrieben sind; doch bietet derselbe kein erhebliches Interesse. Solange es sich überhaupt nur um die Existenz des Integrales und seiner allgemeinen Eigenschaft handelt, ist die d'Alembert'sche Form des Integrales am zweckmässigsten, wie auch im Text beim vorliegenden Problem hervortreten wird.

Von den Functionen $f(x)$ und $F(x)$ nehme ich an, dass sie stetige Functionen ihrer Argumente sind; für die Function $f(x)$ soll überdies auch die Ableitung $f'(x)$ stetig sein.

Ferner soll die Ableitung $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ auch an den Endwerthen $x = 0$ und $x = \pi$ jederzeit endlich sein, oder was sich im folgenden als ausreichend zeigen wird, es soll das Product $\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) \sin nx$ für $x = 0$ und $x = \pi$ bei jedem ganzzahligen Werth von n nach Null convergiren.

Es soll festgestellt werden, ob es unter diesen Bedingungen eine und nur eine Lösung der partiellen Differentialgleichung giebt, und wie die Darstellung derselben durch eine trigonometrische Reihe lautet. Dabei bleibt noch die Frage offen, ob die Differentialgleichung (1) bei allen Werthen von t und x erfüllt ist, oder ob es Ausnahmestellen giebt. Diese Ausnahmestellen sollen indess bei jedem Werth von t nur vereinzelt auftreten, oder allgemeiner ausgedrückt: es soll für jeden Werth von x und t

$$(2) \qquad \int_0^x \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \sin nx\, dx = \alpha^2 \int_0^x \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \sin nx\, dx$$

sein. Die Function η muss, da sie eine stetige Function von x mit stetiger Ableitung ist, darstellbar sein durch eine Fourier'sche Reihe:

$$(3) \qquad \eta(t, x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \sin nx\,.$$

Die Coefficienten

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \eta(t, x) \sin nx\, dx$$

sind als Functionen von t zu bestimmen. Es ist gemäss der Gleichung (1) und (2)

$$(4) \qquad \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \alpha^2 \int_0^\pi \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \sin nx\, dx.$$

Die rechte Seite wird durch partielle Integration gleich

$$\frac{2}{\pi} \alpha^2 \left\{ \left[\frac{\partial \eta}{\partial x} \sin nx\right]_0^\pi - \Big[n \eta \cos nx\Big]_0^\pi - n^2 \int_0^\pi \eta \sin nx\, dx \right\}$$

alo auf Grund der eingeführten Bedingungen gleich

$$-\alpha^2 n^2 A_n.$$

Das Integral

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\sin nx\,dx$$

ist gleich

$$\frac{2}{\pi}\,\frac{d^2}{dt^2}\int\limits_0^\pi \eta\sin nx\,dx$$

falls die Function $\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}$ durchaus stetig ist; im allgemeinen Falle aber erhält man die nämliche Gleichung auf Grund der Integrirbarkeit der Functionen $\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}$ und $\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}$, und falls diese auch unendlich werden, auf Grund der Gleichung (2). Sonach wird die Gleichung (4)

(5) $$\frac{d^2A_n}{dt^2} = -\alpha^2 n^2 A_n$$

und hieraus folgt das vollständige Integral für $\alpha^2 > 0$

(6) $$A_n = a_n\cos n\alpha t + b_n\sin n\alpha t.$$

Die Constanten a_n und b_n werden dadurch bestimmt, dass für $t=0$ $\eta = f(x)$ also

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \eta\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f(x)\sin nx\,dx$$

und $\frac{\partial\eta}{\partial t} = F(x)$, also

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \frac{\partial\eta}{\partial t}\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi F(x)\sin nx\,dx$$

ist. Man erkennt, dass in diesen Uebertragungen auf die Integrale die Forderung eines gleichmässigen Ueberganges in die Grenzfunctionen enthalten ist. Sonach wird

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f(x)\sin nx\,dx,\qquad n\alpha\, b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi F(x)\sin nx\,dx$$

und die gesuchte Function ist

(7) $$\eta(t,x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\sin nx(a_n\cos n\alpha t + b_n\sin n\alpha t).$$

Die einzelnen Summen lassen sich gesondert behandeln:

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\sin nx\cos n\alpha t\int\limits_0^\pi f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{n=\infty}a_n(\sin n(x+\alpha t)+\sin n(x-\alpha t))$$
$$= \frac{1}{2}\Big\{f(x+\alpha t) + f(x-\alpha t)\Big\}$$

da zufolge der Eigenschaften der Function $f(x)$ diese Fourier'sche Reihe convergirt. Die Function $f(x)$ genügt hierbei der Bedingung

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{und} \quad f(x+2\pi) = f(x),$$

und enthält keine Unstetigkeiten, da sie für $x = 0$ und $x = \pi$ verschwindet. Desgleichen ist die andere Summe in (7)

$$\frac{2}{\pi}\,\frac{1}{2\alpha}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n}\left(\cos n(x-\alpha t) - \cos(x+\alpha t)\right)\int_0^\pi F(x)\sin nx\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left\{g(x-\alpha t) - g(x+\alpha t)\right\}$$

wenn man die Function $g(x)$ definirt durch die Gleichung

$$g(x) = \frac{1}{\alpha}\int_0^x F(x)\,dx$$

und sie gemäss den Relationen $g(x) = g(-x)$, $g(x+2\pi) = g(x)$ fortsetzt. Auch die Ableitungen dieser Function, welche der Gleichung $g'(x) = -g'(-x)$ genügen, haben keine Unstetigkeiten, weil die Function $F(x)$ für $x = 0$ und $x = \pi$ verschwindet.

Sonach ist

$$(8)\quad \eta(t,x) = \frac{1}{2}\left\{f(x+\alpha t) + f(x-\alpha t)\right\} + \frac{1}{2}\left\{g(x+\alpha t) - g(x-\alpha t)\right\}$$

eine nebst ihren ersten Ableitungen durchaus stetige Function, welche den geforderten Grenzbedingungen genügt, und deren zweite Ableitungen endlich und bestimmt sind, und dabei die Differentialgleichung befriedigen, insoweit die Functionen $f''(x)$ und $F'(x)$ endlich und bestimmt sind. Die Function η hat in Bezug auf die Variabeln t die Periode $\alpha t = 2\pi$.

§ 2.

Die Unstetigkeitsbedingungen beim Auftreten von Ecken und die Integration der Differentialgleichung.

Wenn innerhalb des betrachteten Gebietes von $t = 0$ bis $\alpha t = 2\pi$ und von $x = 0$ bis $x = \pi$ Stellen vorhanden sind, an denen zwar der Werth von η stetig bleibt, die partielle Ableitung $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ aber eine bestimmte sprungweise Werthänderung erleidet, so treten in der Bewegung der Saite Eckpunkte auf. Von diesen Eckpunkten nehmen wir an, dass sie ihre Lage mit der Zeit stetig ändern. Ist also c die Abscisse solch eines Eckpunkts, so ist c eine stetige und differentiirbare Function von t, wenn wir auch eine bestimmte Geschwindigkeit für die Aenderung

der Grösse c annehmen. Bezeichnet man die Werthe von η zu beiden Seiten einer Ecke mit η_1 und η_2, so besteht die Gleichung:

$$\eta_1(c, t) = \eta_2(c, t)$$

bei allen Werthen von t fort, indem wir c als Function von t auffassen. Es wird daher auch

$$(1) \qquad \frac{\partial \eta_1}{\partial t} + \frac{\partial \eta_1}{\partial c}\frac{dc}{dt} = \frac{\partial \eta_2}{\partial t} + \frac{\partial \eta_2}{\partial c}\frac{dc}{dt}$$

und dies ist die erste rein phoronomische Bedingung, welche für jeden Eckpunkt bestehen muss. Die zweite Bedingung geht aus der Stosswirkung hervor, welche die elastischen Kräfte zu beiden Seiten der Ecke erzeugen. Nehmen wir an, dass an der Ecke c die positive Geschwindigkeit $\frac{dc}{dt}$ vorhanden ist, so erleidet in der unendlich kleinen Zeit dt ein Massenelement eine plötzliche Aenderung seiner Geschwindigkeit. Die Grösse derselben wird durch $\left(\frac{\partial \eta_2}{\partial t} - \frac{\partial \eta_1}{\partial t}\right)$ gemessen (η_2 bedeutet hier den Werth, welcher zu dem Punkte $c - 0$ gehört, η_1 den Werth welcher zu $c + 0$ gehört); denn indem die Ecke um ein Stück vorrückt, wird ein Massenelement, welches in der Lage η_1 sich befand, in die Lage η_2 gebracht. Die unendlich kleine Aenderung welche die Werthe η_1 und η_2 in der Zeit dt erfahren, kommt dabei nicht in Betracht. Die Grösse des Massenelementes, welches an dieser Beschleunigung Theil nimmt ist $\varrho \frac{dc}{dt} dt$.

Der Stoss wird hervorgebracht durch die Differenz $P\left(\frac{\partial \eta_1}{\partial x} - \frac{\partial \eta_2}{\partial x}\right)$ der elastischen Kräfte zu beiden Seiten der Ecke und sonach besteht die Gleichung

$$\left(\frac{\partial \eta_2}{\partial t} - \frac{\partial \eta_1}{\partial t}\right)\frac{dc}{dt} = \alpha^2\left(\frac{\partial \eta_1}{\partial x} - \frac{\partial \eta_2}{\partial x}\right)$$

oder

$$(2) \qquad \frac{\partial \eta_1}{\partial t}\frac{dc}{dt} + \alpha^2\frac{\partial \eta_1}{\partial x} = \frac{\partial \eta_2}{\partial t}\frac{dc}{dt} + \alpha^2\frac{\partial \eta_2}{\partial x}.$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) folgt:

$$(3) \qquad \alpha^2 = \left(\frac{dc}{dt}\right)^2$$

d. h. die Abscisse jedes Eckpunktes wandert mit der constanten Ge-Geschwindigkeit $+$ oder $-\alpha$.

Die Function η muss sich bei jedem Werth von t durch eine Reihe von der Form

$$(4) \qquad \eta = \sum A_n \sin nx$$

darstellen lassen; dieselbe convergirt bei allen Werthen von x auch in

den Eckpunkten, weil die Function η überall einen bestimmten vorwärts oder rückwärts gebildeten Differentialquotienten besitzt, die allerdings in den Eckpunkten verschieden sind. Auch besteht die Gleichung:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\,\alpha^2\int_0^\pi \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\sin nx\,dx. \tag{5}$$

Es ist aber, wenn wir die Abscissen der Eckpunkte mit $c_1\ c_2 \ldots c_m$ bezeichnen, und jedesmal die Werthe zu beiden Seiten einer Ecke mit $\left(\frac{\partial\eta_1}{\partial x}\right)_{c_i}$ und $\left(\frac{\partial\eta_2}{\partial x}\right)_{c_i}$ unterscheiden, — η_1 soll dem Werthe $c_i - 0$, η_2 dem Werthe $c_i + 0$ entsprechen —

$$\int_0^\pi \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\sin nx\,dx = \int_0^{c_1}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\sin nx\,dx + \sum_{i=1}^{i=m-1}\int_{c_i}^{c_{i+1}}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\sin nx\,dx$$

$$+\int_{c_m}^\pi \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\sin nx\,dx$$

$$=\sum_{i=1}^{i=m}\left[\left(\frac{\partial\eta_1}{\partial x}\right)_{c_i} - \left(\frac{\partial\eta_2}{\partial x}\right)_{c_i}\right]\sin nc_i - n^2\int_0^\pi \eta\sin nx\,dx.$$

Ferner wird

$$\frac{d}{dt}\int_0^\pi \eta\sin nx\,dx = \frac{d}{dt}\int_0^{c_1}\eta\sin nx\,dx + \frac{d}{dt_i}\sum_{i=1}^{i=m-1}\int_{c_i}^{c_{i+1}}\eta\sin nx\,dx$$

$$+\frac{d}{dt}\int_{c_m}^\pi \eta\sin nx\,dx$$

und wiewohl hier die oberen Grenzen c_i als Functionen von t zu betrachten sind, so wird die rechte Seite doch gleich

$$\int_0^\pi \frac{\partial\eta}{\partial t}\sin nx\,dx$$

weil die Function η zu beiden Seiten einer Ecke stetig bleibt. Dagegen wird

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_0^\pi \eta \sin nx\,dx = \frac{d}{dt}\int_0^\pi \frac{\partial \eta}{\partial t}\sin nx\,dx$$

$$= \frac{d}{dt}\int_0^{c_1} \frac{\partial \eta}{\partial t}\sin nx + \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{i=m-1}\int_{c_i}^{c_i+1} \frac{\partial \eta}{\partial t}\sin nx\,dx + \frac{d}{dt}\int_{c_m}^{\pi} \frac{\partial \eta}{\partial t}\sin nx\,dx$$

$$= \sum_{i=1}^{i=m}\left(\left(\frac{\partial \eta_1}{\partial t}\right)_{c_i} - \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial t}\right)_{c_i}\right)\frac{dc_i}{dt}\sin nc_i + \int_0^\pi \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}\sin nx\,dx.$$

Mithin folgt aus der Gleichung (5) die Relation:

$$-\frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{i=m}\left(\left(\frac{\partial \eta_1}{\partial t}\right)_{c_i} - \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial t}\right)_{c_i}\right)\frac{dc_i}{dt}\sin nc_i + \frac{2}{\pi}\frac{d^2}{dt^2}\int_0^\pi \eta \sin nx\,dx$$

$$= \alpha^2\frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{i=m}\left(\left(\frac{\partial \eta_1}{\partial x}\right)_{c_i} - \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial x}\right)_{c_i}\right)\sin nc_i - \alpha^2 n^2 \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \eta \sin nx\,dx.$$

Da hier die Summen auf beiden Seiten zufolge der Bedingung (2) sich gegenseitig aufheben, so wird wie früher

$$(6) \qquad \frac{d^2 A_n}{dt^2} = -\alpha^2 n^2 A_n \quad \text{also} \quad A_n = a_n \cos n\alpha t + b_n \sin n\alpha t.$$

Damit ist der Satz bewiesen: *Auch bei dem Auftreten von Ecken erfolgt die Bewegung einer schwingenden Saite nach dem Gesetz:*

$$\eta(t, x) = \sum_{n=1}^{n=\infty}(a_n \cos n\alpha t + b_n \sin n\alpha t)\sin nx$$

und umgekehrt: *Jede in dieser Form darstellbare stetige Function mit endlichen ersten Differentialquotienten ist als Schwingungsbewegung möglich, wenn ihre zweiten Differentialquotienten im allgemeinen wenigstens endlich und stetig sind.*

Es ist einleuchtend, dass es unter der Voraussetzung von Unstetigkeiten bei den ersten Differentialquotienten andersartige Integrale der partiellen Differentialgleichung giebt, die nicht bei allen Werthen von t und x durch *eine* trigonometrische Reihe dieser Art darstellbar sind.

§ 3.

Die Schwingungen der Violinsaite.

Als Grundform für die Schwingungen einer gestrichenen Saite ist von Helmholtz und Anderen das Vorhandensein *einer* Ecke erkannt worden; im übrigen besteht die Saite stets aus zwei geraden Strecken. Wir können die Frage stellen: welche Art der Bewegung ist überhaupt möglich, wenn die Saite stets aus zwei geraden Strecken bestehen soll. Bezeichnet man die Coordinaten des Eckpunktes zu einer bestimmten Zeit mit a und b, so ist die Gestalt der Saite gegeben durch die Gleichungen:

$$(1) \qquad y = \frac{b}{a}\,x = x \operatorname{tang} \alpha_1, \qquad (0 \leqq x \leqq a)$$

$$y = \frac{b(x-\pi)}{a-\pi} = (x-\pi)\operatorname{tang} \alpha_2, \qquad (a \leqq x \leqq \pi).$$

Die Grössen a und b sind als Functionen der Zeit zu bestimmen; von der Grösse a ist aber bereits bekannt, dass sie proportional der Zeit sich ändert. Um die Function y durch eine trigonometrische Reihe darzustellen, hat man zu bilden:

$$(2) \qquad y = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \sin n x,$$

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi y \sin nx\, dx = \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{n}\int_0^\pi \frac{\partial y}{\partial x} \cos nx\, dx$$

also

$$(3) \qquad A_n = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\left[\operatorname{tang} \alpha_1 \int_0^a \cos nx\, dx + \operatorname{tang} \alpha_2 \int_0^\pi \cos nx\, dx\right]$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}\,[\operatorname{tang} \alpha_1 - \operatorname{tang} \alpha_2] \sin na.$$

Dieser Werth muss aber nach unserer allgemeinen Regel gleich sein

$$a_n \cos n\alpha t + b_n \sin n\alpha t.$$

Nimmt man an, dass zur Zeit $t = 0$ a den Werth Null hat, so ist $a = \alpha t$ und durch Vergleichung der beiden Ausdrücke erkennt man, dass $a_n = 0$ und

$$(4) \qquad \operatorname{tang} \alpha_1 - \operatorname{tang} \alpha_2 = C,$$

das heisst constant bleiben muss. Ist $\alpha t = \pi$ geworden, also die Abscisse $a = \pi$, so ist $a = 2\pi - \alpha t$ zu setzen, und es wird sonach für die zweite Hälfte der Bewegung

$$(5) \qquad \operatorname{tang} \alpha_1 - \operatorname{tang} \alpha_2 = -C.$$

Die Ordinate b ist als Function der Zeit durch die Gleichung

$$\frac{b}{a} - \frac{b}{a-\pi} = C \quad \text{also} \quad b = \frac{C\alpha(\pi-\alpha)}{\pi}$$

bestimmt für die erste Hälfte der Bewegung, und durch die Gleichung

$$b = -\frac{C\alpha(\pi-\alpha)}{\pi}$$

für die zweite Hälfte. Der Eckpunkt bewegt sich demnach auf zwei Parabeln, die durch die Enden gehen, und deren Axe von der Mittellinie der Saite gebildet wird. Die höchste Elongation B findet in der Mitte statt; es ist

$$B = \pm C\frac{\pi}{4}.$$

Die Form der Saite ist zu jeder Zeit dargestellt durch

$$\eta = \frac{2}{\pi} C \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2} \sin n\alpha t \sin nx = \frac{8B}{\pi^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2} \sin n\alpha t \sin nx.$$

Zur Zeit $\alpha t = \pi$ geht die Saite durch die Gleichgewichtslage. Zu einer bestimmten Zeit t innerhalb der ersten Hälfte der Schwingung ist

$$y = \frac{C}{\pi}(\pi - \alpha t)x, \qquad (0 < x < \alpha t),$$

$$y = \frac{C}{\pi}\alpha t(\pi - x), \qquad (\alpha t < x < \pi).$$

Ein Punkt mit der Abscisse x vollzieht sonach eine ansteigende Bewegung mit der constanten Geschwindigkeit $\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{C}{\pi}\alpha(\pi - x)$; dieselbe dauert von der Zeit $\alpha t = 0$ bis $\alpha t = x$; alsdann kehrt die Geschwindigkeit plötzlich um, erhält den constanten negativen Werth $-\frac{C}{\pi}\alpha x$; mit derselben steigt der Punkt herab bis zu seiner tiefsten Lage unterhalb der Gleichgewichtslage, und kehrt dann wieder mit der anfänglichen, aufsteigenden Geschwindigkeit in die Anfangslage zurück.

Hieraus ersieht man, dass es nur eine Art der Bewegung mit einer Ecke giebt, und dass innerhalb dieser Art nur Unterschiede hinsichtlich der Grösse der Elongation — entsprechend den Werthen der Constante C — möglich sind.

§ 4.

Die Schwingungen mit beliebig vielen Ecken.

In derselben Weise lässt sich nun auch der Fall behandeln, dass die Saite im allgemeinen zu jeder Zeit aus $m+1$ Geraden besteht, so dass m Ecken vorhanden sind.

Bezeichnet man die Coordinaten derselben zu irgend einer Zeit mit $a_1, b_1; a_2, b_2; \ldots a_m, b_m$, so werden die Gleichungen der Geraden:

$$(1)\quad y = \frac{b_1}{a_1}x,\quad y = (x-a_1)\frac{b_2-b_1}{a_2-a_1} + b_1, \cdots y = (x-\pi)\frac{b_m}{a_m-\pi}.$$

Wir schreiben dieselben in der Form:

$$(2)\quad y = x \operatorname{tang} \alpha_1,\quad y = x \operatorname{tang} \alpha_2 + (b_1 - a_1 \operatorname{tang} \alpha_2), \cdots$$
$$\cdots y = x \operatorname{tang} \alpha_{m+1} - \pi \operatorname{tang} \alpha_{m+1}.$$

Die Reihe, welche zur Darstellung dieser gebrochenen Linie dient, erhält die Form

$$y = \sum A_n \sin nx$$

und es ist

$$(3)\quad A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi y \sin nx\, dx = \frac{2}{\pi n}\int_0^\pi \frac{\partial y}{\partial x}\cos nx\, dx$$
$$= \frac{2}{\pi n^2}[(\operatorname{tang}\alpha_1 - \operatorname{tang}\alpha_2)\sin na_1 + (\operatorname{tang}\alpha_2 - \operatorname{tang}\alpha_3)\sin na_2$$
$$+ \cdots + (\operatorname{tang}\alpha_m - \operatorname{tang}\alpha_{m+1})\sin na_m].$$

Es besteht nun wiederum der Satz, dass dieser Ausdruck gleich sein muss

$$(4)\quad a_n \cos n\alpha t + b_n \sin n\alpha t.$$

Wir wählen zur Zeit $t = 0$ einen Moment, in welchem die Abscisse a der ersten Ecke den Werth Null hat, die anderen Ecken mögen dann die Abscissen, $c_2, c_3, \ldots c_m$ haben, und zunächst alle in gleichem, positivem Sinne fortschreiten. Alsdann wird

$$(5)\quad a_1 = \alpha t,\ a_2 = c_2 + \alpha t, \cdots a_m = c_m + \alpha t.$$

Setzt man diese Werthe in den Ausdruck (3) ein und vergleicht man die Werthe (4) und (3), die bei allen Werthen von n einander gleich sind, so folgt als charakteristische Bedingung für die Bewegung, dass *die Differenzen der trigonometrischen Tangenten der Neigungswinkel je zweier auf einander folgender Geraden constant sein müssen;* es ist

$$(6)\quad \operatorname{tang}\alpha_1 - \operatorname{tang}\alpha_2 = C_1,\ \operatorname{tang}\alpha_2 - \operatorname{tang}\alpha_3 = C_2, \ldots$$
$$\ldots \operatorname{tang}\alpha_m - \operatorname{tang}\alpha_{m+1} = C_m.$$

Dass diese Differenzen constant sein müssen, und also die einzig möglichen Lösungen darstellen, folgt auch schon, weil gemäss der Differentialgleichung $\frac{\partial \eta}{\partial t}$ eine lineare Function von t sein muss, denn $\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$ ist Null. Zugleich geben diese Werthe mit $-\alpha$ im Falle eines vorrückenden und mit $+\alpha$ im Falle eines zurückgehenden Eckpunktes multiplicirt, die Differenzen der Geschwindigkeiten an, welche zu beiden Seiten der Ecke vorhanden sind.

Diese constanten Werthe erleiden aber plötzliche Aenderungen. Rückt eine Ecke in einen Endpunkt, wird also z. B. $a_m = \pi$, so ist der weitere Werth von a_m durch $2\pi - (c_m + \alpha t)$ zu ersetzen; d. h. wenn die letzte Strecke mit der Neigung α_{m+1} momentan verschwunden ist, tritt an Stelle des Werthes C_m der Werth $- C_m$. Wenn zwei Ecken a_i und a_k einander entgegenrücken, so verschwindet momentan die von ihnen bestimmte Strecke.

Nach der Begegnung an der Stelle c, sind a_i und a_k mit entgegengesetzten Geschwindigkeiten zu nehmen. Hatte a_i vorher den Werth $c_i + \alpha t$, a_k den Werth $c_k - \alpha t$ und findet also die Begegnung zur Zeit $\alpha t = \frac{1}{2}(c_k - c_i)$ statt, so erhält a_i nachher den Werth $c_k - \alpha t$, und a_k den Werth $c_i + \alpha t$. Dabei vertauschen sich also die Werthe C_i und C_k.

Im übrigen lassen sich folgende Eigenschaften allgemein angeben: Jede Strecke dreht sich bis zu ihrem momentanen Verschwinden um einen festen Punkt; tritt sie wieder hervor, so hat sich auch ihr Drehpunkt im allgemeinen geändert. Die Eckpunkte selbst beschreiben Parabeln (oder in speciellen Fällen Gerade). Die Bewegung hängt von $2m - 1$ Constanten ab, den m Werthen C_m und den $m - 1$ Werthen c.

Zur Erläuterung führe ich noch die Bewegung mit zwei Ecken und drei Geraden an. Wählt man zum Anfang der Zeit denjenigen Moment, in welchem die beiden Ecken vereinigt sind, und mit entgegengesetzten Geschwindigkeiten aus einander gehen, so sind innerhalb der ersten Hälfte der Schwingungsdauer drei Phasen zu unterscheiden. Ist c die Abscisse der vereinigten Eckpunkte und $c > \frac{\pi}{2}$, so wird während der Zeit $t = 0$ bis $\alpha t = \pi - c$

$$a_1 = c - \alpha t,\quad a_2 = c + \alpha t,\quad \operatorname{tang}\alpha_1 - \operatorname{tang}\alpha_2 = C_1,\quad \operatorname{tang}\alpha_2 - \operatorname{tang}\alpha_3 = C_2$$

und

$$A_n = \frac{2}{\pi n^2}\left[(C_1 + C_2)\sin nc\cos n\alpha t - (C_1 - C_2)\cos nc \sin n\alpha t\right]$$

Während dieser Zeit besteht die Saite aus den drei Geraden:

$$\text{(I)}\qquad \begin{aligned} y &= \frac{x}{\pi}\left[C_1(\pi - a_1) + C_2(\pi - a_2)\right], \\ y &= \frac{x}{\pi}\left[- C_1 a_1 + C_2(\pi - a_2)\right] + a_1 C_1, \\ y &= \frac{x - \pi}{\pi}\left[- C_1 a_1 - C_2 a_2\right]. \end{aligned}$$

Die mittlere Gerade dreht sich um den festen Punkt

$$x = \frac{\pi C_1}{C_1 - C_2},\quad y = \frac{C_1 C_2(\pi - 2c)}{C_1 - C_2}.$$

In der zweiten Phase rückt der zweite Knotenpunkt von der Ecke π aus wieder nach vorne, sie dauert, bis der erste Knotenpunkt in den Anfangspunkt der Saite gerückt ist, also bis zum Werthe $\alpha t = c$. Hier ist

$$a_1 = c - \alpha t,\quad a_2 = 2\pi - c - \alpha t,\quad \operatorname{tang}\alpha_1 - \operatorname{tang}\alpha_2 = C_1,$$
$$\operatorname{tang}\alpha_2 - \operatorname{tang}\alpha_3 = -C_2.$$

Während dieser Zeit besteht die Saite aus den drei Geraden:

$$\text{(II)}\qquad \begin{aligned} y &= \frac{x}{\pi}\,[C_1(\pi - a_1) - C_2(\pi - a_2)], \\ y &= \frac{x}{\pi}\,[-C_1 a_1 - C_2(\pi - a_2)] + a_1 C_1, \\ y &= \frac{x-\pi}{\pi}\,[-C_1 a_1 + C_2 a_2]. \end{aligned}$$

In der dritten Phase von $\alpha t = c$ bis $\alpha t = \pi$ ist

$$a_1 = \alpha t - c,\quad a_2 = 2\pi - c - \alpha t,\quad \operatorname{tang}\alpha_1 - \operatorname{tang}\alpha_2 = -C_1,$$
$$\operatorname{tang}\alpha_2 - \operatorname{tang}\alpha_3 = -C_2$$

und die Saite besteht aus den Geraden:

$$\text{(III)}\qquad \begin{aligned} y &= \frac{x}{\pi}\,[-C_1(\pi - a_1) - C_2(\pi - a_2)], \\ y &= \frac{x}{\pi}\,[C_1 a_1 - C_2(\pi - a_2)] - a_1 C_1, \\ y &= \frac{x-\pi}{\pi}\,[C_1 a_1 + C_2 a_2]. \end{aligned}$$

In der zweiten Hälfte der Bewegung bekommt die Saite die in Bezug auf die x-Axe und die Mittellinie symmetrisch umgekehrte Lage, wobei sich die Zeiten $\alpha t = \pi + \tau$ und $\alpha t = \pi - \tau$ entsprechen. Auch der Drehpunkt der mittleren Geraden, die zur Zeit $\alpha t = \pi$ momentan verschwunden war, wird ein anderer, nämlich

$$x = -\frac{\pi C_2}{C_1 - C_2},\quad y = -\frac{C_1 C_2(\pi - 2c)}{C_1 - C_2}.$$

Man erhält die drei Phasen (IV), (V) und (VI), wenn man in den Gleichungen (III) zuerst C_1 und C_2 vertauscht, alsdann an Stelle von C_1 den Werth $-C_1$, und schliesslich an Stelle von C_2 den Werth $-C_2$ einführt.

Ein besonderer Fall tritt ein, wenn $C_1 = C_2$ ist; alsdann bewegt sich die mittlere Gerade stets in paralleler Richtung. Die analytische Darstellung wird

$$\eta(t, x) = \frac{4}{\pi}\,C \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2} \sin nc \sin nx \cos n\alpha t$$

$$= \frac{2b}{(\pi - c)c} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2} \sin nc \sin nx \cos n\alpha t.$$

Es ist dies der Fall der *gezupften* Saite, bei welcher die Anfangsgeschwindigkeit Null ist. Ein anderer Fall ergiebt sich durch die Annahme $C_1 = - C_2$. Hier wird

$$\eta(t, x) = -\frac{4}{\pi} C \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2} \cos nc \sin nx \sin n\alpha t.$$

Die beiden Knotenpunkte sind zur Zeit $t = 0$ auf der Gleichgewichtslinie vereinigt; die anfänglichen Geschwindigkeiten sind auf der Strecke von 0 bis c gleich $\frac{2x}{\pi} \alpha C$, und auf der Strecke von c bis π gleich $-2 \frac{\pi - x}{\pi} \alpha C$. Aus diesen beiden Arten der Bewegung setzt sich die allgemeine bei zwei Eckpunkten zusammen.

Dresden, im Februar 1887.

Ueber das Gyroscop bei allgemeinster Wahl des zur Bewegung anregenden Momentankräftesystems.

[Mit einer lithographirten Tafel].

Von

W. Hess in München.

Das Problem der Bewegung eines schweren Umdrehungskörpers, welcher um einen festen Punkt seiner Axe rotirt, ist analytisch durch die bekannte Arbeit Lottner's*) und die im Wesentlichen damit übereinstimmenden eigenartigen Untersuchungen Jacobi's**) insoferne als gelöst zu betrachten, als man im Stande ist, auf Grund derselben die Lage des Systems der drei Hauptträgheitsaxen, welches den Körper zu ersetzen geeignet ist, gegen ein festes Coordinatensystem des Raumes in Function der Zeit und der Constanten des Problems zu formuliren. Eine geometrische Discussion scheint jedoch bislang nur der Fall des „gewöhnlichen Gyroscops" erfahren zu haben,***) d. i. eines Umdrehungskörpers, welcher durch eine blose Rotation um seine Axe in Bewegung gesetzt wurde, während für die Annahme eines ganz allgemein gewählten Momentankräftesystems weder die Bewegung dieser Axe noch die Gestalt der Poinsot'schen Kegel verfolgt sein dürften, noch auch weiterhin unseres Wissens die Aufstellung der Elemente der Euler'schen Rotation.

Diese dreifache Lücke auszufüllen ist Zweck der vorliegenden Arbeit. Es werden diesem Ziel entsprechend untersucht:

I. Die Bewegung der Axe des Gyroscops im Raume.

II. Die Formen des beweglichen Kegels der „Polodie" und des festen Kegels der „Herpolodie", durch deren Abrollen nach Poinsot die successive Ueberführung des rotirenden Körpers von einer ersten in eine zweite, endlich davon verschiedene Lage versinnlicht werden kann.

---

*) Reduction eines schweren, um einen festen Punkt rotirenden Revolutionskörpers auf die ellipt. Transcendenten. Crelle's J. 50, p. 111—125.

**) Fragments sur la rotation d'un corps. B. C. Gesammelte Werke, herausgegeben v. d. preuss. Akad. II, p. 477—514.

***) W. Hess. Ueber das Gyroscop. Diese Ann. XIX, p. 121—154.

III. Die Lage jener ausgezeichneten Axe des Raumes, längs welcher nach Euler eine einzige Drehung von endlicher Amplitude genügt, um sofort den Körper aus der ersten obigen Lage in die zweite zu transferiren, sowie die Grösse jener Amplitude.

Von den vorstehenden drei Abschnitten, nach denen sich der ziemlich umfangreiche Stoff gruppirt, ist durch neuere Arbeiten wohl nur der zweite, allerdings mehr in der Contour, berührt worden. Die betreffende Literatur wird bei den einschlägigen Paragraphen des Genaueren angeführt werden.

Fixirung des Problems.

Wir denken uns einen starren schweren Umdrehungskörper vom Gewichte Π, welcher sich um einen festen Punkt O seiner Umdrehungsaxe z' zu drehen vermag. Der Abstand des Schwerpunktes S des Körpers vom festen Punkte O sei γ, das Trägheitsmoment um die Hauptaxe Oz' der „Figur", C und A dasjenige um eine der unendlich vielen senkrecht zu Oz' geführten Hauptaxen der „Aequatorebene". Wählen wir unter den letzteren ein Paar senkrecht gelegener Axen Ox', Oy' aus, so ist bezüglich des Coordinatensystems $O\,x'\,y'\,z'$ die Lage unseres Systems eine unveränderliche, während die Lage desselben im Raume im Verlauf der Zeit t durch die Winkel bestimmt wird, welche eben die drei gewählten Coordinatenaxen mit drei festen orthogonalen Axen Ox, y, z des Raumes bilden. Von den letzteren stimme die positive z-Axe mit der Richtung der Schwerkräfte überein, während Ox und Oy in der Horizontalebene durch O so gelegen sein mögen, dass es einer Drehung um $+z$ im Sinne der anfänglich erfolgenden Bewegung bedarf, um $+x$ mit $+y$ zur Uebereinstimmung zu bringen. Die Cosinus der 9 Neigungswinkel zwischen den Axen des festen und des ihm congruenten beweglichen Systems der drei Hauptaxen entnehmen sich dem nachstehenden Schema:

	x'	y'	z'
x	a	b	c
y	a'	b'	c'
z	a''	b''	c''

Bezeichnen nun bezüglich der drei Hauptaxen p, q, r die Componenten der zur Zeit t statthabenden instantanen Drehgeschwindigkeit Θ, veranlasst durch die Einwirkung eines Momentankräftepaars G mit den analogen Componenten Ap, Aq, Cr, und ist $\Pi\gamma = P$ das *Maximal-*

moment der auf den Körper einwirkenden Schwerkräfte, so gelten für die Bewegung des letzteren die Euler'schen Gleichungen*)

$$(1)\qquad \begin{aligned} A\frac{dp}{dt} &= (A-C)qr - Pb'', \\ A\frac{dq}{dt} &= (C-A)rp + Pa'', \\ C\frac{dr}{dt} &= 0, \end{aligned}$$

aus welchen zunächst folgt

$$(2)\qquad \begin{aligned} r &= \text{const.} = n, \\ Cr &= \text{const.} = Cn. \end{aligned}$$

Mit den Winkelgeschwindigkeiten p, q, r sind die Neigungscosinus verknüpft durch die 9 Relationen**)

$$(3)\qquad \begin{aligned} \frac{da''}{dt} &= b''r - c''q \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \\ \frac{db''}{dt} &= c''p - a''r \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \\ \frac{dc''}{dt} &= a''q - b''p \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \end{aligned}$$

und es können durch Combination der zwei Gleichungssysteme (1), (3) und Integration leicht erhalten werden die Integrale der Flächen und der lebendigen Kraft

$$(4)\qquad \begin{aligned} Apa'' + Aqb'' + Crc'' &= l, \\ A(p^2+q^2) &= 2Pc'' + h, \end{aligned}$$

worin l und h die beiden willkürlichen Integrationsconstanten bedeuten.

Um die 9 Neigungscosinus, zwischen welchen die 6 Relationen der orthogonalen Transformation bestehen, auf drei noch willkürliche Grössen zu reduciren, kann man die sogenannten unsymmetrischen Euler'schen Winkel ϑ, ψ, φ einführen: ϑ ist der Winkel zwischen den Axen z' der Figur und z der Schwere, $=\text{arc}\cos c''$, ψ und φ die Winkel, welche von der festen Geraden x der Horizontalebene und der Hauptaxe x' des Aequators mit dem Schnitte ON dieser beiden Ebenen gebildet werden, ψ von ON aus entgegengesetzt, φ aber conform gerechnet der anfangs erfolgenden Bewegungsrichtung, welche als positiv dann verzeichnet werden soll, wenn sie für eine in $+z$ befindliche, gegen O blickende Person der Uhrzeigerbewegung entgegengesetzt**) erscheint.

Für die Anfangslage der Coordinatensysteme möge x' auf x zu liegen kommen, so dass die Werthe von ψ_0 und φ_0 beide Null sind,

*) S. etwa Poisson, traité de mécanique. t. II, n° 425.

**) Poisson, a. a. O. n°s 411. 425–428. 378.

während die Axen z' und y', in der festen Ebene yz gelegen, gegen die Axen z und y unter dem Anfangswerthe ϑ_0 von ϑ geneigt sein mögen.

Die Euler'schen Gleichungen schreiben sich durch Einführung von ϑ, ψ, φ, wie folgt*):

$$
\begin{aligned}
&Cn\cos\vartheta - A\sin^2\vartheta\,\frac{d\psi}{dt} = l,\\
(5)\qquad &A\sin^2\vartheta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + A\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = 2P\cos\vartheta + h,\\
&\frac{d\varphi}{dt} = n + \cos\vartheta\,\frac{d\psi}{dt}.
\end{aligned}
$$

Dieselben ergeben die Werthe der drei Euler'schen Winkel in Function der Zeit t und mit ihnen auch auf Grund bekannter Formeln sowohl die Winkelgeschwindigkeiten*) der momentanen Drehung als auch die 9 Neigungscosinus*) des beweglichen Systemes, sonach das ganze Wesen der Bewegung.

I.

Der von der Figuraxe im Raume beschriebene Kegel.

§ 1.

Der Winkel zwischen der Figuraxe und der Verticalen.

Durch Elimination der Grösse $\frac{d\psi}{dt}$ aus den zwei ersten Gleichungen (5) folgt für

$$\cos\vartheta = \xi$$

die Differentialgleichung

$$dt = -\frac{A\,d\xi}{\sqrt{A(2P\xi+h)(1-\xi^2)-(Cn\xi-l)^2}}$$

und durch Einführung der Lottner'schen Abkürzungen**)

$$
\begin{aligned}
&\frac{Ah+C^2n^2}{2AP} = 3\mu_1,\\
(6)\qquad &\frac{AP+Cnl}{AP} = 6\mu_2,\\
&\frac{Ah-l^2}{2AP} = 2\mu_3
\end{aligned}
$$

und Integration:

$$t = -\sqrt{\frac{A}{2P}}\cdot\int\frac{d\xi}{\sqrt{-\xi^3-3\mu_1\xi^2+6\mu_2\xi+2\mu_3}}.$$

*) Poisson, a. a. O. n^os 411. 425—428. 378.

**) a. a. O. p. 115 und 116.

Von den Wurzeln der cubischen Gleichung

$$(7) \qquad -\xi^3 - 3\mu_1\xi^2 + 6\mu_2\xi + 2\mu_3 = 0$$

sind, wie eine einfache Discussion zeigt, zwei zwischen -1 und $+1$, die dritte dagegen zwischen -1 und $-\infty$ gelegen. Lottner bezeichnet die letztere mit α_3, die ersteren mit α_1 und α_2 unter der Annahme $\alpha_1 > \alpha_2$. Wir wollen jedoch die Bezeichnungen α, α_1, α_0 wählen. Setzen wir

$$\mu_1^2 + 2\mu_2 = r^2, \qquad \mu_3 - 3\mu_1\mu_2 - \mu_1^3 = r^3 \cos x,$$

so ergiebt die trigonometrische Lösung der Gleichung (7) folgende Werthe*):

$$(8) \qquad \begin{aligned} \alpha_1 &= 2r\cos\frac{x}{3} - \mu_1, \\ \alpha_0 &= -2r\cos\frac{\pi+x}{3} - \mu_1, \\ \alpha &= -2r\cos\frac{\pi-x}{3} - \mu_1. \end{aligned}$$

In der That ist

$$(9) \qquad \begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_0 &= 4r\cos\frac{\pi+2x}{6}\cos\frac{\pi}{6} > 0, \\ \alpha_1 - \alpha &= 4r\cos\frac{\pi-2x}{6}\cos\frac{\pi}{6} > 0, \\ \alpha_0 - \alpha &= 4r\sin\frac{x}{3}\sin\frac{\pi}{3} > 0. \end{aligned}$$

Der Radicand $-(\xi-\alpha_1)(\xi-\alpha_0)(\xi-\alpha)$ bleibt stets positiv, solange sich ξ zwischen den Grenzen α_1 und α_0 bewegt. Letztere Werthe sind also die Grenzwerthe von $\cos\vartheta$, und es empfiehlt sich daher, den einen derselben als untere Grenze für das obige Integral anzunehmen. In der Lottner'schen Arbeit ist der grössere, α_1, gewählt. Da jedoch in der Theorie des gewöhnlichen Gyroscops d. i. eines Gyroscops, welches eine blosse Drehung um seine Figuraxe erfahren hat, die Anfangslage des Körpers zur Zeit $t_0 = 0$ naturgemäss durch die höhere Lage des Schwerpunktes, also den kleineren Werth des Neigungscosinus des Winkels ϑ, markirt ist, so scheint es zweckmässig, in Uebereinstimmung mit dieser speciellen Bewegungsart α_0 als unteren Grenzwerth für $\xi = \cos\vartheta$ zu nominiren.

Will man unter dieser Voraussetzung bei der Lottner'schen Transformation*)

$$(10) \qquad \begin{aligned} &\frac{\alpha_1 - \xi}{\alpha_1 - \alpha_0} = z^2, &\qquad &\frac{\alpha_1 - \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha} = \varkappa^2, \\ &m \cdot t = u, &\qquad &\frac{P}{2A}(\alpha_1 - \alpha) = m^2, \end{aligned}$$

*) a. a. O. p. 115 und 116.

welche das Integral in die Normalform überführt, bleiben, so hat man nur nöthig, in der inversen Gleichung für ξ statt des Argumentes u das um die Modulfunction K vermehrte Argument $u+K$ zu schreiben, wodurch erhalten wird

$$\begin{aligned}(11)\qquad \cos\vartheta &= \alpha_1 - (\alpha_1 - \alpha_0)\sin^2 \operatorname{am}(u+K)\\ &= \alpha_1 \cos^2 \operatorname{am}(u+K) + \alpha_0 \sin^2 \operatorname{am}(u+K).\end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass der Winkel ϑ periodisch ist mit der Periode $2K$ von u, also der gleiche für die Zeiten t, $t \pm \frac{2K}{m}$, $t \pm 2\cdot\frac{2K}{m}$, $\cdots$ — am grössten, nämlich ϑ_0, aus $\cos\vartheta_0 = \alpha_0$, für $t=0$, $\frac{2K}{m}$, $\frac{4K}{m}$, $\cdots$, am kleinsten, nämlich ϑ_1, aus $\cos\vartheta_1 = \alpha_1$, für $t = \frac{K}{m}$, $\frac{3K}{m}$, $\cdots$. D. h. aber:

Die Figuraxe beschreibt im Raume um den Unterstützungspunkt einen Kegel, welcher stets zwischen zwei mit ihm concentrischen Kreiskegeln um die Verticale eingeschlossen bleibt. Die halben Winkelöffnungen der letzteren sind durch die Werthe ϑ_0 und ϑ_1 gegeben, von welchen immer der Winkel ϑ_0, von der positiven Axe der Verticalen gerechnet, der grössere ist.

§ 2.

Die Normalanfangslage der Figuraxe.

Das Verhalten der beiden Grenzkegel, innerhalb welcher sich die Bewegung der Figuraxe vollzieht, ist nach dem bisher Gesagten gänzlich bedingt durch dasjenige der zwei extremen Werthe α_0 und α_1. Nun ist aber das Product der 3 Wurzeln α_1, α_0, α der cubischen Gleichung (7)

$$\alpha_1\alpha_0\alpha = 2\mu_3 = \frac{Ah - l^2}{2AP}$$

und $\alpha < -1$, so dass

$$\alpha_1\alpha_0 \gtreqless 0$$

wird, je nachdem

$$Ah - l^2 \lesseqgtr 0$$

ist.

Um diese Bedingung besser deuten zu können, entwickeln wir die Constanten h der lebendigen Kraft und l der Flächen, indem wir nach dem Vorgange Poisson's*) das zur Bewegung Anlass gebende Momentankräftepaar G der Bewegungsgrössen allgemein in drei Componenten zerlegen. Die erste derselben, wirkend um die Hauptträgheitsaxe Oz' der Figur, hätte eine *blosse Drehung des Systems um*

*) a. a. O. Nr. 428.

diese Axe mit der Winkelgeschwindigkeit n zur Folge und ist Cn; die zweite, N, wirkend um eine zu Oz' senkrecht geführte horizontale Axe ON, welche nichts anderes ist als die Linie der Knoten, würde eine *Neigung des Systems zum Pendeln* nach sich ziehen; die dritte endlich, M, wirkend um eine senkrecht zu den Axen ON und Oz' gelegene Axe OM, repräsentirt einen, *die Figuraxe senkrecht treffenden horizontalen Stoss*, so dass also, da die Axen Oz', ON und OM Hauptaxen sind, die allgemeinste Bewegung des Gyroscops als aus drei gleichzeitig eintreffenden Bewegungsarten bestehend angesehen werden kann: aus der *Eigendrehung um die Axe der Figur*, aus der Bewegung der *Nutation* und aus der Bewegung der *Präcession*.

Zufolge dieser Zerlegung schreibt sich für die Componente G' des momentan wirkenden Kräftepaares G senkrecht der Figuraxe, also bezüglich des Aequators,

$$G'^2 = G^2 - C^2 n^2 = \mathsf{M}^2 + \mathsf{N}^2,$$

zufolge der zweiten Gleichung (4) aber ist

$$G'^2 = A^2(p^2 + q^2) = 2AP\cos\vartheta + Ah,$$

also wird

$$Ah = \mathsf{M}^2 + \mathsf{N}^2 - 2AP\cos\vartheta.$$

Andererseits bemerken wir, dass die cubische Gleichung (7) für die Werthe $\xi = \alpha_0 = \cos\vartheta_0$ und $\xi = \alpha_1 = \cos\vartheta_1$ erfüllt sein muss, so dass die Relationen bestehen

$$\alpha_0^3 + 3\mu_1\alpha_0^2 - 6\mu_2\alpha_0 - 2\mu_3 = 0,$$
$$\alpha_1^3 + 3\mu_1\alpha_1^2 - 6\mu_2\alpha_1 - 2\mu_3 = 0.$$

Setzt man in diese zwei Gleichungen die Ausdrücke für die μ zufolge der Abkürzungen (6) ein, so kommen nach einfacher Reduction für die Constante Ah die Gleichungen

$$Ah = \mathsf{M}_0^2 - 2AP\cos\vartheta_0 = \mathsf{M}_1^2 - 2AP\cos\vartheta_1,$$

worin die speciellen Werthe der horizontal gerichteten Stosskraft M für die Lagen ϑ_0 und ϑ_1 durch die entsprechenden Indices 0 und 1 angedeutet sind. Wir können demzufolge schreiben

$$(12)\qquad Ah \begin{cases} = \mathsf{M}^2 + \mathsf{N}^2 - 2AP\cos\vartheta, \\ = \mathsf{M}_0^2 - 2AP\cos\vartheta_0, \\ = \mathsf{M}_1^2 - 2AP\cos\vartheta_1. \end{cases}$$

Durch Vergleichung ergiebt sich sofort

$$\mathsf{N}_0 = 0, \quad \mathsf{N}_1 = 0$$

und zufolge der obigen Beziehungen für G', sowie der Voraussetzung $\cos\vartheta_1 > \cos\vartheta_0$:

$$(G_1'^2 =)\, \mathsf{M}_1^2 > (G_0'^2 =)\, \mathsf{M}_0^2.$$

Wir schliessen hieraus — was auch theilweise aus der Thatsache erkannt werden kann, dass $\frac{d\vartheta}{dt}$ für $\vartheta = \vartheta_0$ sowohl als für $\vartheta = \vartheta_1$ Null ist — das Folgende:

In den beiden extremen Lagen, in welchen der Schwerpunkt eines Gyroscops am höchsten und am tiefsten liegt, besitzt das Gyroscop keinerlei Nutationsbestreben, sondern nur die Eigendrehung um seine Figuraxe und die Tendenz zur Präcession, und zwar erreicht die letztere in diesen zwei Lagen ihre Grenzwerthe, indem sie in der höchsten Lage des Schwerpunktes am schwächsten, in der tiefsten Lage desselben am stärksten auftritt. Die Axe des die Bewegung erzeugenden Momentankräftepaares fällt beidesmal in die durch die Axe der Figur laufende Verticalebene.

Umgekehrt können wir behaupten:

Ertheilt man einem Gyroscop die allgemeinste Anregung zur Bewegung, bestehend aus einer Drehung um seine Figuraxe, aus einer Anregung zum Pendeln und aus einem die Figuraxe senkrecht treffenden horizontalen Stosse, so ist die von der Figuraxe innegehabte Lage (ϑ)*, wie immer dieselbe auch gewählt sein möge, stets zwischen der höchsten Lage* ϑ_0 *und der tiefsten Lage* ϑ_1*, welche dieselbe überhaupt einnehmen kann, enthalten. Nur dann, wenn eine Anregung zum Pendeln nicht ertheilt wurde, fällt die jeweilige Lage* (ϑ) *mit einer der Grenzlagen zusammen.*

Welche Lage dies ist, ob eine höchste oder niedrigste, lässt sich analytisch aus der Existenz der Gleichungen (12) allein nicht ableiten, indem ja dieselben ebensogut für die Werthe M_0, ϑ_0 als auch für M_1, ϑ_1 Giltigkeit besitzen. Man bedarf hiezu der Grösse l, welche nach der ersten Gleichung (4) die *constante Componente des afficirenden Momentankräftepaares G bezüglich der Richtung der Schwere* bedeutet und für sich also einen horizontalen Stoss insinuirt, welcher die durch die Figuraxe geführte Verticalebene in der Horizontalprojection der Figuraxe senkrecht treffen würde. Bezeichnet u den Neigungswinkel zwischen der Kräftepaaraxe und der Axe der Figur, gezählt von dieser im selben Sinne wie ϑ von der positiven Verticalen aus, so ist also allgemein

$$(13) \qquad l = \begin{cases} G \cos(\vartheta + u) = Cn \cos\vartheta - \mathsf{M} \sin\vartheta, \\ G_0 \cos(\vartheta_0 + u_0) = Cn \cos\vartheta_0 - \mathsf{M}_0 \sin\vartheta_0, \\ G_1 \cos(\vartheta_1 + u_1) = Cn \cos\vartheta_1 - \mathsf{M}_1 \sin\vartheta_1, \end{cases}$$

und es ist nach dem Bisherigen ersichtlich, dass in das allgemeinste Problem der Bewegung unseres starren schweren Rotationskörpers folgende Constanten eingehen: 1) die Hauptträgheitsmomente des Körpers, A und C; 2) das Maximalmoment der Schwere, P; 3) die Anfangslage (ϑ) der Figuraxe gegen die Verticale, die wir ganz beliebig

voraussetzen und demgemäss als *natürliche Anfangslage* bezeichnen wollen; 4) das auf den Körper in dieser Lage einwirkende Momentankräftepaar der Bewegungsgrössen (G), nach Grösse und Richtung gegeben durch die Constanten Cn, Ah und l der Drehung um seine Figuraxe, der lebendigen Kraft und der Bewegungsgrössen parallel der Horizontalebene — oder, was dasselbe ist, durch die Werthbeträge Cn, (M) und (N) der Drehung um die Figuraxe, der Anregungen zur Präcession und Nutation.

Nun bestehen die Gleichungen

$$(14)\quad \begin{aligned} \mathsf{M}_{0,1}^2 - 2AP\cos\vartheta_{0,1} &= Ah = (\mathsf{M}^2) + (\mathsf{N}^2) - 2AP\cos(\vartheta),\\ \mathsf{M}_{0,1}\sin\vartheta_{0,1} - Cn\cos\vartheta_{0,1} &= l \;\;= (\mathsf{M})\sin(\vartheta) \;\;- Cn\cos(\vartheta), \end{aligned}$$

welche gleichmässig für M_0, ϑ_0 und M_1, ϑ_1 gelten und also dazu dienen, aus den Daten (M), (N) der ad libidum gewählten Lage (ϑ) sowohl die Daten M_0, ϑ_0 der höchsten als jene M_1, ϑ_1 der tiefsten Lage herauszurechnen und dadurch die Mitführung der Constanten (N) ganz entbehrlich zu machen.

Durch Elimination der Grösse $\mathsf{M}_{0,1}$ erfolgt aus denselben eine cubische Gleichung für $\cos\vartheta_{0,1}$, welche keine andere ist, als unsere frühere Gleichung (7). Von den zwei Wurzelwerthen derselben, welche zwischen den Grenzen $+1$ und -1 liegen, ist der kleinere $\cos\vartheta_0$, der grössere $\cos\vartheta_1$ und durch Substitution derselben in die zweite der Gleichungen (14) wird die Grösse der Momentanstosskräfte M_0 und M_1 eindeutig erhalten. Da durch die Gleichungen (8) die Werthe von $\cos\vartheta_0$ und $\cos\vartheta_1$ durch die Grössen Ah und l, oder, was dasselbe ist, durch die Beträge (M), (N) und (ϑ) ausgedrückt vorliegen, so ist also der vorstehende Process jederzeit anwendbar. Insbesondere können wir die Constanten (M), (N), (ϑ) durch die zwei neuen Constanten M_0 und ϑ_0 durchaus ersetzen, also die *natürliche Anfangslage* des Systems auf eine neue Anfangslage reduciren, welche wir die *reducirte, charakteristische* oder auch *normale Anfangslage* nennen wollen. Im Gegensatze hiezu würden M_1 und ϑ_1 die *Endlage* des Systems repräsentiren.

Nach den vorstehenden Entwicklungen ist die Reduction auf die Normalanfangslage analytisch völlig bestimmt. Um jedoch bequem und rasch entscheiden zu können, ob ein Gyroscop aus seiner beliebig gewählten natürlichen Lage im Verlauf der nächsten Zeit gegen seine höchste oder tiefste Lage angeht, verfährt man am besten auf synthetischem Wege.

Es verdient zunächst hervorgehoben zu werden, dass sich verhält

$$Ap : Aq = p : q,$$

was in Verbindung mit einem vorhergehenden Satze das Folgende aussagt:

Während der ganzen Zeitdauer der Bewegung fällt die Axe des momentan anregenden Kräftepaares G mit der Axe der durch dasselbe hervorgerufenen instantanen Drehung Θ *und der Axe der Figur* z' *stets in dieselbe Ebene. Die letztere ist für die höchste und tiefste Lage des Gyroscops zugleich eine Verticalebene.*

Für die Winkel u und i der Figuraxe z' gegen die Axen G und Θ erhält man

$$\operatorname{tg} u = \frac{Cn}{A\sqrt{p^2+q^2}}, \quad \operatorname{tg} i = \frac{n}{\sqrt{p^2+q^2}} = \frac{An}{A\sqrt{p^2+q^2}} \quad \text{d. h.}$$

Es liegt die Axe des Kräftepaars oder jene der Drehung näher an der Axe der Figur, je nachdem das Trägheitsmoment um die letztere kleiner oder grösser ist als das Trägheitsmoment des Körpers um eine der Hauptaxen des Aequators.

Nun bilden ganz allgemein bei der Rotation eines starren Körpers um einen festen Punkt die durch die Rotation Θ erzeugten Schwungkräfte ein Kräftepaar, welches zugleich senkrecht steht auf der Axe der Drehung Θ und des sie erzeugenden Paares G, hier also auch senkrecht auf der Axe z'. D. h.

Die Axe des durch die instantane Drehung des Gyroscops hervorgerufenen Paares der Centrifugalkräfte fällt stets in die Ebene des Aequators, und für die normale Anfangs- und Endlage desselben in die Linie der Knoten.

Die Lage dieser Axe im Aequator klärt uns nun offenbar darüber auf, ob in dem dem betrachteten Zeitpunkte (t) folgenden Momente ein Sinken oder Heben der Figuraxe eintritt, ob also das Gyroscop aus der beliebigen Anfangslage (ϑ) seiner tiefsten oder höchsten Lage zusteuert. Zerlegt man nämlich die Grösse des Kräftepaares (G) in zwei Componenten, die eine $(G)_1$ um die Drehungsaxe (Θ), die andere $(G)_2$ senkrecht zu derselben, so ist bekannt, dass *die Axe* γ *des Paares der Schwungkräfte, längs* (Θ) *um einen Viertelkreis im Sinne der erfolgten Bewegung gedreht, mit der Componente* $(G)_2$ *des Kräftepaares* (G) *zum Zusammenfallen gebracht wird.*

Darnach ist man für jede beliebige Anfangslage (ϑ) des Gyroscops über die Stellung des Paares der Schwungkräfte orientirt und erfährt aus derselben leicht, ob dieselbe die Tendenz besitzen, den Körper zu heben oder zu senken.

Wir schliessen diesen Excurs über die Normalanfangslage eines Gyroscops mit dem Bemerken, dass nach den vorstehenden Entwicklungen zu jeder irgendwie gegebenen Anfangsstellung (ϑ), (M), (N) eine höchste Lage ϑ_0, M_0 gefunden werden kann, dass aber der umgekehrte Schluss nicht a priori erlaubt ist: es scheint denkbar, dass für zwei vorgegebene Werthe ϑ_0, M_0 eines der Elemente (ϑ), (M), (N),

speciell eines der beiden letzteren, imaginär würde. Der folgende Abschnitt wird diese Frage klar stellen; in demselben ist, wie überhaupt von jetzt ab, unter der Anfangslage immer die normale verstanden.

§ 3.

Gegenseitiges Verhalten von Anfangs- und Endlage.

Nach den Deutungen, welche im vorigen Paragraphen die Grössen h und l erfahren haben, greifen wir zurück auf die drei eingangs desselben verzeichneten Relationen, welche das Verhalten der Grenzwerthe $\alpha_0 = \cos\vartheta_0$ und $\alpha_1 = \cos\vartheta_1$ gegen einander bestimmen. Es wurde daselbst gefunden, dass

$$\cos\vartheta_0 \cdot \cos\vartheta_1 \gtreqless 0$$

wird, je nachdem sich

$$Ah - l^2 \lesseqgtr 0$$

zeigt.

In die letztere Differenz führen wir entweder die *Minimalstosskraft* M_0 oder das Totalkräftepaar G_0 in der *Normalanfangslage* ein, welches gegen die Figuraxe z' unter einem Winkel μ_0 — gezählt von z' gegen G_0 im selben Sinne wie ϑ_0 von z gegen z' — geneigt ist.

Wir erhalten dann verschieden gestaltete Formeln, von denen die einfachste wohl die folgende ist, welche durch die Einführung der Werthe $l = G_0 \cos(\vartheta_0 + u_0)$, $\mathsf{M}_0 = G_0 \sin u_0$ entsteht:

$$(15)\qquad Ah - l^2 \equiv -\cos\vartheta_0 \cdot [G_0^2 \cos(\vartheta_0 + 2u_0) + 2AP] \lesseqgtr 0.$$

Ist $Ah - l^2 < 0$, so besitzen $\cos\vartheta_0$ und $\cos\vartheta_1$ gleiches Zeichen, entweder beide positives oder beide negatives; ist $Ah - l^2 > 0$, so besitzen $\cos\vartheta_0$ und $\cos\vartheta_1$ entgegengesetzte Zeichen, und zwar, da die Differenz $\cos\vartheta_1 \cdot \cos\vartheta_0 > 0$ bleiben soll, $\cos\vartheta_0$ negatives und $\cos\vartheta_1$ positives Zeichen; für $Ah - l^2 = 0$ ist entweder $\cos\vartheta_0$ oder der zweite Factor in der Klammer gleich Null.

Da die obigen Systeme von Ungleichungen reciprok sind, so müssen diese Bemerkungen auch umgekehrt Giltigkeit besitzen:

Für $\cos\vartheta_0 = 0$ ist nun in der That auch $Ah - l^2 = 0$ und für $\cos\vartheta_0 < 0$ entscheidet der Ausdruck $G_0^2 \cos(2u_0 + \vartheta_0) + 2AP \lesseqgtr 0$ unzweideutig darüber, ob $\cos\vartheta_1 \gtreqless 0$ ist, dagegen muss für $\cos\vartheta_0 > 0$ nothwendig auch $\cos\vartheta_1 > 0$ und also $Ah - l^2 < 0$ oder $G_0^2 \cos(\vartheta_0 + 2u_0) + 2AP > 0$ sein. Diese Ungleichung steht deshalb nicht auf der Stufe der vorhergehenden, welche eben blosse Bedingungen dafür abgeben, dass irgend ein Fall eintreten kann oder nicht — sie ist eine nothwendige Beschränkung, welche statthaben muss. Nun ist zwar der zweite Term

des linksseitigen Ausdruckes wesentlich positiv, das erste Glied kann jedoch negativ werden — je nach der Grösse des Winkels $\vartheta_0 + 2u_0$ — und zu dem, absolut genommen, grösser als das zweite — je nach der Intensität von G_0. Bei den verschiedenen Lagen, welche die Axe des Paares G_0 annehmen kann, gestaltet sich das Ergebniss offenbar am ungünstigsten für $2u_0 + \vartheta_0 = \pi$; für diesen aber muss noch immer $-G_0^2 + 2AP > 0$ d. h.

$$G_0^2 < 2AP \tag{16}$$

sein. P ist das Moment der Schwerkräfte, welche auf das Gyroscop wirken bei horizontaler Lage der Figuraxe, $P = \Pi\gamma$, und $2P$ stellt die Arbeit vor, welche geleistet worden wäre, wenn sich der Schwerpunkt des Gyroscops von seiner Lage in der positiven Axe der Verticalen bis zur Lage in der negativen Axe derselben gehoben hätte, $2P = \Pi\gamma(\cos 0^0 - \cos\pi)$ mit andern Worten: P ist das *Maximalmoment* der Schwere und $2P$ die *Maximalarbeit*, welche überhaupt auftreten.

Fassen wir das Bisherige zusammen, so können wir sagen:

Befindet sich der Schwerpunkt eines Gyroscops in seiner (normalen) Anfangslage unterhalb des Unterstützungspunktes, so muss er auch stets unterhalb desselben verweilen. Ist derselbe zu Anfang in der durch den festen Punkt geführten Horizontalebene gelegen, so kann er seine höchste Lage auch nur wieder in dieser Ebene erreichen. Wird dagegen die Anfangslage über dem Unterstützungspunkte gewählt, so kann der Schwerpunkt entweder beständig oberhalb dieses Punktes bleiben, oder in seiner tiefsten Lage die Horizontalebene durch den letzteren gerade erreichen, oder endlich besagte Ebene periodisch durchschneiden, je nachdem zwischen den Constanten des Gyroscops, der Anfangslage desselben und den Elementen des anregenden Kräftepaares eine der drei Relationen (15) *erfüllt ist*

$$G_0^2 \cos(\vartheta_0 + 2u_0) + 2AP \lesseqgtr 0.$$

Aus den obigen Bemerkungen, welche das Zeichen von $Ah - l^2$ aus denjenigen der Grenzcosinus zu bestimmen suchten, folgt:

Sowohl jede Lage des Schwerpunktes oberhalb als auch in der der Horizontalebene durch den Unterstützungspunkt kann als normale Anfangslage desselben genommen werden, wie immer auch das den Körper in dieser Lage afficirende Momentankräftepaar gewählt sein möge. Soll dagegen jede beliebig unterhalb des Unterstützungspunktes vorgegebene Lage der Figuraxe eine normale Anfangslage vorstellen, so darf das in dieser Lage einwirkende Paar an Intensität nie grösser sein als das geometrische Mittel aus dem Trägheitsmoment des Gyroscops senkrecht der Axe der Figur in die bei dem Problem überhaupt mögliche Maximalarbeitsgrösse,

$$G_0^2 < 2AP.$$

Diese Bedingung ist nothwendig, aber auch hinreichend. Denn ist $2AP > G_0^2$, so ist sicher für alle Fälle auch

$$2AP + G_0^2 \cdot \cos(\vartheta_0 + 2u_0) > 0.$$

Die vorstehenden Sätze involviren bereits eine Reihe von Unterscheidungen; fügen wir derselben noch die Annahme bei, dass ϑ_0 und ϑ_1 möglicherweise einmal Null oder einander gleich oder auch entgegengesetzt gleich werden können, so verzeichnen wir also eine ziemliche Fülle von Möglichkeiten, in übersichtlicher Weise durch folgendes Schema dargestellt:

$$\begin{array}{lll}
\text{I.} & \vartheta_0 = 0 & \vartheta_1 = 0 \\
\text{II.} & \vartheta_0 < \frac{\pi}{2} & \vartheta_1 < \frac{\pi}{2} \, \{\vartheta_1 = 0 \\
\text{III.} & \vartheta_0 = \frac{\pi}{2} & \vartheta_1 < \frac{\pi}{2} \, \{\vartheta_1 = 0 \\
\text{IV.} & \vartheta_0 > \frac{\pi}{2} & \vartheta_1 > \frac{\pi}{2} \\
\text{V.} & \vartheta_0 > \frac{\pi}{2} & \vartheta_1 = \frac{\pi}{2} \\
\text{VI.} & \vartheta_0 > \frac{\pi}{2} & \vartheta_1 < \frac{\pi}{2} \begin{cases} \vartheta_1 = \pi - \vartheta_0 \\ \vartheta_1 = 0 \end{cases} \\
\text{VII.} & \vartheta_0 = \pi & \vartheta_1 \begin{cases} = \pi \\ > \frac{\pi}{2} \\ = \frac{\pi}{2} \\ < \frac{\pi}{2} \\ = 0 \end{cases} \\
\text{VIII.} & \vartheta_0 = \vartheta_1. &
\end{array}$$

Diese Voraussetzungen sollen nun in den folgenden Paragraphen eine nähere Discussion erfahren.

§ 4.

Untersuchung der verschiedenen Möglichkeiten.

I. $\vartheta_0 = 0$, $\vartheta_1 = 0$.

Soll die Anfangslage der Figuraxe eines Gyroscops die positive Axe der Verticalen sein, so muss, da $\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_0 > 0$ und überhaupt $\cos\vartheta - \cos\vartheta_0 > 0$ erkannt wurde, ϑ_1 und überhaupt jedes ϑ identisch mit $\vartheta_0 = 0$ sein d. h. die Figuraxe muss in der verticalen Hängelage verharren. Für $\cos\vartheta = 1$, $\sin\vartheta = 0$, $\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right) = 0$ ergeben aber die Gleichungen (5) erstens $Cn = l$, was der analytische Ausdruck

für die Coincidenz von Figuraxe und Verticale ist, zweitens $2AP+Ah=0$, was zufolge der zweiten Gleichung (12) nach sich zieht $M_0 = 0$, und drittens $\frac{d(\varphi-\psi)}{dt} = n$. M_0 ist aber, wie bekannt, der horizontal gerichtete Momentanstoss und $\varphi - \psi$ ist der Winkel zwischen der Hauptaxe x' des Aequators und ON der Linie der Knoten, vermindert um den Winkel zwischen der letzteren und einer festgewählten Axe der Horizontalebene d. h. also der Winkel zwischen x' und x selbst. D. h. *soll die positive Richtung der Verticalen Normalanfangslage für die Figuraxe eines Gyroscops sein, so darf bloss eine Drehung um diese Axe, nicht aber ein seitlicher Stoss gewirkt haben. Die Figuraxe verharrt in ihrer verticalen Lage, und das System dreht sich um dieselbe wie um eine feste Axe mit der ertheilten constanten Winkelgeschwindigkeit.*

II. $\vartheta_0 < \frac{\pi}{2}$, $\vartheta_1 < \frac{\pi}{2}$.

Für diesen Fall gilt die im vorigen Abschnitte definirte beschränkende Bedingung (16) $G_0^2 < 2AP$. Solange dieselbe Giltigkeit besitzt, kann jede Lage ϑ_0 der Figuraxe als normale Anfangslage betrachtet werden. Die beiden durch ϑ_0 und ϑ_1 bestimmten Grenzkegel erscheinen beide um die positive Axe der Verticalen beschrieben; insbesondere kann der innere, durch ϑ_1 definirte, in die Verticalaxe selbst übergehen, für

1. $\vartheta_1 = 0$. Hiefür muss zufolge des Werthes von l der Gleichungen (13) $Cn - l = 0$ sein, oder auch

$$(18) \qquad Cn \sin\frac{\vartheta_0}{2} + M_0 \cos\frac{\vartheta_0}{2} = 0.$$

Cn und l sind aber die Componenten des attaquirenden Paares G_0 bezüglich der Axen der Figur und Schwere und die Gleichung (18) kann nur für ein Werthepaar Cn, M_0 erfüllt sein, welches entgegengesetzte Zeichen aufweist. Wir sehen also:

Soll die Figuraxe eines Gyroscops aus ihrer spitzen Anfangslage ϑ_0 die positive Verticalaxe als Endlage erreichen, so ist nothwendig und hinreichend, dass die Axe des zur Bewegung Anlass gebenden Momentankräftepaars den Winkel ϑ_0 oder auch dessen Scheitelwinkel halbire. In beiden Fällen sind das Drehmoment um die Axe der Figur und das horizontale Stossmoment senkrecht derselben, aus welchen sich das totale Kräftepaar zusammensetzt, entgegengesetzt gerichtet gewesen.

Umgekehrt kann man behaupten:

Wirkt auf die unterhalb des Unterstützungspunktes gewählte Anfangslage eines Gyroscops eine Drehung um die Axe der Figur und ein senkrecht derselben gerichteter horizontaler Stoss ein, dessen Sinn mit demjenigen der ertheilten Drehung übereinstimmt, so kann der Schwerpunkt des Gyroscops niemals die Verticale passiren.

III. $\vartheta_0 = \frac{\pi}{2}$, $\vartheta_1 < \frac{\pi}{2}$.

Diese Annahme kann insoferne noch unter den vorhergehenden Hauptfall gerechnet werden, als die Endlage ϑ_1 durch einen spitzen Winkel markirt wird, *eine beschränkende Bedingung ist dagegen bei ihr nicht mehr vorhanden.* Der äussere Grenzkegel der Figuraxe ist durchaus in die Horizontalebene durch den festen Punkt übergegangen; der innere kann wieder in einem speciellen Falle auf die nach unten gerichtete Axe der Schwere zusammenschrumpfen,

1. $\vartheta_1 = 0$. Wie im vorigen Unterfalle halbirt G_0 den Winkel ϑ_0; dieser aber ist hier ein rechter und es schreibt sich daher die Gleichung (18) einfacher:

(19) $$Cn + \mathsf{M}_0 = 0.$$

D. h. *Liegt der Schwerpunkt eines Gyroscops im Anfange der Bewegung in der durch den fixen Punkt laufenden Horizontalebene und will man erreichen, dass die tiefste Lage desselben vertical unter den Unterstützungspunkt falle, so hat man nur nöthig, dem Gyroscop eine Drehung um seine Axe und gleichzeitig einen senkrecht der letzteren gerichteten horizontalen Stoss zu ertheilen, dessen Moment an Grösse dem Drehmomente genau gleich, dessen Sinn aber demjenigen der Drehung entgegengesetzt ist.*

IV. $\vartheta_0 > \frac{\pi}{2}$, $\vartheta_1 > \frac{\pi}{2}$.

Soll der Schwerpunkt eines über den Unterstützungspunkt gestellten Gyroscops sich stets oberhalb dieses Punktes bewegen, so muss man die Intensität G_0 des anfänglichen Kräftepaares und die Neigung u_0 zwischen der Axe desselben und der Figuraxe der Bedingung (15) zufolge wählen

$$G_0^2 \cos(\vartheta_0 + 2u_0) + 2AP < 0.$$

Der zweite Summand der linken Seite ist durchweg positiv, der erste Summand muss also negatives Zeichen erhalten, falls die Bedingung überhaupt realisirbar sein soll. Daraus folgt, dass unbedingt $\vartheta_0 + 2u_0 > \frac{\pi}{2}$ und $< \frac{3\pi}{2}$ sein muss. Diese Bedingungen sind nothwendig, aber nicht hinreichend: es muss, damit die obige Summe sicher negativ sei, noch $G_0^2 > 2AP$ sein. Erinnern wir uns, dass gemäss der Festsetzung im § 2 der Winkel u_0 von uns gezählt wurde von der Figuraxe gegen die Kräftepaaraxe genau im selben Sinne wie der Winkel ϑ_0 von der unteren Hälfte der Verticalen gegen die Figuraxe, so können wir also für den vorliegenden Fall folgenden Satz aufstellen:

Construirt man für die oberhalb des Unterstützungspunktes O gewählte Anfangslage der Figuraxe eines Gyroscops in der Ebene der letzteren und der Verticalen eine Gerade durch O, welche gegen die

Figuraxe um den doppelten Winkel geneigt ist, wie die Axe des anregenden Kräftepaares, so giebt die Lage der entstandenen Geraden G_0' in erster Linie darüber Aufschluss, ob der Schwerpunkt des Gyroscops stets oberhalb des festen Punktes verweilen kann oder nicht: derselbe muss über die Horizontalebene des Unterstützungspunktes nothwendigerweise heruntergehen, wenn die construirte Axe G_0' unter oder in diese Ebene fiel, und es kann nur dann ständig über der Horizontalebene verbleiben, wenn auch die construirte Axe G_0' über die Horizontalebene zu liegen kam, einerlei, wie gross zunächst die Intensität des auf den Körper einwirkenden Kräftepaars vorausgesetzt gewesen sein möge. Soll das Gyroscop durchaus über der Horizontalebene durch den festen Punkt verweilen, so ist die Intensität des Kräftepaares noch entsprechend der Bedingung zu wählen

$$G_0^2 \cdot |\cos(\vartheta_0 + 2u_0)| > 2AP,$$

und es tritt der gewünschte Fall zweifellos nur dann ein, wenn $G_0^2 > 2AP$ d. h. wenn die Intensität des anregenden Paares grösser war als das geometrische Mittel aus dem Trägheitsmomente des Systems senkrecht der Axe der Figur in die überhaupt mögliche Maximalarbeitsgrösse.

V. $\vartheta_0 > \frac{\pi}{2}$, $\vartheta_1 = \frac{\pi}{2}$.

Soll der Schwerpunkt eines Gyroscops, dessen charakteristische Anfangslage über dem Unterstützungspunkte angenommen wurde, gerade bis zur Horizontalebene durch den Unterstützungspunkt heruntergehen, um sich von da ab wieder zu heben, so muss

$$G_0^2 \cos(\vartheta_0 + 2u_0) + 2AP = 0 \tag{20}$$

sein. Die Erfüllung dieser Gleichheit erfordert offenbar wieder genau dieselben Beschränkungen, wie im vorhergehenden Falle jene der dortigen Ungleichheit, wir können daher ohne Weiteres behaupten:

Soll der Schwerpunkt eines Gyroscops von seiner über dem Unterstützungspunkte gewählten charakteristischen Anfangslage aus gerade die Horizontalebene durch den letzteren erreichen, so muss erstens die Hilfsaxe G_0' oberhalb dieser Horizontalebene zu liegen kommen und zweitens mit der negativen Richtung der Verticalen einen Winkel bilden, dessen cosinus gleich ist dem Producte aus dem Trägheitsmoment A des Gyroscops senkrecht der Axe der Figur und der Maximalarbeit 2P, dividirt durch das Quadrat der Intensität G_0 des wirkenden Kräftepaars, vorausgesetzt, dass dieses Quadrat grösser sei als das besprochene Product.

Von den beiden Grenzkegeln, innerhalb deren sich die Figuraxe bewegt, ist diesmal der eine in die Horizontalebene durch den festen Punkt übergegangen.

VI. $\vartheta_0 > \frac{\pi}{2}$, $\vartheta_1 < \frac{\pi}{2}$.

Analog den zwei vorhergehenden Annahmen resultirt für die jetzige Voraussetzung gemäss der Relation (15) die Bedingung

$$G_0^2 \cos(\vartheta_0 + 2u_0) + 2AP > 0,$$

auch ihre Bedeutung spricht sich analog aus, nur in einer minder beschränkenden Form:

Liegt der Schwerpunkt eines Gyroscops zu Anfang der Bewegung oberhalb des festen Punktes, so muss derselbe im weiteren Verlaufe der Bewegung unter denselben nothwendigerweise heruntergehen, wenn die Axe G_0', deren Winkel gegen die Figuraxe durch die Lage G_0 der Axe des angreifenden Paares halbirt wird, unter oder in die durch den fixen Punkt geführte Horizontalebene zu liegen kommt — wie gross auch immer die Intensität des afficirenden Paares gewählt sein möge. Fällt die Axe oberhalb dieser Horizontalebene, so kann der Schwerpunkt die letztere nur dann durchschneiden, wenn die Intensität G_0 die Bedingung erfüllt

$$G_0^2 \cdot |\cos(\vartheta_0 + 2u_0)| < 2AP.$$

Eine engere Relation zwischen G_0 selbst und $2AP$, wie sie in den Fällen IV und V stattfinden musste, tritt hier nicht auf.

Als specielle Fälle zählen wir hier zwei; für den einen ist der Kreiskegel, welcher durch ϑ_1 repräsentirt und um die positive Axe der Verticalen beschrieben ist, in diese Axe selbst übergegangen, für den andern erscheint derselbe genau gleich dem durch die Anfangslage ϑ_0 bestimmten Grenzkegel um die negative Richtung der Verticalen.

1. $\vartheta_1 = 0$. Das Raisonnement ist für diese specielle Annahme das gleiche, wie für den Unterfall $\vartheta_1 = 0$ bei spitzem Winkel ϑ_0 zwischen Figuraxe und Richtung der Schwere. Wie in II kommt als Bedingung für den Eintritt derselben wieder $Cn - l = 0$ oder

$$Cn \sin\frac{\vartheta_0}{2} + \mathsf{M}_0 \cos\frac{\vartheta_0}{2} = 0. \tag{21}$$

ϑ_0 ist jetzt grösser als $\frac{\pi}{2}$, aber wie immer kleiner als π, somit bleiben sin und cos beide positiv und es müssen Cn und M_0 wieder verschiedene Zeichen erhalten:

Der Schwerpunkt eines Gyroscops, welcher zu Anfang der Bewegung oberhalb des Unterstützungspunktes gelegen ist, nimmt seine tiefste Lage vertical unterhalb desselben, wenn die Axe des auf das Gyroscop wirkenden Kräftepaares den Winkel zwischen der Figuraxe und der positiven Richtung der Verticalen halbirt. Drehmoment Cn um die Axe der Figur und Stossmoment M_0 senkrecht derselben besitzen dabei entgegengesetzten Sinn.

Umgekehrt:

Wirkt auf das Gyroscop in der vorausgesetzten Anfangslage eine Drehgrösse um dessen Figuraxe und ein horizontaler senkrecht derselben zielender Stoss ein, dessen Wirkung in einer der ertheilten Drehung conform gerichteten Bewegung zum Ausdrucke käme, so kann der Schwerpunkt niemals die positive Axe der Schwere erreichen.

In der That fällt für unsere Voraussetzung, dass die Axe des Paares G_0 den Winkel ϑ_0 halbire, die Hilfsgerade G_0' mit der Verticalaxe $+z$ zusammen, also unter die Horizontalebene.

2. $\vartheta_1 = \pi - \vartheta_0$. Es muss hiefür $\cos\vartheta_1 = -\cos\vartheta_0$, $\alpha_1 = -\alpha_0$ werden d. h. die Gleichung (7) muss zwei entgegengesetzt gleiche Wurzeln besitzen. Das Criterium liefert einfach $\alpha_0{}^2 = 6\mu_2 = \frac{2\mu_3}{3\mu_1}$, also eigentlich zwei Gleichungen, die aber zufolge der Werthe der Grössen μ und der Constanten Ah aus (6) und (12) identisch befunden werden mit

$$Cnl + AP\sin^2\vartheta_0 = 0. \tag{22}$$

Soll diese Bedingung erfüllbar sein, so dürfen die Componenten des Momentankräftepaares G_0 bezüglich der Axen der Figur und Schwere, Cn und l, nicht gleiches Vorzeichen besitzen d. h. es muss die Axe von G_0 in dem Winkelraum zwischen der Aequator- und der Horizontalebene des festen Punktes gelegen sein; ausserdem muss das Product der absoluten Werthe der Componenten gleich sein dem zweiten Gliede der linken Seite der Relation (22). D. h.

Sollen die beiden Grenzkegel, welche den Kegel der Figuraxe eines Gyroscops umhüllen, symmetrisch liegen bezüglich der Horizontalebene durch den Unterstützungspunkt, der durch ϑ_0 bestimmte um die obere, der durch ϑ_1 bestimmte um die untere Hälfte der Verticalen beschrieben, so ist nothwendig, dass die Axe des in der Anfangslage ϑ_0 angreifenden Kräftepaares G_0 in den von der Aequatorebene des Gyroscops und der Horizontalebene durch den festen Punkt gebildeten Winkelraum der anfänglichen Verticalebene hineinfalle und dass das Rechteck aus den constanten Componenten des Kräftepaares bezüglich der Axen der Figur und Schwere gleich sei dem Producte aus dem Gewichte des Gyroscops, dem Trägheitsmomente desselben um eine der Hauptaxen des Aequators und dem Quadrate des sinus des anfänglichen Neigungswinkels zwischen der Figuraxe und der positiven Richtung der Verticalen.

Durch Einführung des Winkels u_0 zwischen den Axen der Figur und des Kräftepaares aus (13) schreibt sich die obige Gleichung (22) in der Form

$$G_0{}^2\cos(\vartheta_0 + 2u_0) + [G_0{}^2\cos\vartheta_0 + 2AP\sin^2\vartheta_0] = 0, \tag{22a}$$

in welcher wieder der charakteristische Winkel $\vartheta_0 + 2u_0$ zwischen der

Verticalaxe $+z$ und der in den vorhergehenden Abschnitten construirten Axe G_0' auftritt.

VII. $\vartheta_0 = \pi$.

Für $\vartheta_0 = \pi$ wird $\alpha_0 = \cos\vartheta_0 = -1$ und nach der Gleichung (7) oder dem ihr vorhergehenden Radicanden $Cn + l = 0$, was auch geometrisch evident ist. $\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_0 > 0$ ist durchaus erfüllt, weshalb allgemein eine Bewegung der Figuraxe aus der Verticalstellung heraus erfolgen muss, wobei es dann wieder vorkommen kann, dass diese Axe stets über der Horizontalebene durch den Unterstützungspunkt liegen oder auch letztere gerade noch erreichen oder endlich wieder unter dieselbe heruntersinken kann. Die Bedingungen (15), welche hierüber Aufschluss geben, schreiben sich diesmal

$$2AP - G_0^2 \cos 2u_0 \lesseqgtr 0 \tag{23}$$

oder auch

$$2AP + \mathsf{M}_0^2 \lesseqgtr C^2 n^2. \tag{23a}$$

Die erste Form ist mehr geeignet zur Definition der Stellung, die zweite zur Grösse des angreifenden Paares G_0. Wir schliessen leicht Folgendes:

Befindet sich der Schwerpunkt eines Gyroscops in der Anfangslage vertical über dem Unterstützungspunkte und lässt man auf das System ein Momentankräftepaar G_0 einwirken, dessen Axe, von der positiven Verticalaxe aus gerechnet, im zweiten, dritten, sechsten oder siebenten Octanten gelegen ist, einschliesslich der Begrenzungslinien, so muss der Schwerpunkt des Gyroscops über den Unterstützungspunkt heruntergehen, unbekümmert um die Grösse des Kräftepaares, welche man aufgewandt hat. Liegt dagegen die Kräftepaaraxe im ersten, vierten, fünften oder achten Octanten, so kann der Schwerpunkt entweder stets oberhalb des Unterstützungspunktes verweilen oder unter denselben sinken oder als tiefste Lage die horizontale erreichen, je nachdem das Quadrat des Drehmomentes um die Figuraxe grösser, gleich oder kleiner gewählt ist wie die Summe aus dem Quadrate des horizontalen Stossmomentes und dem Rechteck aus dem Trägheitsmoment des Körpers senkrecht der Axe der Figur in das Maximum der überhaupt zu leistenden Arbeitsgrösse.

Der eine Grenzkreiskegel ist für alle Fälle in den oberen Theil der Verticallinie übergegangen, der andere fällt einmal mit der Horizontalebene durch den festen Punkt zusammen.

Vergleichen wir die in manchen Momenten übereinstimmenden Ungleichungen und Sätze der letzten drei Bewegungsarten V, VI, VII, so können wir analytisch die Thatsache folgern, welche auch mechanisch leicht einzusehen ist:

Es besteht für ein Gyroscop ein um so stärkeres Bestreben, sich möglichst tief zu senken, je grösser das Gewicht Π und der Abstand γ

des Schwerpunktes vom Drehpunkte des Körpers, je grösser das Trägheitsmoment A um eine Axe des Aequators und je kleiner die Intensität G_0 des anregenden Kräftepaars gewählt ist.

Eine Bewegung des Gyroscops aus der verticalen Lage über dem Unterstützungspunkte in die symmetrische unterhalb desselben ist allgemein unmöglich. Denn für

1. $\vartheta_1 = 0$ folgte früher schon $Cn - l = 0$; nunmehr soll, für $\vartheta_0 = \pi$, $Cn + l = 0$ sein. Es ist daher einzig und allein $l = Cn = 0$ denkbar d. h.

Es ist unmöglich, dass die Figuraxe eines Gyroscops, wenn sie im Anfange der Bewegung vertical nach oben gestellt war, im Verlaufe der Drehung die untere Verticalaxe erreiche, solange auf das Gyroscop eine auch noch so kleine Drehung um die Figuraxe eingewirkt hat — es lässt sich vielmehr dieser Fall nur realisiren für eine blosse Pendelbewegung.

2. $\vartheta_0 = \pi$. Soll mit ϑ_0 zugleich $\vartheta_1 = \pi$ sein, die Figuraxe also ständig in der nach oben gerichteten Verticalen verharren, so tritt wieder blosse Drehung um die Axe der Figur mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit ein, ganz analog den eingangs dieses Paragraphen gepflogenen Erörterungen I. Eines hebt jedoch den jetzigen Fall gegen den dortigen merklich ab: für eine Anfangslage ϑ_0, welche sehr nahe an der positiven Axe der Verticalen angenommen ist, bleibt auch ϑ_1 sehr klein, für ein ϑ_0 nahe an π jedoch kann ϑ_1 von π sehr stark abweichen, entsprechend den Gleichungen (23). Dies sagt aus:

Die Lage eines Gyroscops in der nach unten gerichteten Verticalen ist eine stabile Anfangslage: bei kleinen Störungen oscillirt dasselbe in kleinen Elongationen um seine Ruhelage. Die Anfangslage des Körpers, welcher mit seinem Schwerpunkt senkrecht über den Unterstützungspunkt gestellt wurde, ist dagegen eine labile: es kann bereits ein kleiner Anstoss genügen, um das Gyroscop merklich, sogar bis unter den Unterstützungspunkt aus seiner innegehabten Lage zu treiben, doch ist die Stabilität um so stärker, je grösser das um die Figuraxe wirkende Drehmoment Cn, je kleiner der seitliche Anstoss M_0, je kleiner das Gewicht P des Apparates und je kleiner endlich das Trägheitsmoment A senkrecht der Figuraxe gewählt ist.

§ 5.

Der Poinsot'sche Fall der nutationsfreien Bewegung.

VIII. $\vartheta_1 = \vartheta_0$.

Nachdem im Bisherigen der Kegel, der von der Figuraxe um den festen Punkt beschrieben wird, als zwischen zwei concentrischen Kreiskegeln um die Verticale eingeschlossen erkannt wurde, erübrigt es nur noch, den besonderen Fall zu untersuchen, in welchem diese beiden Kreiskegel

und mit ihnen der Kegel der Figuraxe in einen einzigen Kreiskegel zusammenfallen und demgemäss die Bewegung des Schwerpunktes in einer Kreisbewegung um die Verticale besteht.

Die analytische Bedingung hiefür ist $\cos\vartheta_0 = \cos\vartheta_1 = \cos\vartheta$ oder $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$; auf Grund der letzteren folgt aus den dynamischen Gleichungen (5) nach Elimination von $\frac{d\psi}{dt}$

$$(Ah + 2AP\cos\vartheta)\cdot\sin^2\vartheta = (l - Cn\cos\vartheta)^2$$

oder durch Einführung der Werthe von Ah und l aus (12) und (13)

$$\mathsf{M}^2 + \mathsf{N}^2 = \mathsf{M}^2$$

und somit

(24) $$\mathsf{N} \equiv 0.$$

D. h. *Soll die Figuraxe einen Rotationskegel um die Richtung der Schwere beschreiben, so darf während der ganzen Dauer der Bewegung keinerlei Nutationsbestreben wachgerufen werden und es muss die Axe des anregenden Kräftepaares stets in die Ebene der Figuraxe und Verticalen zu liegen kommen.*

Dieser Satz ist mechanisch ohne Weiteres einzusehen, er wurde von Poinsot in seiner théorie des équinoxes*) als ganz allgemeines Theorem für alle derartigen Bewegungen ausgesprochen.

Natürlich muss auch bereits bei Beginn der Bewegung die Axe des Kräftepaares in der Verticalebene durch die Axe der Figur enthalten sein. Diese Bedingung ist aber unseren früheren Festsetzungen zufolge für die Anfangs- und Endlage des Körpers ständig erfüllt und präcisirt daher den jetzigen Fall der Kreisbewegung nicht in näherer Weise. Ohne Zweifel muss die Axe des Paares in jener Ebene eine ganz bestimmte Lage aufweisen. Dieselbe kann durch die Nothwendigkeit erkannt werden, dass die Gleichung (7) zwei gleiche Wurzeln, α_0 und α_1, besitzen muss. Entweder direct aus dem zweiten der Differenzenwerthe (9) oder mittels der symmetrischen Functionen der Wurzeln ergiebt sich

$$\alpha_0^2 + 2\mu_1\alpha_0 - 2\mu_2 = 0$$

und durch Einführung sowohl der Werthe der μ aus (6) als der Constanten Ah und l aus (12) und (13) folgt zunächst

(25) $$\mathsf{M}_0[\mathsf{M}_0\cos\vartheta_0 + Cn\sin\vartheta_0] - AP\sin^2\vartheta_0 = 0.$$

Auch hier empfiehlt es sich wieder, die totale Energie des Momentankräftepaars G_0 und seine Lage u_0 gegen die Figuraxe oder auch die Lage der Axe G_0', deren Winkel $2u_0$ gegen die Figuraxe von der Kräftepaaraxe G_0 halbirt wird, einzuführen. Es kommt

(25a) $$G_0^2\sin u_0\sin(\vartheta_0 + u_0) - AP\sin^2\vartheta_0 = 0$$

*) Additions à la Connaissance des temps. 1858. p. 5.

oder in anderer Schreibweise, in welcher der Winkel $\vartheta_0 + 2u_0$ zwischen G_0' und der positiven Verticalen wieder auftritt,

$$(25\text{b}) \qquad G_0^2 \cos(\vartheta_0 + 2u_0) - G_0^2 \cos^2 \vartheta_0 + 2AP \sin^2 \vartheta_0 = 0.$$

Eine jede dieser Formeln giebt für vorgegebene Grösse G_0 des Paares dessen Lage u_0, und für jede vorgegebene Stellung umgekehrt die Intensität an, welche gerade nothwendig ist, um die Figuraxe in einem Kreiskegel um die Verticale herumzuführen. Die Bedingung (25a) ist die gleiche, welche von Poinsot auf synthetischem Wege in seiner théorie des cônes circulaires roulants*) gefunden wurde, allerdings in der Weise, dass daselbst ein Ausdruck für die hier auftretenden beschleunigenden Kräfte erfragt wurde, also eine Gleichung, welche P durch G_0, u_0, ϑ_0 und A ausdrücken sollte.

Was nun die Möglichkeit der Erfüllung der Bedingungsgleichungen (25) angeht, so führt eine leichte Untersuchung zu dem folgenden, $\vartheta_0 \lesseqgtr \frac{\pi}{2}$ gemeinsamen Ergebniss:

Soll für ein ganz beliebig gestelltes Gyroscop die Axe der Figur einen Kreiskegel um die Axe der Verticalen beschreiben, so darf die Axe des zur Drehung Anlass gebenden Paares der Momentankräfte niemals in den Winkelraum ϑ_0 fallen, welcher von der Figuraxe und der positiven Verticalen eingeschlossen wird. Aber auch dann, wenn die Axe des Paares in dem Raum des Nebenwinkels gewählt wurde, ist eine solche Kreisbewegung ausgeschlossen, so lange nicht die Intensität des Kräftepaares grösser ist als das Product oder höchstens gleich dem Producte aus dem sinus des Winkels der Anfangsneigung ϑ_0 mal dem geometrischen Mittel zwischen dem Maximalmoment P der Schwere und dem Trägheitsmoment A senkrecht der Axe der Figur.

Soll speciell $\vartheta_0 = \vartheta_1 = \frac{\pi}{2}$ sein, so ergeben die einschlägigen Bedingungen (25) und (20) übereinstimmend

$$(26) \qquad \mathsf{M}_0 \cdot Cn + AP = 0$$

oder auch

$$(26\text{a}) \qquad G_0^2 \sin 2u_0 + 2AP = 0.$$

D. h. *Befindet sich die Anfangslage der Umdrehungsaxe eines Gyroscops in der horizontalen Ebene durch den festen Punkt, so kann man bewirken, dass dieselbe fortwährend in dieser Ebene verweile und auf diese Weise dem Schwerpunkt eine cyklische Bewegung um den festen Punkt als Mittelpunkt ertheilen: es bedarf hiezu ausser einer Drehung um die Figuraxe eines senkrecht derselben, aber im entgegengesetzten Sinne geführten horizontalen Stosses, so, dass das Rechteck aus diesen*

---

*) ibid. 1855. p. 3—25.

beiden Bewegungsmomenten gleich ist dem Rechtecke aus dem für die horizontale Lage des Gyroscops gebildeten Moment der Schwere und dem Trägheitsmoment des Körpers senkrecht der Axe der Figur.

§ 6.

Die Präcessionsbewegung der Figuraxe.

Durch Elimination der Nutationsgeschwindigkeit $\frac{d\vartheta}{dt}$ aus den zwei ersten Gleichungen (5) folgt für die Geschwindigkeit der Präcession:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{Cn\cos\vartheta - l}{A\sin^2\vartheta}, \tag{27}$$

eine Gleichung, welche durch Einführung des Werthes von l aus den zwei ersten Gleichungen (13) auch in einer der folgenden Formen geschrieben werden kann:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\mathsf{M}}{A\sin\vartheta}, \tag{27a}$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{Cn(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0) + \mathsf{M}_0\sin\vartheta_0}{A\sin^2\vartheta}. \tag{27b}$$

Sowohl $\cos\vartheta - \cos\vartheta_0$ als auch $\sin\vartheta_0$ sind für das ganze Problem des Gyroscops wesentlich positiv. Es kann also $\frac{d\psi}{dt}$ niemals sein Vorzeichen wechseln, sobald Cn und M_0 dem Sinne nach übereinstimmen. Bei gleichzeitiger Aenderung der beiden Zeichen Cn und M_0 ändert ferner der Ausdruck für $\frac{d\psi}{dt}$ nur sein Zeichen, nicht aber seine Grösse d. h. *Ertheilt man einem in seiner charakteristischen Anfangslage befindlichen Gyroscop eine Drehung um seine Eigenaxe, und gleichzeitig einen horizontalen Stoss senkrecht derselben, dessen Richtung mit derjenigen der Drehung übereinstimmt, so bewegt sich das Gyroscop durchaus in dem nämlichen Sinne, conform dem gemeinsamen Sinne der Dreh- und Stossbewegung — die Bewegung ist eine progressive, wie immer auch die Anfangslage des Gyroscops und die Intensitäten der beiden anregenden Momente gewählt sein mögen.*

Aendern die im Anfange auf das Gyroscop einwirkenden zwei Momente der Drehung und des Stosses gleichzeitig ihren Sinn, so ändert ihn auch die Bewegung der Präcession, ohne jedoch in ihrer Art eine Einbusse zu erleiden.

Zufolge dieses Satzes dürfen wir in der weitern Untersuchung Cn stetig als positiv voraussetzen und — da eine gleichzeitige Annahme von M_0 als positiv durch den ersten der eben ausgesprochenen Sätze erledigt erscheint — M_0 fürderhin als negativ.

Diese Voraussetzung sagt in anderer Fassung aus, dass die Axe des zu Anfang der Bewegung wirkenden Totalkräftepaares

$$G_0 = \sqrt{C^2 n^2 + \mathsf{M}_0^2}$$

nicht in den Winkelraum fallen dürfe, welcher zu eben jener Zeit von den in einer Verticalebene liegenden Axen der Figur und des Stosses gebildet wird. Aber auch ausserhalb dieses Raumes existirt ein Rayon, in welchem keine gerade Linie als Axe des anregenden Paares angenommen werden darf, wenn eine rückläufige Bewegung erzeugt werden soll. Ist nämlich die Componente l des Paares bezüglich der Verticalaxe dem absoluten Werthe nach grösser als dessen Componente Cn bezüglich der Figuraxe, so bleibt sie auch grösser als das Product $Cn \cos\vartheta$ in dem rechtsseitigen Ausdruck der Gleichung (27) weil eben das letztere kleiner als Cn ist und höchstens für $\cos\vartheta = 1$ gleich Cn wäre. Erst dann, wenn $|l| < |Cn|$ wird, ist an die Möglichkeit eines Zeichenwechsels der Geschwindigkeit $\frac{d\psi}{dt}$ zu denken.

Diese Ueberlegung giebt Veranlassung zu dem folgenden Theorem welches eine weitergehende Beschränkung involvirt, als der obige Lehrsatz aussprach:

Construirt man aus den beiden charakteristischen Bewegungsmomenten der Drehung Cn um die Axe der Figur und des horizontalen Stosses M_0 senkrecht derselben, welche die allgemeinste Bewegung eines Gyroscops bedingen, die Axe des wirkenden Totalkräftepaares, so giebt die Lage der letzteren unzweideutig darüber Aufschluss, ob die Bewegung des Körpers sich stets in demselben Sinne vollzieht oder ob dieselbe rückläufig wird. Es tritt nämlich der eine oder andere Fall ein, je nachdem die genannte Axe ausserhalb oder innerhalb jener (Scheitel-) Winkelräume zu liegen kommt, welche gebildet werden von der Axe der Figur und der den Winkel zwischen dieser und der Verticalen halbirenden Geraden.

Angenommen nämlich, es sei ϑ' der kritische Winkel, für welchen die Präcessionsgeschwindigkeit $\frac{d\psi}{dt}$ ihr Zeichen wechselt, für welchen also in der Bahn des Schwerpunktes Doppelpunkte und im Kegel der Figuraxe Wendekanten auftreten, so muss nach der Gleichung (27)

$$\cos\vartheta' = \frac{l}{Cn} \tag{28}$$

sein. Soll dieser Werth eine Bedeutung besitzen, so muss offenbar

$$\cos\vartheta_0 < \cos\vartheta' < \cos\vartheta_1$$

oder

$$l - Cn\cos\vartheta_0 > 0,$$
$$l - Cn\cos\vartheta_1 < 0$$

sein, Vergleichungen welche nichts anderes sind als der Ausdruck der Thatsache, dass im Falle der Rückläufigkeit der Bewegung die Geschwindigkeit $\frac{d\psi}{dt}$ in den extremen Stellungen des Gyroscops,

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_0 = \frac{\mathsf{M}_0}{A \sin \vartheta_0}, \qquad (29)$$
$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_1 = \frac{\mathsf{M}_1}{A \sin \vartheta_1}$$

entgegengesetztes Vorzeichen besitzen müsse. Da wir Cn als positiv und M_0 als negativ voraussetzen durften, muss also M_1 positiv werden. Nun bestehen zwischen den Momenten M_0 M_1 des Horizontalstosses zufolge der schon öfter citirten Relationen (12), (13) die Beziehungen

$$\mathsf{M}_1^2 = \mathsf{M}_0^2 + 2AP(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_0),$$
$$\frac{\mathsf{M}_1}{\sin\vartheta_1} = \frac{\mathsf{M}_0 \sin\vartheta_0 + Cn(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_0)}{\sin\vartheta_1}.$$

Nehmen wir an, es sei der absolute Werth $|\mathsf{M}_0|$ der negativ gerichteten Horizontalkraft M_0 noch sehr gross gewesen, so ist zufolge der zweiten der vorstehenden Gleichungen auch $\frac{\mathsf{M}_1}{\sin\vartheta_1}$ negativ und es sinkt die Grösse von $\frac{|\mathsf{M}_1|}{\sin\vartheta_1}$ zugleich mit dem Werthe von $|\mathsf{M}_0|$. Es ist aber undenkbar, dass diese Grösse durch Null hindurch vom Negativen zum Positiven übergehe: denn $\sin\vartheta_1$ kann nicht unendlich und M_1 (nach der ersten der vorstehenden Gleichungen) nicht Null werden. Es bleibt sonach keine andere Möglichkeit, als dass $\frac{\mathsf{M}_1}{\sin\vartheta_1}$ durch das Unendliche das Zeichen wechsle, dass also $\sin\vartheta_1 = 0$, $\cos\vartheta_1 = 1$ sei. Nun wurde früher, im § 4, gezeigt, dass die Bedingung, es möge der drehende Körper die positive Verticale passiren, gleichbedeutend ist mit der Bedingung, es möge die Axe G_0 des anregenden Momentankräftepaares den Winkel ϑ_0 zwischen der Figuraxe und der Verticalen halbiren.

Wir haben demzufolge, wenn wir das Gesagte zusammenfassen, den Lehrsatz:

Der Uebergang in der sphärischen Bahnlinie des Schwerpunktes von Curvenformen ohne Doppelpunkte in solche mit Doppelpunkten vollzieht sich durch jene Curve, für welche der die Endlage des Gyroscops markirende Parallelkreis in den tiefsten Punkt der Kugel übergegangen ist. Der letztere ist ein unendlich oft zu zählender Punkt der Curve und die Präcessionsgeschwindigkeit wechselt in demselben durch den Werth „unendlich" hindurch ihr Zeichen.

Hat die Axe G_0 des zu Beginn attaquirenden Kräftepaares die als Grenze gezogene Halbirungslinie überschritten, und befindet sie sich innerhalb des Winkelraumes zwischen dieser Halbirungslinie und der

Axe der Figur, so sind rückläufige Bewegungserscheinungen unausbleiblich. Denn für negatives M_0 ist nunmehr, wo die Stelle $\sin\vartheta_1 = 0$ oder

$$M_1 \sin\vartheta_1 = M_0 \sin\vartheta_0 + Cn(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_0) = 0$$

passirt ist,

$$M_1 \sin\vartheta_1 = M_0 \sin\vartheta_0 + Cn(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_0) > 0;$$

es hat, da $\sin\vartheta_1 > 0$, M_1 nothwendig positives Zeichen und es unterscheiden sich nunmehr $\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_0$ und $\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_1$ durch das letztere.

Dies wird solange währen, bis $M_0 = 0$ wird; letztere Eventualität zieht nach sich

$$(30) \qquad \left(\frac{d\psi}{dt}\right)_0 = 0$$

M_1 und $\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_1$ bleiben positiv, umgekehrt aber verschwindet $\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_0$ auch nur für den einzigen Werth $M_0 = 0$. Wir sehen hieraus:

Die Doppelpunkte in der Curve, welche den Schwerpunkt eines Gyroscops im Raume beschreibt, gehen über in Rückkehrpunkte auf dem durch die normale Anfangslage desselben repräsentirten Horizontalkreis, sobald auf das Gyroscop eine blosse Drehung um die Figuraxe, nicht aber ein seitlicher Stoss eingewirkt hat. Umgekehrt erscheinen die fraglichen Singularitäten nur für den Fall des „gewöhnlichen Gyroscops", indem sie die Theorie der letzteren in charakteristischer und markanter Weise aus der Theorie des allgemeinen Gyroscops hervortreten lassen.

Anschliessend hieran ist deutlich:

Die Doppelpunkte nähern sich dem Grenzkreise, der durch die Anfangslage des Schwerpunktes bedingt ist, um so mehr, je kleiner das Moment des auf das Gyroscop in dieser Anfangslage einwirkenden horizontalen Stosses gewählt ist.

Die Thatsache, dass das Moment des in der Endlage der Figuraxe thätigen Horizontalstosses M_1 laut der vorhergepflogenen Untersuchung nie Null werden kann, giebt weiterhin Anlass zur Registrirung des folgenden Satzes:

Es ist für das ganze Problem der Bewegung eines Gyroscops unmöglich, dass die vom Schwerpunkte im Raume gezeichnete Curve sich auf den durch die tiefste Lage desselben angezeigten Grenzkreis mit Rückkehrpunkten aufsetze.

Aus der Thatsache, dass die Geschwindigkeit $\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_0$ mit M_0 direct proportional ist, folgt endlich:

Hat ein Gyroscop im Anfange seiner Bewegung ausser einer Drehung um seine Axe einen seitlichen Stoss erhalten, so folgt dasselbe fürs Erste jedesmal der Richtung des Stosses, wie klein auch immer derselbe gewählt

gewesen sein möge, und sein Bestreben, diese Richtung beizubehalten, wächst direct mit der Intensität der aufgewendeten Stosskraft.

Diesem unmittelbar einleuchtenden Satz steht ein analoger, welcher sich auf die Endlage der Figuraxe bezieht, gegenüber.

§ 7.

Untersuchung auf Wendekanten.

Nach den Entwicklungen der vorhergehenden Paragraphen ergiebt sich für die zwischen zwei horizontalen Parallelkreisen ϑ_0, ϑ_1 enthaltene sphärische Bahncurve des Schwerpunktes bereits ein ziemlich deutliches Bild. Dasselbe erscheint jedoch erst dann mit befriedigender Schärfe, wenn man über die Existenz oder Nichtexistenz von sphärischen Wendepunkten orientirt ist, weil die letzteren die Art und Weise, wie die Curve von einem Parallelkreis aus den andern angeht, wesentlich bestimmen.

Ein solcher Wendepunkt tritt dann ein, wenn drei successive Erzeugende des Kegels der Figuraxe in dieselbe Ebene fallen. Schneiden wir also diesen Kegel mit einer horizontalen Ebene, etwa im Abstande 1 vom Unterstützungspunkte gelegen, so muss die ebene Schnittcurve zu gleicher Zeit t einen Wendepunkt aufweisen. In Polarcoordinaten w, ψ, wo das letztere der Winkel der Präcession, lautet die Bedingung für das Auftreten eines solchen, durch den Parameter (10) u ausgedrückt, wie bekannt

$$w^2\left(\frac{d\psi}{du}\right)^3+2\left(\frac{dw}{du}\right)^2\left(\frac{d\psi}{du}\right)-w\left[\frac{d^2w}{du^2}\,\frac{d\psi}{du}-\frac{d^2\psi}{du^2}\,\frac{dw}{du}\right]=0.$$

Der Radiusvector w ist nun zufolge unserer Wahl der Schnittebene $w=\operatorname{tg}\vartheta$ und nach der Gleichung für die Präcessionsgeschwindigkeit (27) ist

$$\frac{d\psi}{du}=\frac{Cn\cos\vartheta-l}{Am\sin^2\vartheta}.$$

Durch Differentiation dieser Gleichung und Substitution schreibt sich dann die obige Bedingung einfacher

$$\text{(31)}\qquad \sin^2\vartheta\cos\vartheta\left(\frac{d\psi}{du}\right)^3-\sin\vartheta\cdot\frac{d\psi}{du}\cdot\frac{d^2\vartheta}{du^2}-\frac{Cn}{Am}\left(\frac{d\vartheta}{du}\right)^2=0.$$

Werden die Werthe von $\frac{d\psi}{du}$ (27) und diejenigen von $\frac{d\vartheta}{du}$, $\frac{d^2\vartheta}{du^2}$ aus der Gleichung (11) hierin eingeführt, so erscheint im allgemeinen Falle eine Gleichung fünften Grades. Da die Discussion derselben zum mindesten sehr schwierig, wenn nicht unmöglich ist, so mag die Untersuchung auf einem andern Wege geleistet werden, in Ausführung des folgenden Gedankens:

Sollen zu irgend einem Zeitpunkte t drei successive Erzeugende des Kegels der Figuraxe, z_1', z_2' und z_3' in eine und dieselbe Ebene fallen, so darf die instantane Drehung Θ', welche um eine senkrecht zur Figuraxe gelegene Gerade wirkend z_1' nach z_2' überführt, ihre Richtung im nächsten Zeitelemente dt nicht ändern, um nicht z_2' aus der Ebene $z_1' z_2'$ heraus in die Lage z_3' zu drehen. Es muss also Θ' für die zwei auf einander folgenden Zeiten t und $t+dt$ im Raume unverändert dieselbe Richtung beibehalten oder es muss, wenn die letztere gegen die festen Axen des Raumes x, y, z durch die Winkel $\Theta' x$, $\Theta' y$, $\Theta' z$ ausgedrückt ist,

$$d \cos \Theta' x = d \cos \Theta' y = d \cos \Theta' z = 0$$

sein. Die Drehgrösse Θ' ist aber offenbar keine andere als die in den Aequator fallende Componente der instantanen Drehung Θ, deren Componente bezüglich der Axe der Figur constant gleich n ist. Θ' besitzt also hinsichtlich der zwei senkrechten Hauptaxen x', y' des Aequators die Componenten p, q der Winkelgeschwindigkeit als solche und es ergeben sich mittels der Neigungscosinus, wie sie eingangs des § 1 schematisirt wurden, ohne Weiteres

$$\cos \Theta' x = \frac{ap+bq}{\Theta'}, \quad \cos \Theta' y = \frac{a'p+b'q}{\Theta'}, \quad \cos \Theta' z = \frac{a''p+b''q}{\Theta'}, \qquad \text{wo } \Theta'^2 = p^2+q^2 \text{ bedeutet.}$$

Wegen der Gleichheit der zwei Trägheitsmomente um die Hauptaxen x', y' fällt nun die Lage der Drehcomponente Θ' der Richtung nach mit der Lage der Componente G' des Kräftepaars bezüglich des Aequators zusammen und wir können daher auch schreiben

$$\cos \Theta' x = \frac{Apa+Aqb}{G'}, \quad \cos \Theta' y = \frac{Apa'+Aqb'}{G'}, \quad \cos \Theta' z = \frac{Apa''+Aqb''}{G'}, \qquad \text{wo } G'^2 = A^2(p^2+q^2) \text{ ist.}$$

Durch Differentiation der vorstehenden Cosinuswerthe folgt nun für unsere obigen Bedingungen

$$\begin{aligned} G' \cdot d(Apa+Aqb) - (Apa+Aqb) \cdot dG' &= 0, \\ G' \cdot d(Apa'+Aqb') - (Apa'+Aqb') \cdot dG' &= 0, \\ G' \cdot d(Apa''+Aqb'') - (Apa''+Aqb'') \cdot dG' &= 0 \end{aligned}$$

als das Gleichungssystem, welches erfüllt sein muss, wenn drei Nachbar-

lagen der Erzeugenden des Figurenkegels in einer Ebene enthalten sein sollen.

Durch entsprechende Combination der drei vorstehenden Gleichungen kann nun auf Grund des Zusammenhanges, welcher die verschiedenen Winkelcosinus unter sich und mit den Winkelgeschwindigkeiten p, q, n verknüpft, gezeigt werden, dass die Zunahmen $d \cos \Theta' x$ und $d \cos \Theta' y$ zugleich mit der Zunahme $d \cos \Theta' z$ verschwinden.

Diese Combination soll jedoch an dieser Stelle nicht thatsächlich ausgeführt, sondern auf einem anderen Wege verificirt werden. Setzt man nämlich zur Abkürzung für die Neigungscosinus der Drehungsaxe Θ', welche auf der Figuraxe senkrecht steht, u, u', u'', so schreibt sich die Bedingung des Senkrechtstehens in der Form

$$uc + u'c' + u''c'' = 0.$$

In die Ebene der zwei vorgenannten Axen fällt als dritte die Axe der instantanen Gesammtdrehung Θ, was als weitere Bedingung

$$\begin{vmatrix} u & u' & u'' \\ c & c' & c'' \\ ap + bq + cn & a'p + b'q + c'n & a''p + b''q + c''n \end{vmatrix} = 0$$

ergiebt. Berücksichtigt man bei der Auswerthung der Determinante, dass zufolge bekannter Relationen der Orthogonalität, die wir später unter den Formeln (47) anführen,

$$ac' - a'c = b'', \quad bc' - b'c = a'' \quad \text{u. s. w.}$$

und nach den kinematischen Beziehungen (2)

$$a''q - b''p = \frac{dc''}{dt} \quad \text{u. s. w.}$$

ist, so ergiebt sich

$$u \cdot dc + u' \cdot dc' + u'' \cdot dc'' = 0.$$

Diese Gleichung zieht wegen des obigen Zusammenhangs der u und c nach sich

$$c \cdot du + c' \cdot du' + c'' \cdot du'' = 0$$

und als weitere analoge Gleichungen verzeichnen sich

$$u \cdot du + u' \cdot du' + u'' \cdot du'' = 0,$$
$$c \cdot dc + c' \cdot dc' + c'' \cdot dc'' = 0.$$

Damit aus den vier letzten Gleichungen nicht die Unmöglichkeit

$$u : u' : u'' = c : c' : c'' = \begin{vmatrix} du' & du'' \\ dc' & dc'' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} du'' & du \\ dc'' & dc \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} du & du' \\ dc & dc' \end{vmatrix}$$

hervorgehe, ist nothwendig, dass die drei zuletzt angeschriebenen Determinanten einzeln verschwinden. Dies zieht nach sich

$$du = \lambda \cdot dc; \quad du' = \lambda \cdot dc'; \quad du'' = \lambda \cdot dc'',$$

wo λ einen Proportionalitätsfactor bedeutet, welcher bis auf Längen, die nicht verschwinden können, gleich ist dem Quotienten aus den Bogenelementen, die von den Axen Θ' der Drehcomponente und z' der Figur beschrieben werden. Abgesehen also von dem Fall $dc = 0$, $dc' = 0$, $dc'' = 0$, welcher eine Rückkehrkante des Kegels der Figuraxe involvirt und schon im vorhergehenden Paragraphen besprochen wurde, kann λ nicht unendlich werden, es verschwinden

$$(32)\qquad \begin{aligned} du &= \frac{dc}{dc''}\cdot du'', \\ du' &= \frac{dc'}{dc''}\cdot du'' \end{aligned}$$

zugleich mit du oder also mit

$$\frac{du''}{dc''} = \frac{d}{dc''}\left(\frac{Apa'' + Aqb''}{\sqrt{A^2p^2 + A^2q^2}}\right).$$

Der zu differenzirende Ausdruck hängt aber vermöge der Gleichungen (3) nur ab vom Neigungscosinus c'' zwischen der Figuraxe und der Verticalen allein und seine Differentiation ergiebt leicht für $c'' = \cos\vartheta$ die Gleichung

$$(33)\qquad \cos\vartheta = -\frac{Ah\cdot Cn + AP\cdot l}{AP\cdot Cn}.$$

Soll dieser Werth, für welchen also der Kegel der Figuraxe Wendekanten besitzt, sich realisiren lassen, so muss ϑ nothwendigerweise zwischen den extremen Winkelwerthen ϑ_0 und ϑ_1 enthalten sein, gemäss den Ungleichungen

$$\cos\vartheta_0 < \cos\vartheta < \cos\vartheta_1.$$

Nach der 2. Gleichung (13) lässt sich aber $l : Cn$ durch den Quotienten $\mathsf{M}_0 : Cn$ ausdrücken; es gilt sonach der obige Werth $\cos\vartheta$ in gleicher Weise für ein System Cn, M_0 der anregenden Momentankräfte, wie auch für das inverse System $-Cn$, $-\mathsf{M}_0$ derselben. D. h.

Sind in dem von der Figuraxe eines Gyroscops im Raume beschriebenen Kegel Wendekanten möglich, so erscheinen dieselben, einerlei, ob der Kegel im einen oder anderen Sinne von der normalen Anfangslage der Figuraxe aus durchlaufen wird, stets für den gleichen Zeitparameter.

Da ferner die Bedingungsgleichung in $\cos\vartheta$ linear ist, so erkennt man,

dass zwischen zwei aufeinanderfolgenden extremen Lagen ϑ_0, ϑ_1 eventuell immer nur eine einzige Wendekante auftritt.

Nehmen wir nun für die folgende Untersuchung der Möglichkeit des Eintrittes derartiger Singularitäten die Grösse Cn der um die Figuraxe im Anfange thätigen Momentandrehung als positiv an — was nach dem oben Gesagten keinerlei Beschränkung bedeutet —, so

lauten die Ungleichungen, welche für die Existenz von Wendekanten unerlässlich sind,

$$AP \cdot Cn \cos \vartheta_0 < -Ah \cdot Cn - AP \cdot l < AP \cdot Cn \cos \vartheta_1$$

oder durch Einführung der bekannten Werthe von Ah und l aus (12) und (13):

$$(34)\qquad \begin{aligned} -Cn\mathsf{M}_0^2 + AP\mathsf{M}_0 \sin \vartheta_0 > 0,\\ -Cn\mathsf{M}_1^2 + AP\mathsf{M}_1 \sin \vartheta_1 < 0. \end{aligned}$$

Man erkennt aus der ersten Ungleichung sofort eine Unmöglichkeit für den Fall, dass M_0 negativ ist (ebenso für positives M_0 bei negativem Cn). D. h.

Lässt man in der Anfangslage der Figuraxe eines Gyroscops eine Drehung um diese Axe und einen senkrecht derselben zielenden horizontalen Stoss einwirken, dessen Richtung derjenigen der Drehung entgegengesetzt ist, so sind aus dem Kegel der Figuraxe Wendekanten ausgeschlossen, wie klein auch das Moment des Stosses gegen dasjenige der Drehung gewählt sein möge.

Wirkt M_0 in Uebereinstimmung mit Cn im positiven Sinne, so sind die angedeuteten Singularitäten möglich, ohne gerade nothwendig zu sein. Der factische Eintritt ist, da M_1 gemäss den Gleichungen (13) ebenfalls mit M_0 positiv bleibt, nunmehr an die Erfüllung der Bedingungen geknüpft

$$(34\text{a})\qquad \begin{aligned} AP \sin \vartheta_0 - Cn\mathsf{M}_0 > 0,\\ AP \sin \vartheta_1 - Cn\mathsf{M}_1 < 0. \end{aligned}$$

Hieraus ist ersichtlich:

Auch dann, wenn der Sinn der dem Gyroscop zu Anfang der Bewegung ertheilten Anregungsmomente übereinstimmend gewählt ist, sind in dem Kegel der Figuraxe Wendekanten unmöglich, sobald das Rechteck aus den für die Normalanfangs- bezw. Endlage giltigen absoluten Werthen jener Momente grösser bezw. kleiner ist als das Rechteck aus dem Moment der auf die betreffende Lage einwirkenden Schwerkräfte und aus dem Trägheitsmoment des Körpers senkrecht der Axe der Figur.

Die linken Seiten der Ungleichungen (34a) oder, eigentlich genauer, der Ungleichungen (34) können nun in die Lage kommen, *durch Null hindurch ihre Vorzeichen zu wechseln.* Für die letzteren ist dieser Wechsel zunächst intendirt in den Fällen $\mathsf{M}_0 = 0$, $\mathsf{M}_1 = 0$, von denen nach den Untersuchungen des vorhergehenden Paragraphen nur $\mathsf{M}_0 = 0$ einen Sinn hat und den Uebergang von Wendekanten in Rückkehrkanten auf dem Grenzkegel der Normalanfangslage bedeutet. Sehen wir von dieser Eventualität ab, so sind es die linken Seiten der Bedingungen (34a) welche auf Null geprüft werden müssen.

Offenbar handelt es sich nur darum, welcher von den beiden Werthen zuerst durch Null hindurch gelangen kann.

Nehmen wir nun an, es sei $Cn = 0$ — der Fall des conischen Pendels —, so sind unzweifelhaft Wendekanten ausgeschlossen. Wächst Cn von Null ab, so bleibt die erste der Ungleichungen (34a) wohl erfüllt, während es die andere für einen kleinen Werth der Drehgrösse Cn noch nicht ist; erst, wenn Cn mehr und mehr wächst, fängt das zweite Glied $Cn\mathsf{M}_1$, in welchem die Stosskraft M_1 durch eine der Gleichungen (12), (13) gegeben ist, an, das erste Glied, welches kleiner ist als AP, zu überholen und die Ungleichung mehr und mehr zu realisiren. Gleichzeitig sinken aber für die erste Ungleichung die Chancen des Erfülltseins, indem dieselbe für einen genügend grossen Werth von Cn durch Null hindurch den Sinn umkehren könnte. Das letztere fände statt für

$$Cn = \frac{AP \sin\vartheta_0}{\mathsf{M}_0},$$

während die andere Ungleichung Berechtigung erhält von

$$Cn = \frac{AP \sin\vartheta_1}{\mathsf{M}_1} \tag{35}$$

ab. Nach den schon oft citirten Formeln (12), (13) ist nun

$$\mathsf{M}_1 \sin\vartheta_1 = \mathsf{M}_0 \sin\vartheta_0 + Cn \quad (\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_0),$$
$$\mathsf{M}_1^2 \quad = \mathsf{M}_0^2 \quad + 2AP(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_0)$$

Man erkennt also sofort

$$\frac{AP \sin^2\vartheta_1}{\mathsf{M}_1 \sin\vartheta_1} < \frac{AP \sin^2\vartheta_0}{\mathsf{M}_0 \sin\vartheta_0}$$

für den Fall $\sin\vartheta_1 < \sin\vartheta_0$ d. h. für das ausschliessliche Verweilen des Schwerpunkts des Gyroscops unterhalb des Unterstützungspunktes. Für eine oberhalb des letzteren gewählte Normalanfangslage ist

$$\mathsf{M}_0 \sin\vartheta_1 \lesseqgtr \mathsf{M}_1 \sin\vartheta_0$$

eigens zu untersuchen. Da sowohl die Stossmomente als die Sinusse wesentlich positiv sind, so kann man auch fragen, ob

$$\mathsf{M}_0^2 \sin^2\vartheta_1 \lesseqgtr \mathsf{M}_1^2 \sin^2\vartheta_0$$

sei oder, durch Substitution

$$\mathsf{M}_0^2 \sin^2\vartheta_1 \lesseqgtr \mathsf{M}_0^2 \sin^2\vartheta_0 + 2AP \sin^2\vartheta_0 (\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_0),$$

$$\mathsf{M}_0^2 \cos^2\vartheta_0 + 2AP \sin^2\vartheta_0 \cos\vartheta_0 \lesseqgtr \mathsf{M}_0^2 \cos^2\vartheta_1 + 2AP \sin^2\vartheta_0 \cos\vartheta_1,$$

$$\left(\mathsf{M}_0 \cos\vartheta_0 + \frac{AP \sin^2\vartheta_0}{\mathsf{M}_0}\right)^2 \lesseqgtr \left(\mathsf{M}_0 \cos\vartheta_1 + \frac{AP \sin^2\vartheta_0}{\mathsf{M}_0}\right)^2;$$

$\cos\vartheta_0$ ist, wie gesagt, negativ anzunehmen. Dann kann $\cos\vartheta_1$ positiv werden oder auch negativ bleiben, wobei es jedoch absolut genommen stets kleiner ist als $\cos\vartheta_0$. In beiden Fällen ist die linke Seite der letzten Form kleiner als die rechte, also wird auch hierin der Werth $AP \sin\vartheta_1 : \mathsf{M}_1$ von Cn eher erreicht als der Werth $AP \sin\vartheta_0 : \mathsf{M}_0$.

Wir erkennen aus diesem Verhalten das Folgende:

Für den Kegel der Figuraxe vollzieht sich der Uebergang von Kegelformen ohne Wendekanten in solche mit Wendekanten durch einen Kegel, welcher in seinen Berührstellen mit dem durch die charakteristische Endlage der Figuraxe bedingten Grenzkreiskegel vier aufeinanderfolgende in einer und derselben Ebene enthaltene Erzeugende besitzt, von denen zwei dem besagten Grenzkegel selbst als Erzeugende angehören: es muss für diesen Fall das Rechteck aus den für die Endlage giltigen Hauptanregungsmomenten von Drehung und Stoss gleich sein dem Rechteck aus den Momenten der Trägheit senkrecht der Axe der Figur und der Schwerkräfte, welche in der Endlage auf das Gyroscop einwirken.

Mit diesem Satze ist die Frage nach den Wendekanten des Kegels der Figuraxe im Wesentlichen erledigt. Es erübrigt nur noch der Erörterung einiger anderer Fragen, welche mit der ersteren im Zusammenhang stehen.

Es wäre beispielsweise denkbar, dass die Flächenstücke des Kegels, welche zwischen zwei auf einander folgenden Berührungen mit den Grenzkegeln liegen, ebene oder — was dasselbe heisst — die einzelnen Curvenzweige der Schwerpunktsbahn Stücke von Hauptkreisen der Kugel wären. Die Bedingung hiefür wäre identisch mit der Forderung, es möge die Gleichung (33), welche das Erforderniss für den Eintritt von Wendekanten ist, nicht nur für einen einzigen Werth von $\cos\vartheta$, sondern identisch erfüllt sein. Letzteres ist aber, wie leicht gezeigt werden kann, nur möglich für die Annahme ebener Pendelbewegungen, nicht aber für den Fall einer allgemeinen Drehung des Gyroscops.

Da der Schwerpunkt bezüglich der festen Axen x, y, z des Raumes die Coordinaten

$$\gamma c,\ \gamma c',\ \gamma c''$$

besitzt, so ist mit der Verneinung der vorher stipulirten Möglichkeit zugleich nachgewiesen, dass eine lineare Gleichung

$$\varepsilon c + \varepsilon' c' + \varepsilon'' c'' = 0,$$

worin die ε Constante bedeuten, niemals allgemein statthaben kann. Ist aber Letzteres nicht der Fall, so gehört auch die abgeleitete Gleichung

$$\varepsilon dc + \varepsilon' dc' + \varepsilon'' dc'' = 0$$

und mit dieser endlich rückwärts wieder die Form

$$\varepsilon c + \varepsilon' c' + \varepsilon'' c'' + \varepsilon''' = 0$$

in das Bereich der Unmöglichkeit. Durch directen Beweis zeigt man ferner, dass auch eine Gleichung

$$\varepsilon c + \varepsilon' c' + \varepsilon'' = 0,$$

welche in der Horizontalprojection der vom Schwerpunkte durchlaufenen

Curve das Auftreten geradliniger Stücke signalisiren würde, nicht erfüllt werden kann. Denn es müsste hiefür

$$\frac{dc'}{dc} = \text{const.}$$

und nach Zuziehung der Relationen (2)

$$\frac{a'p - b'q}{ap - bq} = \text{const.}$$

sein, eine Relation, welche auf Grund der Euler'schen Beziehungen (1) die Absurdität $c'' = \text{const.}$ liefern würde.

Der im Vorstehenden erörterte dreitheilige Beweis berechtigt zu dem Satze:

Die vom Schwerpunkte eines Gyroscops beschriebenen Curvenzweige können mit Ausnahme der bei ebenen Pendelschwingungen erzeugten Bögen niemals Stücke von ebenen Curven sein.

§ 8.

Graphische Darstellung der verschiedenen Typen.

Durch die Untersuchungen der vorhergehenden Abschnitte sind so ziemlich alle Fragen beantwortet, welche sich über die gestaltlichen Verhältnisse der vom Schwerpunkte des Gyroscops zurückgelegten Curve doppelter Krümmung aufwerfen lassen. Es handelt sich also nur darum, die verschiedenen Gleichungen und Bedingungen zu einem Ganzen zu verflechten und auf graphischem Wege eine Uebersicht über die verschiedenen auftretenden Typen zu construiren.

Da die Bewegung des Schwerpunktes sich auf einer Kugel vollzieht, so ist zur objectiven Darstellung der Bewegungsvorgänge die Aufzeichnung der verschiedenen Formen der Horizontalprojection der Schwerpunktsbahn wohl der einzige geeignete Weg. Freilich können durch die Methode der Projection in der neuen Curve zufällige Singularitäten, wie Wendepunkte, da auftreten, wo sie in der Originalcurve fehlen. Soweit es anging, haben wir in der Zeichnung von solchen Zufälligkeiten Abstand genommen, so dass dieselben für einen Beschauer, dessen Auge sich in dem oberen Theile der durch den Unterstützungspunkt laufenden Verticalaxe befindet, den Eindruck sphärischer Gebilde wahren dürften. Im Texte haben wir, nachdem die genauere Bedingung schon des Weiteren besprochen wurde, den betreffenden Fall nur kurz charakterisirt; eingestreute kleinere Bemerkungen, denen im Vorausgehenden, um die Arbeit nicht zu weit auszudehnen, eine eigene Discussion nicht gewidmet wurde, lassen sich unschwer als richtig erweisen.

I. $\vartheta_0 < \frac{\pi}{2}$. *Der Schwerpunkt des Gyroscops befindet sich zu Anfang der Bewegung unterhalb des Unterstützungspunktes.*

Dann muss derselbe auch während des ganzen Verlaufes der Drehung unterhalb des Unterstützungspunktes verweilen. Der durch die ein- für allemal angenommene Anfangslage ϑ_0 charakterisirte horizontale Parallelkreis ist grösser als der Grenzkreis der Endlage ϑ_1.

1. $Cn = 0$; $-\mathsf{M}_0 = \mathsf{M}_0'$.

Es wirkt zu Anfang der Bewegung keine Drehung um die Figuraxe, sondern nur ein horizontaler Anstoss senkrecht derselben. Die Axe G_0 des wirkenden Totalkräftepaares fällt mit der negativen Axe des Stossmomentes zusammen. *Das Gyroscop vollführt conische Pendelschwingungen in einem der Stossrichtung entsprechenden Sinne, von links nach rechts* . . . . Fig. 1.

2. $+Cn$; $-\mathsf{M}_0 = \mathsf{M}_0'$ fällt.

Die Axe G_0 nähert sich der positiven Hälfte der Figur von links nach rechts über die positive Richtung der Verticalen hinweg. *Die Bahncurve des Schwerpunktes berührt, wie im vorhergehenden Falle, die beiden Grenzkreise, ohne Singularitäten zu besitzen. Der Grenzkreis der tiefsten Lage wird mit der abnehmenden Intensität des Stosses kleiner und kleiner* . . . . Fig. 2. $\begin{cases}2\\2'\end{cases}$

3. $+Cn$ steigt; $-\mathsf{M}_0 = \mathsf{M}_0'$ erfüllt die Bedingung (18).

Dann halbirt die Axe G_0 den Winkel ϑ_0 der Anfangslage der Figuraxe und der Verticalen. *Die Curve des Schwerpunktes passirt den tiefsten Punkt der Kugel. Der letztere ist ein unendlich oft zu zählender Doppelpunkt der Curve und durch ihn hindurch wechselt die Bewegungsrichtung ihr Zeichen* . . . . Fig. 3.

4. $+Cn$ steigt; $-\mathsf{M}_0 = \mathsf{M}_0'$ fällt weiterhin.

Die Axe G_0 ist nunmehr in den Winkelraum zwischen der eben genannten Halbirungslinie und der Axe der Figur eingetreten. *Die Curve erhält Doppelpunkte. Die durch die letzteren erzeugten Curvenschleifen setzen sich mit ihrem stumpfen Ende auf den Grenzkreis der Anfangslage als den grösseren auf* . . . . Fig. 4.

5. $+Cn$; $-\mathsf{M}_0 = \mathsf{M}_0' = 0$.

Es findet zu Beginn der Bewegung blosse Drehung um die Axe des Gyroscops statt. Die Axe G_0 fällt in die Figuraxe. *Die Doppelpunkte sind übergegangen in Rückkehrpunkte auf dem horizontalen Parallelkreis der Anfangslage* . . . . Fig. 5.

6. $+Cn$ fällt; $+\mathsf{M}_0$.

Die Axe G_0 kommt in den durch die positiven Axenrichtungen der beiden Anregungsmomente gebildeten Winkelraum zu fallen. *Es erscheinen sphärische Wendepunkte* . . . . Fig. 6.

7. $+ Cn$ fällt; $+ M_0$ erfüllt die Bedingung (35).

Dann sind je zwei sphärische Wendepunkte auf dem kleineren Grenzkreis der Normalendlage zusammengefallen; die Curve besitzt an diesen Stellen vier auf demselben Kugelhauptkreis gelegene unendlich benachbarte Punkte, von denen die beiden inneren zugleich dem Grenzkreis angehören . . . . Fig. 7.

8. $+ Cn$ fällt; $+ M_0$ steigt, erfüllt die Bedingung (25), um sodann noch weiter zu steigen.

Dann treten wieder Curvenformen ohne Singularitäten auf, welche durch die Ausdehnung des kleineren Grenzkreises der Endlage immer mehr gegen den Grenzkreis der Anfangslage gedrängt werden, um schliesslich in den letzteren selbst überzugehen und durch diesen hindurch wieder in analoger Weise zu erscheinen . . . . Fig. 8. $\left\{\begin{matrix}8\\8'\\8''\end{matrix}\right.$

9. $Cn = 0$; $+ M_0$.

Konische Pendelbewegung von rechts nach links . . . . Fig. 9.

Von nun ab wiederholen sich die Curvenzüge genau in derselben Reihenfolge wie in den 8 vorausgehenden Fällen, nur im entgegengesetzten Sinne beschrieben.

10. $- Cn = Cn'$; M_0 fällt.

Curvenzüge ohne Singularitäten . . . . Fig. 10. $\left\{\begin{matrix}10\\10'\end{matrix}\right.$

11. $- Cn = Cn'$ wächst; M_0 erfüllt die Bedingung (18).

Die Curve läuft durch den tiefsten Punkt der Kugel . Fig. 11.

12. $- Cn = Cn'$ wächst; M_0 fällt weiterhin.

Auftreten von Doppelpunkten . . . . Fig. 12.

13. $- Cn = Cn'$; $M_0 = 0$.

Rückkehrpunkte auf dem Grenzkreis der Anfangslage . Fig. 13.

14. $- Cn = Cn'$; $- M_0 = M_0'$.

Sphärische Wendepunkte . . . . Fig. 14.

15. $- Cn = Cn'$ fällt; $- M_0 = M_0'$ erfüllt die Bedingung (35).

Vier aufeinanderfolgende Punkte desselben Hauptkreises, von denen zwei zugleich dem kleineren Grenzkreis angehören . . . . Fig. 15.

16. $- Cn = Cn'$ fällt; $- M_0 = M_0'$ steigt, erfüllt die Bedingung (25) und steigt noch weiter.

Die Curve verläuft einfach berührend, nähert sich allmählig einem Kreise und kommt durch ihn hindurch in analoger Weise wie vorher zur Geltung . . . . Fig. 16. $\left\{\begin{matrix}16\\16'\\16''\end{matrix}\right.$

17. $- Cn = 0$; $- M_0$.

Die Ausgangslage 1 ist wieder erreicht und der Kreislauf der Figurentypen beginnt von Neuem.

II. $\vartheta_0 = \frac{\pi}{2}$. *Der Schwerpunkt des Gyroscops befindet sich zu Anfang der Bewegung in der Horizontalebene durch den Unterstützungspunkt.*

Die 16 Fälle, welche hier aufgezählt werden können, unterscheiden sich von den vorhergehenden einzig und allein dadurch, dass nunmehr der durch die Anfangslage des Schwerpunktes des Gyroscops bestimmte horizontale Kugelkreis in den horizontalen Hauptkreis der Kugel übergegangen ist. Die Figuren 1—16 erscheinen nunmehr nur innerhalb grösserer Ringe eingeschlossen, ohne im Geringsten an ihrem Charakteristikum eine Einbusse zu erleiden.

III. $\vartheta_0 > \frac{\pi}{2}$. *Der Schwerpunkt des Gyroscops befindet sich zu Beginn der Bewegung oberhalb des Unterstützungspunktes.*

Die Anzahl der möglichen Curventypen wird in diesem Falle eine weit grössere, als sie es für eine unterhalb des festen Punktes gewählte Anfangslage war, entsprechend der Thatsache, dass der Schwerpunkt während der Drehung stets über der Horizontalebene durch den Unterstützungspunkt verweilen oder diese Ebene in seiner tiefsten Lage erreichen oder endlich auch unter dieselbe heruntergehen kann.

Doch können nicht für jede der drei Hauptannahmen alle Curvenformen der Annahme I erreicht werden: es kommt eben diesmal ausser auf die Lage der Axe G_0 des anregenden Gesammtkräftepaars — oder eigentlich der Lage der Axe G_0' des § 4, deren Winkel $2u_0$ gegen die Figuraxe durch G_0 halbirt wird — auch auf die absolute Grösse dieses Paares an.

Die Bedingungen des Paragraphen 4, gemäss welcher eine der Möglichkeiten hervorgerufen wird, lauteten

$$G_0^2 \cos(\vartheta_0 + 2u_0) + 2AP \lesseqgtr 0.$$

Wir beginnen nun wieder mit der Annahme

I. $Cn = 0$; $-\mathsf{M}_0 = \mathsf{M}_0'$.

Hiefür fällt die Axe G_0 mit der Axe des negativen Horizontalstosses zusammen, so dass die charakteristische Axe G_0' sicher unter die Horizontalebene des Unterstützungspunktes zu liegen kommt und nach der Interpretation des § 4 die Curve veranlasst, unter diese Ebene herunterzugehen, wie immer auch die Intensität von G_0 d. i. M_0' gewählt gewesen sein möge. *Die Grenzkreise der conischen Pendelbewegung liegen zu verschiedenen Seiten der Horizontalebene* . Fig. I.

II. $+Cn$; $-\mathsf{M}_0 = \mathsf{M}_0'$ fällt.

Der untere Parallelkreis senkt sich, erreicht für die Bedingung (22) *die zu dem Kreis der Anfangslage symmetrische Lage und kommt dem tiefsten Punkte der Kugel näher und näher* . . . . . Fig. II. $\begin{cases}\text{II}\\\text{II'}\end{cases}$

III. $+Cn$ steigt; $-\mathsf{M}_0 = \mathsf{M}_0'$ erfüllt die Bedingung (21).

Die Axe G_0 halbirt den Winkel zwischen der Anfangslage der Figur und der positiven Richtung der Verticalen, in welche also G_0' zu liegen kommt. *Die Bahn des Schwerpunktes durchkreuzt den tiefsten Punkt der Kugel* . . . . Fig. III.

IV. $+Cn$ steigt; $-\mathsf{M}_0 = \mathsf{M}_0'$ fällt weiter.

Die Curve bildet Doppelpunkte, welche unter oder über der Horizontalebene durch den festen Punkt erscheinen, je nachdem

$$G_0^2 \cos(\vartheta_0 + 2u_0) + 2AP \gtreqless 0$$

ist. [Die erstere Curvenform kann man in die letztere, welche projectivisch dieselbe ist, typisch leicht überführen; man hat nur nöthig, sich den unteren Grenzkreis über den horizontalen Hauptkreis heraufgeschoben zu denken] . . . . Fig. IV. $\begin{cases}\text{IV}\\ \text{IV}'\end{cases}$

V. $+Cn$; $-\mathsf{M}_0 = \mathsf{M}_0' = 0$.

Rückkehrpunkte auf dem oberen Parallelkreis der Anfangslage Fig. V. $\begin{cases}\text{V}\\ \text{V}'\end{cases}$

VI. $+Cn$ fällt; $+\mathsf{M}_0$.

Die Curve enthält Wendepunkte . . . . Fig. VI. $\begin{cases}\text{VI}\\ \text{VI}'\end{cases}$

VII. $+Cn$ fällt, $+\mathsf{M}_0$ erfüllt die Bedingung (35).

Die Wendepunkte gehen über in vier benachbarte Punkte desselben Hauptkreises, von denen immer je zwei dem (unten liegenden) Grenzkreis der Endlage angehören . . . . Fig. VII.

VIII. $+Cn$ fällt; $+\mathsf{M}_0$ steigt weiter, erfüllt die Bedingung (25), um sodann noch weiter zu steigen.

Dann verläuft die Curve einfach berührend, indem sie sich mehr und mehr hebt, bis zum Grenzkreis der Anfangslage ankommt, in diesen übergeht, um sich sodann in derselben Weise wieder zu senken Fig. VIII. $\begin{cases}\text{VIII}\\ \text{VIII}'\\ \text{VIII}''\end{cases}$

und für

$$Cn = 0; \quad +\mathsf{M}_0$$

neuerdings in die Bahn des sphärischen Pendels — im umgekehrten Sinne wie Fig. I beschrieben — überzugehen und alle Curvenformen I—VIII in umgekehrtem Sinne zu durchlaufen.

Aus der vorstehenden Classification mag als interessant die Thatsache hervorgehoben werden, dass in ihr die zwei Typen IV′ und V′ erscheinen, welche in der Aufzählung der für den Hauptfall I giltigen Formen gefehlt haben.

Um die Uebersicht in der Figurentabelle zu erleichtern, wurde die Lage des die betreffende Form erzeugenden Momentankräftepaars durch die Zeichnung der Axe G_0 desselben angegeben.

IV. $\vartheta_0 = \frac{\pi}{2}$. *Der Schwerpunkt des Gyroscops liegt im Anfange der Bewegung senkrecht über dem Unterstützungspunkte.*

Dann zieht sich der die Anfangslage charakterisirende Kreis auf den höchsten Punkt der Kugel zusammen. Die Curve enthält den letzteren als unendlichfachen Rückkehrpunkt, ohne jedoch sonst Singularitäten zu besitzen.

Der Schlusssatz beweist sich sehr leicht: nicht nur ist ein Passiren des tiefsten Punktes der Kugel ausgeschlossen — wie im § 4 gezeigt wurde —, es versagt auch die erste der Ungleichungen (34), welche das Auftreten von Wendekanten anzeigen, während von den Werthen M_1 und M_0 des § 6 der erstere im Zeichen mit Cn übereinstimmt, also dessen Vorzeichen stetig behält, der letztere ohnedies ein festgesetztes Zeichen besitzt — so dass die Präcessionsgeschwindigkeiten $\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_1$ niemals durch Null, $\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_0$ niemals durch unendlich hindurch ihr Zeichen wechseln können. Ist aber letztere Möglichkeit ausgeschlossen, so deutet das Unendlichwerden von

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_0 = \frac{\mathsf{M}_0}{A \sin \vartheta_0},$$

welches für $\vartheta_0 = \pi$ thatsächlich eintritt, auf Rückkehrpunkte in dieser Lage.

IIa.

Der Kegel der Polodie.

§ 9.

Einleitung.

Nach Poinsot kann bekanntlich die Rotation eines beliebigen starren Systems um einen festen Punkt versinnlicht werden durch das Rollen eines mit dem System verbundenen beweglichen Kegels auf einem im Raume construirten festen Kegel. Die beiden Kegel besitzen den festen Punkt als Spitze und ihre für irgend einen Zeitpunkt gemeinsame Erzeugende ist die *instantane Drehungsaxe*. Der von der Folge solcher Drehungsaxen gebildete bewegliche Kegel erhielt von Poinsot den Namen „*Kegel der Polodie*“, der von denselben erzeugte räumliche Kegel „*Kegel der Herpolodie*“. Trägt man von dem gemeinsamen Scheitel aus auf jeder Erzeugenden die Grösse der um dieselbe wirkenden Drehgeschwindigkeit als Strecke auf, so erhält man die Basen dieser Kegel, die Curven der *Polodie* und *Herpolodie*.

Um speciell die erstere Curve zu construiren, ist also die Kenntniss der Componenten p, q, r der Winkelgeschwindigkeit Θ der instantanen Drehung bezüglich der drei Hauptträgheitsaxen x', y', z' des Gyroscops

nothwendig. r ist constant gleich n; von p und q liegt bereits eine Combination vor, welche durch die Zeit oder, was dasselbe ist, durch den Neigungswinkel ϑ der Figuraxe gegen die Verticale ausgedrückt ist, nämlich die Grösse $\varrho^2 = p^2 + q^2$ (4) — es ist daher, wenn man nicht anderweitig die Projectionen p und q direct in Function der Zeit zu bilden vermag, noch eine derartige Combination nothwendig.

In der Lottner'schen Arbeit ist nun, wie ich bereits in meiner früheren Untersuchung über das Gyroscop zu bemerken Gelegenheit hatte, die Aufstellung der Componenten p, q als Functionen der Zeit gänzlich unterlassen worden, weil durch den allgemeinen Zusammenhang, in welchem diese Grössen mit den Euler'schen Winkeln ϑ, φ, ψ stehen, eine Substitution der Ausdrücke für die letzteren Winkel in Function der Zeit äusserst complicirte und unübersichtliche Formeln zu Tage gefördert hätte. Ich habe daher in der beregten Abhandlung die Entwicklung mittels Polarcoordinaten ϱ, σ statt der rechtwinkligen Coordinaten p, q versucht, und es gelang, ohne viel Mühe, die für den Polarwinkel $\sigma = \operatorname{arc\,tg} q:p$ auftretende Differentialgleichung zu integriren. Dieser Gedanke, welcher wohl am einfachsten und raschesten zum Ziele führen dürfte, soll auch hier verwendet werden. Einer umfangreichen Arbeit von Söderblom*), welche sich hauptsächlich die Ermittelung der Werthe von p und q zum Ziele gesetzt hat, scheint derselbe entgangen zu sein: es werden daselbst die Formeln für p und q mittels der Einführung unendlicher Reihen aufzustellen gesucht, eine Methode, welche, ganz abgesehen von ihrer Unbequemlichkeit an sich, bereits für den Fall des gewöhnlichen Gyroscops, in welchem in meiner öfter citirten Untersuchung die Aufstellung von p und q sehr leicht gelang, sehr ausgedehnt und weitschweifig erscheint und in der That für den allgemeinen Fall des Gyroscops auch ein geschlossenes Resultat nicht zu liefern vermochte. Das Letztere ist allerdings erreicht in einer Dissertation von Semmler**), indem daselbst $p + iq$ durch Sigmafunctionen der Zeit ausgedrückt erscheinen; doch möchte die Form der Ausdrücke zu einer geometrischen Discussion (wie sie übrigens dort in den Bereich der Betrachtung nicht gezogen wird) schwerlich geeignet erscheinen.

Den Gedanken, den Polarwinkel σ der Polodie einzuführen, hat erst eine neuere Arbeit von Darboux***) offenbar selbständig wieder

---

*) Ueber die Drehung eines Rotationskörpers um einen festen Punkt. Nova acta soc. Upsaliensis. XII. 1884. 1—92.

**) Reduction der Bewegung eines schweren, um einen festen Punkt seiner Axe rotirenden Rotationskörpers auf die elliptischen Transcendenten mit Hülfe der Sigmafunctionen. Inaug. Dissert. Göttingen 1874. 30 S.

***) Sur le mouvement d'un corps pesant de révolution, fixé par un point de son axe. J. de math. 1885. 403—430.

aufgegriffen. Darboux beschäftigt sich nämlich, wie bereits vor ihm Padova*) und Halphen**), mit dem in den hinterlassenen Papieren Jacobi's annoncirten Theorem***), dass die Bewegung eines Gyroscops als solche ersetzt werden kann durch die relative Bewegung zweier Systeme, welche sich um den Unterstützungspunkt des Gyroscops als gemeinsamen festen Punkt ohne Einwirkung beschleunigender Kräfte drehen. Doch scheint Darboux selbst das Bedürfniss empfunden zu haben, auch die absoluten Elemente der Curve der Polodie aufzustellen, und er bestimmt als solche den Radiusvector ϱ und das Differential $d\sigma$ des Polarwinkels σ, nicht aber diesen letzteren selbst, indem er sich begnügt, die Identität der Polodie mit der bei einer „Poinsot'schen Rotation" auftretenden Curve der Herpolodie zu constatiren. Sehen wir von den in den vorstehenden Arbeiten enthaltenen einzelnen Berührungen mit unserem Thema ab, so wird die nachstehende analytische Entwicklung sowohl als auch die geometrische Discussion als neu gelten können.

§ 10.

Der Radiusvector der Polodie.

Aus $r = n$ folgt:

Der Kegel der Polodie besitzt eine ebene, dem Aequator parallele Basis, gelegen im Abstande n vom Unterstützungspunkte — die Polodie ist also eine ebene Curve.

Wir beziehen die letztere auf ein Polarcoordinatensystem. Der Pol sei der Punkt Q, in welcher die ebene Basis von der Figuraxe getroffen wird, die Polaraxe die der Hauptträgheitsaxe des Aequators Ox' parallele Gerade Qx', der Radiusvector ϱ und der Polarwinkel, gezählt im Sinne der anfangs erfolgenden Drehung, σ. Der Radiusvector ϱ ist offenbar nichts anderes als die bereits öfter erwähnte Componente Θ' der instantanen Drehungsaxe bezüglich des Aequators und nach (4)

$$\varrho^2 = p^2 + q^2 = [2P\cos\vartheta + h] : A. \tag{36}$$

Führen wir in diese Gleichung den Werth von Ah aus der Gleichung (12) ein, so wird

$$\varrho^2 = \frac{1}{A^2}\cdot[2P(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0) + \mathsf{M}_0^2], \tag{36a}$$

---

*) Sulla rotazione di un corpo di rivoluzione pesante che gira attorno ad un punto del suo asse di simmetria. Atti di Torino. XIX. 1007—1016. 1884.

**) Sur le mouvement d'un corps grave, de révolution, suspendu par un point de son axe. Comptes rendus. 100. 1065—1068.

***) a. a. O. Bd. X. p. 480 u. 481.

eine Grösse, welche sich stets als positiv erzeigt. Durch Einführung der Zeit t oder des Parameters u aus der Gleichung (11) folgt dann weiter, wenn man noch für die Arbeitsgrösse $P(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_0)$, welche beim Uebergang des Gyroscops aus einer extremen Lage in die andere auftritt, abkürzungsweise A gebraucht,

$$\text{(36b)} \qquad \varrho^2 = \frac{1}{A^2}\left[2A\mathsf{A}\cos^2\mathrm{am}(u+K) + \mathsf{M}_0^2\right].$$

Man erkennt hieraus:

Der Radiusvector der Polodie ist periodisch mit der Zeit und besitzt dieselbe Periode wie der Winkel zwischen der Figuraxe und der Verticalen. Er wird am kleinsten, nämlich ϱ_0, *für die Zeiten* $\tau = 0, \frac{2K}{m}, \frac{4K}{m}, \cdots$, *am grössten, nämlich* ϱ, *für* $\tau = \frac{K}{m}, \frac{3K}{m} \cdots\cdot$ *Die Polodie ist sonach ganz innerhalb zweier concentrischer Grenzkreise gelegen.*

Die Werthe von ϱ_0 und ϱ_1 sind

$$\text{(37)} \qquad \begin{aligned} \varrho_0 &= \frac{\mathsf{M}_0}{A}, \\ \varrho_1 &= \frac{\mathsf{M}_1}{A} = \frac{1}{A}\sqrt{2A\mathsf{A} + \mathsf{M}_0^2}. \end{aligned}$$

In der That fällt nach unseren in § 1 getroffenen Festsetzungen zu Beginn der Bewegung die Hauptaxe y' in die Verticalebene $z'z$ und da das Stossmoment M_0 ein um diese Hauptaxe wirkendes Momentankräftepaar vorstellt, so ist die durch letzteres erzeugte Winkelgeschwindigkeit der Drehung gleich dem Quotienten aus Kräftepaar dividirt durch Trägheitsmoment, also $\varrho_0 = \mathsf{M}_0 : A$, und analog auch $\varrho_1 = \mathsf{M}_1 : A$.

Aus den letzteren Werthen folgt leicht:

Der Radius des inneren Grenzkreises der Polodie ist einzig und allein abhängig von dem anfänglichen, die Figuraxe des Gyroscops senkrecht treffenden horizontalen Stosse und dem Trägheitsmomente des Körpers um eine Axe des Aequators, und zwar wird derselbe um so grösser, je grösser die Intensität des Stosses und je kleiner das Trägheitsmoment gewählt ist.

Der Radius des äusseren Begrenzungskreises ist um so grösser, je stärker der dem Gyroscop ertheilte Horizontalstoss, je grösser das Gewicht des Apparates, je breiter die die Bahn des Schwerpunktes im Raume enthaltende Kugelzone und je kleiner wieder das Trägheitsmoment ist um eine Hauptaxe des Aequators.

Die Differenz

$$\text{(38)} \qquad \varrho_1 - \varrho_0 = \frac{1}{A}(\mathsf{M}_1 - \mathsf{M}_0)$$

giebt die Dicke des die Polodie umschliessenden Kreisringes an.

Dieser Ring ist um so breiter, je grösser das Gewicht des Gyroscops und je breiter die vom Schwerpunkte desselben durchlaufene Kugelzone, je kleiner dagegen das Trägheitsmoment um eine Hauptaxe des Aequators und je kleiner der auf das Gyroscop anfänglich einwirkende Horizontalstoss ist.

Der Beweis erfolgt leicht durch Differentiation der obigen Differenz. Die letztere ist Null für $\mathsf{M}_1 = \mathsf{M}_0$ d. h. für $\mathsf{A} = 0$, $\vartheta_1 = \vartheta_0$:

In dem ausgezeichneten Falle, in welchem die Figuraxe einen Kreiskegel um die Verticale beschreibt, erzeugt die instantane Drehungsaxe einen Kreiskegel um die Axe der Figur — und umgekehrt.

ϱ_0 wird Null, wenn M_0 verschwindet d. h.

Besteht die Anregung, welche zu Anfang der Bewegung einem Gyroscop zu Theil wird, in einer blosen Drehung um die Axe der Figur, mit Ausschluss jedes seitlichen Stosses, so reducirt sich der den Kegel der Polodie berührende innere Grenzkegel auf die Figuraxe selbst, so dass also der erstere Kegel nur von einem Kreiskegel umschlossen erscheint und sich selbst in der Figuraxe unendlich oft durchsetzt. Umgekehrt, soll sich der innere Grenzkegel auf die Figuraxe zusammenziehen, so kann dies nur für die gewöhnliche Art, das Gyroscop durch Drehung um seine Axe loszulassen, ermöglicht werden.

§ 11.

Die Winkelgeschwindigkeit des instantanen Drehpols.

Multipliciren wir die erste der Euler'schen Bewegungsgleichungen (1) mit Aq, die zweite mit Ap und subtrahiren, so wird

$$A^2\left(q\frac{dp}{dt} - p\frac{dq}{dt}\right) = A(A-C)\,n(p^2+q^2) - P(Apa'' + Aqb'');$$

aus den Gleichungen (4) aber folgt, wenn wieder

$$p^2 + q^2 = \varrho^2$$

genommen wird,

$$Apa'' + Aqb'' = l - Cn\cos\vartheta = l - Cn\cdot\frac{A\varrho^2 - h}{2P}.$$

Nun ist $qdp - pdq$ der doppelte Inhalt des von dem Radiusvector ϱ im Zeitelemente dt überstrichenen Dreiecks, also für den Winkel σ als Polarwinkel

$$qdp - pdq = \varrho^2 d\sigma.$$

Durch Substitution dieser Werthe in die obige Gleichung wird

$$(39)\qquad \frac{d\sigma}{dt} = \frac{(2A-C)\,n}{2A} - \frac{2Pl + Cnh}{2A^2}\cdot\frac{1}{\varrho^2}$$

und durch Einführung der für die Constanten Ah und l in (12) und (13) gewonnenen Ausdrücke

$$(39a)\qquad \frac{d\sigma}{dt} = \frac{(2A-C)n}{2A} - \frac{\mathsf{M}_0(Cn\mathsf{M}_0 - 2AP\sin\vartheta_0)}{2A^3}\cdot\frac{1}{\varrho^2}.$$

Diese Gleichung drückt die Geschwindigkeit aus, mit welcher der Endpunkt der instantanen Drehungsaxe d. i. der *instantane Drehpol* die Polodie beschreibt. Die rechte Seite derselben zerfällt in einen constanten und einen mit der Zeit periodischen Term und kann dazu dienen, einige wichtige Fragen über die Art der erzeugten Curve zu beantworten, zunächst die Frage, ob die Polbewegung stets im nämlichen Sinne erfolge oder auch rückläufig sei, ob also $\frac{d\sigma}{dt}$ stets dasselbe Zeichen beibehalte oder durch 0 hindurch das Zeichen wechsle. Jedenfalls werden die Vorzeichen der Kraftmomente Cn und M_0 hierbei eine entscheidende Rolle spielen. Aus der Form der Gleichung (39a) folgt zunächst ohne Weiteres:

Die Curve der Polodie, welche unter dem Einflusse eines Drehmomentes Cn und eines Stossmomentes M_0 erzeugt wird, geht, wenn Cn und M_0 gleichzeitig ihren Sinn ändern, in eine bezüglich der Polaraxe symmetrisch beschriebene Curve über, ohne im Geringsten ihren Charakter zu ändern.

Auf Grund dieser Thatsache können wir Cn stets als positiv, sonach als linksdrehend voraussetzen und nur noch zwischen einem positiven und einem negativen Sinne von M_0 unterscheiden. Der erste Term der rechten Seite ist dann, weil für jeden Körper die Summe zweier Hauptträgheitsmomente grösser als das dritte und sonach $2A > C$ ist, wesentlich positiv; der zweite Term ist es entschieden auch, wenn

$$\mathsf{M}_0 > 0 \qquad Cn\mathsf{M}_0 < 2AP\sin\vartheta_0$$

ist. Diese Ungleichheit kann einer ähnlichen Deutung unterzogen werden wie die früheren Relationen in den §§ 4 und 6, und sagt allgemein aus:

Besitzt der auf die Anfangslage der Figuraxe eines Gyroscops einwirkende horizontal gerichtete Momentanstoss gleichen Sinn mit der um die Figuraxe statthabenden Drehungsgrösse, und ist das Product aus diesen beiden Kraftmomenten kleiner als das Product aus dem doppelten Momente der auf das Gyroscop in jeder Anfangslage wirkenden Schwerkräfte und dem Trägheitsmomente um eine Axe des Aequators, so erscheint die Polodie durchaus in unveränderter Richtung beschrieben.

Diese Beschränkung ist noch nicht enge genug. Um dieselbe genauer verzeichnen zu können, bemerken wir, dass, falls überhaupt eine rückläufige Bewegung eintreten sollte, die Grösse $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)$ für die

Endwerthe des Radiusvectors, ϱ_0 und ϱ_1, verschiedenes Zeichen besitzen muss. Unter Benützung der Werthe (37) folgt aber leicht

$$(40)\quad \begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_0 &= \frac{1}{A\mathsf{M}_0}\left[(A-C)\,n\mathsf{M}_0 + AP\sin\vartheta_0\right],\\ \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_1 &= \frac{1}{\mathsf{M}_1{}^2}\left[\mathsf{M}_0{}^2\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_0 + (2A-C)\,n\mathsf{A}\right]. \end{aligned}$$

Ist $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_0$ positiv, so muss es nothwendigerweise auch $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_1$ sein, und da ϱ nur für $u=u$ und $u=2K-u$, nicht aber öfter zwischen $u=0$ und $u=2K$ den gleichen Werth annehmen kann, so dass also eventuell nur ein Doppelpunkt in dieses Intervall fiele, so lässt sich behaupten:

Stimmt der Sinn, in welchem der instantane Drehpol die Curve der Polodie — von der Anfangslage aus gerechnet — durchläuft, mit dem als positiv gewählten Sinne der Bewegung überein, so kann die Polodie niemals Doppelpunkte besitzen.

Dieser Fall tritt beispielsweise immer dann ein, wenn das Moment des auf die Figuraxe wirkenden horizontalen Stosses positiv ist und die um die Figuraxe zu Beginn der Bewegung thätige Drehung dem Zeichen nach übereinstimmt mit der Differenz der Hauptträgheitsmomente um die Axen des Aequators und der Figur.

Ist $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_0$ Null, so ist noch immer $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_1$ positiv. D. h.

Falls sich die Polodie auf ihren inneren Grenzkreis der Anfangslage mit Rückkehrpunkten aufsetzt, erscheint dieselbe durchaus in dem der positiven Drehrichtung conformen Sinne beschrieben.

Ist endlich $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_0$ negativ, so kann die Geschwindigkeit $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_1$ gleichfalls negativ sein, sie kann aber auch positiv bleiben oder zu Null werden. Jeder dieser Fälle charakterisirt die Form der Curve in eigenartiger Weise, und es erscheint am zweckmässigsten, die gestaltlichen Uebergänge, wie sie durch eine Variation der Daten der Anfangslage hervorgerufen werden, im Zusammenhange vorzuführen, ähnlich wie in der Untersuchung der Präcessionsgeschwindigkeit. Während jedoch bei letzterer die Hauptträgheitsmomente A und C gleichberechtigt auftraten, ist nunmehr der erste Term der Geschwindigkeit $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_0$ in der Anfangslage im Zeichen wesentlich von der Grössenordnung derselben abhängig.

I. $A > C$.

Angenommen, es sei das Moment M_0 des Horizontalstosses dem Zeichen nach übereinstimmend mit der als positiv vorausgesetzten Drehgrösse Cn gewählt, so tritt, wie schon oben erwähnt, eine rückläufige Bewegung nicht ein, und dies währt solange, als M_0 positiv

bleibt. Wird $\mathsf{M}_0 = 0$, so wird $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_0 = \infty$, $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_1 > 0$. Die Geschwindigkeit $\frac{d\sigma}{dt}$ wechselt durch den Werth unendlich hindurch ihr Zeichen, indem sich für diesen Fall des gewöhnlichen Gyroscops der innere Grenzkreis auf den Mittelpunkt zusammenzieht; letzterer ist ein unendlich oft zu zählender Doppelpunkt. — Der Uebergang stimmt ganz mit dem in § 6 für die Präcessionsgeschwindigkeit angeführten überein.

Wird endlich M_0 negativ, $\mathsf{M}_0 = -\mathsf{M}_0'$, so entscheiden für

$$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_0 = \frac{1}{A}\left[(A - C)\,n - \frac{AP \sin\vartheta_0}{\mathsf{M}_0'}\right]$$

und

$$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_1 = \frac{1}{A\mathsf{M}_1^2}\left[\mathsf{M}_0'^2(A - C)\,n - \mathsf{M}_0' AP \sin\vartheta_0 + A(2A - C)\,n\mathsf{A}\right]$$

die in den Klammern enthaltenen Ausdrücke über die eventuell eintretenden Vorzeichen.

Ist zunächst M_0' noch nahe an Null gelegen, so ist $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_0$ merklich negativ, $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_1$ dagegen positiv — die Curve besitzt Doppelpunkte. Wächst die Intensität von M_0', so nähern sich die beiden Geschwindigkeiten der Null, und es fragt sich nur, ob und wann jede derselben diesen kritischen Werth erreichen kann. Im ersten Falle müsste

$$\mathsf{M}_0' = \frac{AP \sin\vartheta_0}{(A - C)\,n}, \tag{41}$$

im zweiten

$$\mathsf{M}_0' = \frac{AP \sin\vartheta_0 - \sqrt{A^2P^2 \sin^2\vartheta_0 - 4A(A - C)(2A - C)\,n\mathsf{A}}}{2(A - C)\,n} \quad \text{oder} \tag{42a}$$

$$\mathsf{M}_0' = \frac{AP \sin\vartheta_0 + \sqrt{A^2P^2 \sin^2\vartheta_0 - 4A(A - C)(2A - C)\,n\mathsf{A}}}{2(A - C)\,n} \tag{42b}$$

sein. Setzen wir die Wurzel als reell voraus, so passirt M_0', welches von Null an wächst, zuerst den Werth (42a), sodann den Werth (42b) und schliesslich erst die Grösse (41). Ist der Ausdruck unter der Wurzel Null, so fallen die beiden Wurzelwerthe (42a) und (42b) von M_0' in einen einzigen zusammen, ist dagegen jener Ausdruck negativ, so kann $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_1$ nie durch Null hindurch sein Zeichen wechseln. D. h. unter Zuziehung kleiner Ueberlegungen:

Für jedes beliebig gestaltete, in beliebiger Anfangslage befindliche Gyroscop existirt zu jeder Grösse der um die Figuraxe ertheilten Drehung ein bestimmter horizontaler Stoss und, umgekehrt, zu jedem vorgegebenen Stossmomente eine bestimmte Drehgrösse um die Eigenaxe des Gyroscops,

welche die Curve der Poinsot'schen Polodie zwingen, sich auf den inneren ihrer Grenzkreise mit Rückkehrpunkten aufzusetzen.

In analoger Weise giebt es für jeden vorgegebenen Horizontalstoss stets eine Grösse der Drehung um die Figuraxe, welche bewirkt, dass in der Polodie Spitzen auf dem äusseren Kreis erscheinen.

Dagegen ist für eine willkürlich angenommene Drehgeschwindigkeit um die Axe der Figur das Auftreten der letzteren Singularitäten nur möglich, wenn

(43) $$A P \sin^2 \vartheta_0 \geq 4A(A-C)(2A-C)\, n\, (\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_0)$$

ist, in welchen Fällen dieselben dann ihrerseits zweimal oder nur ein einziges Mal auftreten. Für letztere Annahme ist der horizontale Momentanstoss gerade doppelt so klein wie derjenige, welche Spitzen auf dem inneren Kreis erscheinen lässt.

Bewegt sich die Grösse M_0' zwischen den als reell angenommenen Grenzen (42a), (42b), so sind $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_0$ und $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_1$ beide negativ: die Curvenzweige verlaufen progressiv und wenigstens in der Nähe jener Grenzwerthe mit Wendepunkten.

II. $A < C$.

Dieser Hauptfall ist mit dem eben behandelten zugleich erledigt. Denn in dem letzteren erscheinen, wenn man Cn d. i. n als negativ annimmt und M_0 wieder variirt, offenbar dieselben Curvenformen, nur in einer anderen Reihenfolge, und die Möglichkeiten $A < C$, $n > 0$ und $A > C$, $n < 0$ sind ja keine anderen als $A > C$, $n < 0$ und $A > C$, $n > 0$.

Die Frage nach den Doppelpunkten der Curve nahm ihren Ausgang von dem zweiten Gliede der rechten Seite der Gleichung (39a). Dieses Glied kann nun auch Null sein, und zwar entweder für

(44) $$\mathsf{M}_0 = 0, \quad \text{oder für} \quad Cn\mathsf{M}_0 = 2AP\sin\vartheta_0.$$

In diesem Falle wird $\frac{d\sigma}{dt} = \text{const.}$, σ der Zeit proportional. D. h.

Es giebt für jedes Gyroscop zwei und nur zwei Möglichkeiten, welche bewirken, dass der instantane Drehpol die Polodie mit gleichförmiger Geschwindigkeit beschreibt. Entweder, es darf auf dasselbe gar kein Horizontalstoss, sondern nur eine Drehung um die Figuraxe eingewirkt haben, oder der seitliche Stoss M_0 muss mit der Drehungsgrösse Cn dem Sinne nach übereinstimmen und eine Intensität besitzen gleich der vierten geometrischen Proportionalen construirt aus dem Trägheitsmoment des Gyroscops um eine Axe des Aequators, aus dem doppelten Moment der auf dessen Anfangslage einwirkenden Schwerkräfte und aus dem um die Figuraxe constant bleibenden Drehungsmomente.

In der That wurde für den ersteren Fall in meiner öfter citirten früheren Abhandlung der Werth des Polarwinkels σ gefunden als

$$\sigma' = \frac{(2A-C)n}{2A}\cdot t = \frac{(2A-C)n}{2Am}\cdot u, \tag{45}$$

welcher daselbst zu verschiedenen Sätzen Veranlassung gab.

Soll in der rechten Seite der Gleichung (39a) das erste Glied Null werden, so muss entweder

$$n = 0 \quad \text{oder} \quad 2A = C$$

sein. In diesen Fällen wird

$$\begin{gathered} \varrho^2 \cdot \frac{d\sigma}{dt} = \text{const.}, \\ \int \varrho^2 \cdot d\sigma = t \cdot \text{const.} \end{gathered} \tag{46}$$

D. h. *Es giebt zwei und nur zwei Möglichkeiten, dass die vom Radiusvector der Polodie überstrichenen Flächenräume der Zeit proportional seien: entweder es darf um die Figuraxe des Gyroscops gar keine Drehung, sondern nur senkrecht derselben ein horizontaler Stoss gewirkt haben, in welchem Falle die Bewegung in die des sphärischen Pendels übergeht, oder es muss, wenn eine solche zugelassen wird, das Gyroscop in eine unendlich dünne Platte senkrecht der Figuraxe übergegangen sein.*

Die Grösse $\frac{d\sigma}{dt}$ wird gänzlich Null, wenn eine der Möglichkeiten erfüllt ist

$$\begin{gathered} n = 0,\ \mathsf{M}_0 = 0; \quad n = 0,\ \vartheta_0 = 0; \quad n = 0,\ \vartheta_0 = \pi; \\ 2A = C,\ \mathsf{M}_0 = 0; \quad 2A = C,\ Cn\,\mathsf{M}_0 = CP\sin\vartheta_0. \end{gathered}$$

D. h. Der *Poinsot'sche Kegel der Polodie* geht in eine *Ebene durch die Figuraxe* und die *Polodie* in eine (unendlich oft zu zählende) *Strecke* über, wenn das Gyroscop ohne Bewegung um die Figuraxe und ohne seitlichen Stoss einem blossen Pendeln überlassen wird, oder wenn das Gyroscop in eine unendlich dünne Platte übergegangen ist und entweder nur noch eine Drehung parallel dieser Platte empfängt oder auch gleichzeitig einen Stoss, dessen Sinn mit demjenigen der ertheilten Drehung übereinstimmt und dessen Intensität die vierte geometrische Proportionale ist zwischen dem Momente der auf die Anfangslage der Platte einwirkenden Schwerkräfte, dem Trägheitsmomente derselben um die Axe der Figur und der Grösse des um die letztere anregenden Kräftepaares.

§ 12.

Untersuchung der Polodie auf Wendepunkte.

Vergleicht man die Werthe von ϱ und $\frac{d\sigma}{dt}$ in den vorhergehenden Paragraphen mit den Ausdrücken für die entsprechenden Polarcoordi-

naten V und $\frac{d\Phi}{dt}$, welche die Herpolodie eines ohne Einfluss beschleunigender Kräfte rotirenden Körpers definiren, so zeigt sich das folgende, zuerst von Darboux ausgesprochene Theorem*):

*Die bei der Bewegung eines schweren Rotationskörpers um einen festen Punkt seiner Umdrehungsaxe auftretende Curve der Polodie besitzt denselben Charakter wie die für eine Rotation ohne Einfluss beschleunigender Kräfte construirte Curve der Herpolodie***).

In der That, bedeuten für die letztere D, E, F und G Constante, welche theils von den drei Hauptträgheitsmomenten des rotirenden Körpers, theils von der Intensität des angreifenden Momentankräftepaars und der Entfernung der invariablen Ebene derselben vom festen Punkte abhängig sind, so sind nach der Theorie besagter Rotation

$$V^2 = D + E \cdot \sin^2 \mathrm{am}\, u,$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = F + G \cdot \frac{1}{V^2},$$

zwei Gleichungen, welche bezüglich ihrer Form mit den Gleichungen (36b) und (39) übereinstimmen. Auf Grund dieser Analogie ist die Frage nach den Wendepunkten in unserer Curve der Polodie identisch mit der Frage nach den Wendepunkten der Herpolodie Poinsot's. Die letztere ist aber bereits dahin beantwortet***), dass Wendepunkte ausgeschlossen sind, sobald das rollende Ellipsoid, welches die Herpolodie erzeugt, ein Centralellipsoid, dass solche dagegen auftreten müssen, sobald das Ellipsoid ein Nichtcentralellipsoid ist, während Wendepunkte möglich sind, wenn die gedachte Fläche ersetzt wird durch ein einschaliges oder zweischaliges Hyperboloid. Die zwei ersten dieser Fälle sind gegeben, wenn die Grössen A, B, C, denen die Halbaxen der rollenden Mittelpunktsfläche proportional sind, positive Grössen und als solche die drei Hauptträgheitsmomente des ohne Einfluss beschleunigender Kräfte rotirenden Körpers bezüglich seines fixen Punktes vorstellen, bei denen die Summe zweier Momente stets grösser ist als das dritte; ein Nichtcentralellipsoid tritt auf, sobald die letztere Beschränkung in Wegfall kommt, und endlich ein Hyperboloid, sobald einer oder zwei der Werthe A, B, C negativ genommen werden.

Zwischen den Constanten A, C, P, n, h, l der Rotation eines Gyroscops, welche in den dem obigen Proportionalitätsfactor G entsprechenden Factor der Gleichung eingehen, existirt nun weder eine Bedingung, wie sie für ein Centralellipsoid giltig ist, noch lassen sich

*) a. a. O. 427.

**) Die erstere Bewegungsart wird von Darboux (l. c.) eine Lagrange'sche, die andere eine Poinsot'sche Rotation genannt.

***) Vgl. meine Notiz „über die Herpolodie". Diese Annalen XXVII. p. 465—470.

überhaupt die obigen Grössen A, B, C durch diese Constanten in einfacher Weise darstellen: es empfiehlt sich daher, die Untersuchung auf Inflexionspunkte ganz selbständig, ohne Anlehnung an das frühere Rotationsproblem, durchzuführen. Während übrigens für das letztere Polarcoordinaten verwendet wurden, zeigt es sich nunmehr bei Weitem zweckmässiger, rechtwinklige Coordinaten in Anwendung zu bringen.

Es sind nämlich die letzteren für einen Punkt der Polodie p, q, die Bedingung für den Eintritt eines Wendepunktes aber ist

$$\frac{dp}{dt}\cdot\frac{d^2q}{dt^2}-\frac{dq}{dt}\cdot\frac{d^2p}{dt^2}=0$$

oder auch

$$\frac{dAp}{dt}\cdot\frac{d^2Aq}{dt^2}-\frac{dAq}{dt}\cdot\frac{d^2Ap}{dt^2}=0.$$

Vermöge der Euler'schen Bewegungsgleichungen (1) und der kinematischen Relationen (2) sind nun die vorstehenden Differentialquotienten leicht zu bilden. Es gelten ferner für die Neigungscosinus der Hauptträgheitsaxen x', y', z' gegen die festen Axen x, y, z die bekannten 9 Relationen der orthogonalen Transformation

$$\begin{aligned}a&=b'c''-c'b'';\ \cdots;\ \cdots;\\ b&=c'a''-a'c'';\ \cdots;\ \cdots;\\ c&=a'b''-b'a'';\ \cdots;\ \cdots.\end{aligned}\tag{47}$$

Vermöge derselben und der zwei Integralgleichungen (4) wird die vorhergehende Bedingung für das Auftreten von Wendepunkten in eine Gleichung übergeführt, welche linear ist bezüglich der Variabeln $\cos\vartheta$. Dies sagt zunächst aus, dass, *falls überhaupt Wendepunkte in der Curve der Polodie erscheinen, immer nur ein einziger zwischen zwei aufeinanderfolgenden Berührungen der Curve mit ihren Grenzkreisen gelegen sein könne.*

Der kritische Werth, für welchen ein derartiger singulärer Punkt erscheint, ist

$$\cos\vartheta=-\frac{n}{AP}\cdot\frac{(A-C)n\cdot[(A-C)nh-Pl]-(2A-C)P[(A-C)nl-AP]}{[(A-C)nh-Pl]-(2A-C)(A-C)n^3}\tag{48}$$

und es muss sich nothwendig wieder

$$\cos\vartheta_1>\cos\vartheta>\cos\vartheta_0\tag{48a}$$

ergeben. Ohne auf die Möglichkeit oder Unmöglichkeit dieser Ungleichungen weiter einzugehen, bemerken wir, dass *für jedes vorgegebene Gyroscop und für jede demselben ertheilte Anregung die Relationen* (48) *unzweideutig entscheiden, ob in der Polodie Inflexionspunkte möglich sind oder nicht.*

Principiell erscheinen dieselben keineswegs ausgeschlossen, weil eben die Constanten der rechten Seite der Gleichung (48) keiner wesentlichen Beschränkung unterworfen sind und desshalb wohl so variirt werden können, dass sie den Grenzbedingungen (48a) Genüge leisten.

§ 13.

Der Polarwinkel der Polodie.

Führen wir in die Gleichung (39) den Parameter (10) $u = mt$ ein und den Werth von ϱ^2 in Function des letzteren, etwa auf Grund der Gleichungen (3b) und (11), so erscheint zunächst durch Integration die Gleichung

$$\sigma - \frac{(2A - C)n}{2Am} u$$

$$= - \frac{2Pl + Cnh}{2An(2P\cos\vartheta_1 + h)} \int \frac{du}{1 - \frac{2P(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_0)}{2P\cos\vartheta_1 + h} \cdot \sin^2 \mathrm{am}(u + K)}.$$

Nun ist aber zufolge der Relation (12)

$$Ah = \mathsf{M}_0^2 - 2AP\cos\vartheta_0,$$

$$Ah + 2AP\cos\vartheta_1 = \mathsf{M}_0^2 + 2AP(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_0),$$

also

$$0 < \frac{2P(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_0)}{2P\cos\vartheta_1 + h} < 1.$$

Wir können desshalb direct setzen

$$\frac{2P(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_0)}{2P\cos\vartheta_1 + h} = \varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am}(i\gamma, \varkappa)$$

oder

$$\frac{2P(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_0)}{2P\cos\vartheta_1 + h} = \varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am}(i\gamma' + K, \varkappa),$$

je nachdem der Bruch auf der linken Seite kleiner oder grösser ist als (10)

$$\varkappa^2 = \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha},$$

oder auch zufolge des Werthes (12) von h, je nachdem

$$2AP(\alpha_1 - \alpha) \lesseqgtr \mathsf{M}_0^2 \tag{49}$$

ist. Wenn wir daher unter ic eine Grösse verstehen, welche im ersten Unterscheidungsfalle gleich $i\gamma$, im zweiten gleich $i\gamma' + K$ ist, so können wir beide Fälle unter einen einzigen subsummiren, indem wir setzen

$$\varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am}(ic, \varkappa) = \frac{2P(\alpha_1 - \alpha_0)}{2P\alpha_1 + h},$$

woraus denn hervorgeht

$$
(50)\qquad
\begin{aligned}
\sin^2 \operatorname{am}(ic, \varkappa) &= \frac{2P(\alpha_1 - \alpha)}{2P\alpha_1 + h}, \\
\cos^2 \operatorname{am}(ic, \varkappa) &= \frac{2P\alpha + h}{2P\alpha_1 + h}, \\
\Delta^2 \operatorname{am}(ic, \varkappa) &= \frac{2P\alpha_0 + h}{2P\alpha_1 + h}.
\end{aligned}
$$

Auf Grund dieser Substitution schreibt sich nun die rechte Seite unserer Integralgleichung

$$
-\frac{1}{2Am} \cdot \frac{2Pl + Cnh}{2P\alpha_1 + h} \cdot \int \frac{du}{1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am}(ic) \cdot \sin^2 \operatorname{am}(u + K)}
$$

$$
= -\frac{1}{2Am} \cdot \frac{2Pl + Cnh}{(2P\alpha_1 + h) \cdot i \operatorname{cotg} \operatorname{am}(ic) \cdot \Delta \operatorname{am}(ic)} \cdot \int \frac{i \operatorname{cotg} \operatorname{am}(ic) \cdot \Delta \operatorname{am}(ic) \cdot du}{1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am}(ic) \sin^2 \operatorname{am}(u + K)}.
$$

Das Integral der rechten Seite gehört aber in dieser Form zu den bekannten 16 Integralen trigonometrischen Charakters, welche von Jacobi in seiner Arbeit sur la rotation d'un corps gefunden wurde*). Soll dasselbe fähig sein, weiterhin im geometrischen Calcül, wie ihn unsere Untersuchung und die Aufstellung des Polarwinkels σ erfordert, verwendet zu werden, so ist unbedingt nothwendig, dass der vor dem Integralzeichen stehende Factor sich auf eine einfache Zahl zusammenziehe; andernfalls würde eine geometrische Repräsentation, speciell die Bildung von $e^{i\sigma}$, $\sin\sigma$ und $\cos\sigma$ hinfällig werden. Dieser Factor beeinflusst nämlich die beiden Terme, in welche das Integral dritter Gattung sich spaltet, indem er sich insbesondere mit dem zum logarithmischen Term gehörigen Factor zu einem neuen Proportionalitätsfactor zusammensetzt, und es wäre denkbar, dass die Eigengestalt des letzteren die Weiterentwicklung nicht gestatten würde. Der reciproke Werth des ebenerwähnten Factors wurde von Jacobi der einem elliptischen Integral dritter Gattung *attachirte Divisor* genannt und seiner Wichtigkeit verdankt man eine eigene Untersuchung**) des berühmten Analytikers, in welcher gelehrt wird, wie man für jedes Integral III. Gattung, auch für ein solches, welches die canonische Form noch nicht besitzt, entscheiden kann, ob der Divisor speciell den charakteristischen Werth $2i$ besitzt oder nicht.

In unserem Falle, in welchem besagtes Integral bereits die Normalform hat, ist der attachirte Divisor von selbst $2i$; damit er es bleibe, ist also unerlässlich, dass der Factor D vor dem Integralzeichen den Werth 1 aufweise.

*) Gesammelte Werke. II. p. 341—342. Nr. 13.

**) Jacobi. Nouvelle théorie de la rotation d'un corps de révolution grave suspendu en un point de son axe. Ges. Werke II. 477—492.

Nun ist gemäss der Gleichungen (50) und (10)

$$\cotg^2 \mathrm{am}(ic) \cdot \Delta^2 \mathrm{am}(ic) \cdot 4m^2 = \frac{(2P\alpha_0 + h)(2P\alpha + h)}{A(2P\alpha_1 + h)},$$

also wird zunächst

$$D = -\frac{2Pl + Cnh}{i\sqrt{A} \cdot \sqrt{(2P\alpha_1 + h)(2P\alpha_0 + h)(2P\alpha + h)}}.$$

Bedenkt man nun den Zusammenhang, welcher besteht zwischen den Wurzeln α_1, α_0, α der cubischen Gleichung (7) und deren Coefficienten μ, gegeben durch die Substitutionen (6), so ergiebt die Multiplication

$$A(2P\alpha_1 + h)(2P\alpha_0 + h)(2P\alpha + h) = -(Cnh + 2Pl)^2,$$

also wird in der That

$$D = 1.$$

Das Integral hat den Werth

$$\frac{d \log \mathsf{H}(ic)}{dc} + \frac{1}{2i} \log \frac{\Theta(u + K + ic)}{\Theta(u + K - ic)},$$

sonach erhalten wir für den Polarwinkel σ die Gleichung

$$(51) \qquad \sigma = \left[\frac{(2A - C)n}{2Am} + \frac{d \log \mathsf{H}(ic)}{dc}\right] \cdot u + \frac{1}{2i} \log \frac{\Theta_1(u + ic)}{\Theta_1(u - ic)}$$

Wie man sieht, besteht der Werth von σ aus einem der Zeit $t\left(= \frac{u}{m}\right)$ proportionalen und einem derselben periodischen Glied und er beginnt für $t = 0$ mit dem Werthe $\sigma_0 = 0$. Setzen wir nun voraus, dass die Polaraxe in der Ebene der Polodie nicht fest gelegen sei, sondern im Sinne der anfänglichen Bewegung des Gyroscops eine mit constanter Winkelgeschwindigkeit σ_1 erfolgende Eigendrehung besitze,

$$(52) \qquad \sigma_1 = \frac{(2A - C)n}{2A} + m \frac{d \log \mathsf{H}(ic)}{dc},$$

so können wir als neuen Polarwinkel betrachten

$$(53) \qquad \sigma' = \sigma - \sigma_1 \cdot t = \frac{1}{2i} \log \frac{\Theta_1(u + ic)}{\Theta_1(u - ic)}.$$

D. h. *Rechnet man den Winkel, welchen der Radiusvector ϱ der Polodie überstreicht, von einer Axe, welche in der Ebene der Curve im Sinne der anfangs erfolgenden Bewegung mit einer gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit σ_1 rotirt, so ist dieser Winkel mit der Zeit periodisch. Zu den Zeiten $\tau = 0, \frac{K}{m}, \frac{2K}{m}, \cdots$ fällt die bewegliche Axe mit den Minimal- und Maximalradienvectoren, den Radien ϱ_0 und ϱ_1 der Grenzkreise zusammen.*

Da sowohl der Radiusvector ϱ als der Polarwinkel σ' dieselben Werthe annehmen für die Parameter u, $2K - u$, $2K + u \cdots$, so

besteht die Curve der Polodie aus unendlich vielen congruenten Zweigen und ein jeder solche Zweig aus zwei symmetrischen Halbzweigen. Die Form eines Curvenhalbzweiges bestimmt die Gestalt der ganzen Curve.

Von besonderem Interesse sind natürlich die Winkel, welche diese Zweige am Pole spannen, die Winkel σ_{2K} und σ_K einer „*ganzen*" und einer „*halben Welle*", indem der Werth

$$\sigma_K = K\left[\frac{(2A-C)}{2Am} + \frac{d\log \mathsf{H}(ic)}{dc}\right] \tag{54}$$

über die Art und Weise Aufschluss giebt, in welcher die Polodie von einem der Grenzkreise zum andern anläuft. Aus den Untersuchungen über die Winkelgeschwindigkeit $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)$, mit welcher die Polodie beschrieben wird, ist deutlich, dass

$$\sigma_K \gtreqless 0$$

zu werden vermag.

§ 14.

Classification der Formen der Polodie.

Um eine solche zu erzielen, bedarf es nur einer Sichtung der in den vorhergehenden Abschnitten niedergelegten Sätze. Nun wurde in der Untersuchung über die Winkelgeschwindigkeit der Polodie gezeigt, dass für die letztere Curve durchaus dieselben Formen erscheinen, einerlei, ob das Hauptträgheitsmoment des Gyroscops um die Figuraxe kleiner oder grösser ist als dasjenige senkrecht derselben, einerlei ferner, wie der Sinn der um die Figuraxe thätigen constanten Drehung gewählt ist. Nur die Reihenfolge der Figuren ist eine andere, und da es uns nicht, wie bei der Bewegung des Schwerpunktes, darauf ankommt, die ganze Reihe der Uebergänge bis zurück zur Ausgangscurve zu verfolgen, sondern nur alle solche, welche einen geschlossenen (Halb-) Turnus bilden, so setzen wir voraus

$$A > C \qquad Cn > 0.$$

Wir variiren übrigens M_0, und nicht Cn, weil für die Bewegung der ersteren Grösse eine viel grössere Mannigfaltigkeit in den Uebergängen geboten wird denn für eine Verschiedenheit in der Wahl von Cn. Die nothwendigen Bedingungen sind fast alle aus dem Paragraphen 11 (und 13) genommen, in erster Linie die Bedingung

I. $AP\sin^2\vartheta_0 > 4A(A-C)(2A-C)\,n\,(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_0)$.

a. $\mathsf{M}_0 + \cdot$

Es wird $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_0 > 0$, $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_1 > 0$. *Die Curve verläuft im Sinne der um die Figuraxe thätigen Drehung einfach berührend* . . Fig. a.

b. $+ M_0$ fällt.

$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_0$ wächst, $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_1$ bleibt positiv. Die Stadien ϱ_1, ϱ_0 der Grenzkreise nehmen ab, die Dicke $\varrho_1 - \varrho_0$ dagegen wächst (vgl. § 10). *Der Ring der Polodie erweitert sich, indem der innere Grenzkreis sich gegen den äusseren merklich verengt. Die Curve besitzt noch keine Singularitäten* . . . . Fig. b.

c. $M_0 = 0$.

$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_0 = \infty$, $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_1 > 0$. *Fall des gewöhnlichen Gyroscops. Der innere Grenzkreis schrumpft auf seinen Mittelpunkt zusammen, welcher unendlich oft Doppelpunkt der Curve wird. In ihm wechselt die Bewegungsrichtung ihr Zeichen* . . . . Fig. c.

d. $- M_0 = M_0'$, klein.

$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_0 < 0$, $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_1 > 0$. *Die Polodie erstreckt sich von der Berührung mit dem inneren Kreis aus in einem der anfangs ertheilten Drehrichtung umgekehrten Sinne und bildet Schleifen, deren stumpfes Ende auf dem äusseren Grenzkreis ruht* . . . . Fig. d.

e. M_0' erreicht den Werth (42a).

$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_0 < 0$, $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_1 = 0$. *Die Doppelpunkte gehen über in Spitzen auf diesem Kreise* . . . . Fig. e.

f. M_0' bewegt sich zwischen den Werthen (42a) und (42b).

$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_0 < 0$, $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_1 < 0$. *Die Curve besitzt zunächst Wendepunkte, nähert sich dann mehr und mehr einer stabilen Form, nimmt von dieser aus in der gleichen Weise wieder rückwärts die bereits innegehabten Typen an, um schliesslich mit ihren Wendepunkten dem äusseren Grenzkreis wieder zuzustreben* . . . . Fig. f. $\left\{\begin{matrix} \text{f} \\ \text{f}' \\ \text{f}'' \end{matrix}\right.$

Dabei ist es nun ziemlich gleichgiltig, ob die soeben erwähnte stabile Form selbst noch Wendepunkte besitzt oder ob die Curve eventuell, nachdem ihre Wendepunkte gegen den kleineren Kreis angegangen sind und daselbst vier auf gerader Linie liegende benachbarte Punkte gebildet haben, in ihr ohne Singularitäten verläuft.

Definitiv entscheidet hierüber die rechte Seite der Wendepunktsgleichung (48), wenn man in diese den betreffenden Werth von M_0', welcher offenbar $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_1$ zu einem Minimum machen muss d. i. $M_0' = AP \sin \vartheta_0 : (A - C)\, n$ einführt.

g. M_0' erfüllt die Bedingung (42b).

$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_0 < 0$, $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_1 = 0$. *Die Wendepunkte sind wieder in Spitzen auf dem grösseren Kreis übergegangen* . . . . Fig. g.

h. M_0' bewegt sich zwischen den Werthen (42b) und (41).

$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_0 < 0$, $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_1 > 0$. *Es erscheinen wieder Doppelpunkte von derselben Art wie im Falle* d. . . . . Fig. h.

Nähert sich die Intensität des horizontalen Stossmomentes M_0' dem Betrage, welcher durch die Gleichung (41) dargestellt ist, so strebt die Curve mehr und mehr darnach, auf ihrem inneren Begrenzungskreise Spitzen zu bilden. Da aber ein successives Anwachsen von M_0' einen continuirlichen Uebergang in den Curvenformen erheischt, so müssen vorher Schleifen entstehen, deren stumpfes Ende diesem Kreise zugekehrt ist, und diese ihrerseits können aus der Curvenform *h* nur durch ein Oval hindurch entstehen, indem der bislang negative Werth (54) σ_K des Winkels einer halben Welle vom Negativen zum Positiven durch Null hindurch wechselt.

i. M_0' bewegt sich zwischen den Werthen (42b) und (41) und es ist $\sigma_K = 0$.

Die Curve ist in ein unendlich oft zu rechnendes Oval übergegangen . . . . Fig. i.

k. M_0' erfüllt dieselben Ungleichungen und es ist $\sigma_K > 0$.

Es erscheinen Doppelpunkte und die in ihnen sich durchsetzenden Curvenzweige wenden dem inneren Begrenzungskreis die concave Seite zu . . . . Fig. k.

l. M_0' erreicht den Werth (41).

$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_0 = 0$, $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_1 > 0$. *Die Doppelpunkte haben sich in Spitzen zusammengezogen, welche auf dem inneren Kreise erscheinen* . . Fig. l.

m. M_0' wächst weiter.

$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_0 > 0$, $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_1 > 0$. *Die Curve verläuft zunächst mit Wendepunkten, und zwar so lange, bis die letzteren in Undulationspunkte übergegangen sind, um sodann wieder einfach berührend aufzutreten.* . . . . Fig. m. $\begin{cases} \text{m} \\ \text{m}' \\ \text{m}'' \end{cases}$

Nunmehr ist die Ausgangsform *a* wieder erreicht, wenn auch im umgekehrten Sinne erzeugt. Würde man M_0' weiter wachsen lassen, so würden die Grenzkreise der Polodie grösser und grösser werden, während der Ring, welchen sie bilden, gleichzeitig schmaler und schmaler wird. Für $M_0' = \infty$ würde ein unendlich grosser Kreis als Polodie erscheinen und in ihm würde die Bewegungsrichtung ihren Sinn ändern, indem für negative M_0' oder, was dasselbe ist, für positive M_0 wieder die Typen auftreten, von denen wir thatsächlich ausgegangen sind — der Cyklus aller möglichen Figuren wäre geschlossen.

Die Kreisbewegung, welche hier im Unendlichen angedeutet ist, vollzieht sich übrigens auch im Endlichen, sobald

M_0 die Bedingung (25) erfüllt.

Diese *Kreisbewegung* kann sich an den Fall *m* anschliessen, sie könnte sich aber auch in der Nähe der unter *f* beschriebenen Stammform zeigen — je nach der Grösse der Constanten, welche die Gleichungen (41), (42a), (42b) und (25) erfüllen. Da die Frage ziemlich gleichgiltig ist, so mag eine genauere Discussion unterbleiben, um so mehr als dieselbe zu Unterscheidungen in der Grössenordnung der Constanten Anlass gäbe, welche weder elegant noch wichtig genug sind, um aufgezeichnet zu werden.

Interessanter dagegen ist der Umstand, dass sich leicht zeigen lässt, wie der auftretende Kreis eigentlich nichts anderes ist als eine Vereinigung von Curvenformen der Unterscheidungen $e(g)$ und l. Es ist nämlich für $\cos\vartheta_1 = \cos\vartheta_0$ die geleistete Arbeit $A = P(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_0) = 0$ und es werden die beiden Werthe (41) und (42b) dieselben, während (42a) zu Null wird.

II. $AP\sin^2\vartheta_0 = 4A(A-C)(2A-C)n(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_0)$.

Für diese Beziehung zwischen den in das Problem eingehenden Grössen fallen die beiden Wurzelwerthe (42a) und (42b) in einen einzigen zusammen. [Die Parabel, welche die Variation der rechten Seite (40) der Geschwindigkeit $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_1$ auf Grund der Variation von M_0 darstellt, hat ihren Scheitel diesmal nicht senkrecht unter sondern auf der Abscissenaxe, auf welcher die Zunahme von M_0 bezw. M_0' gemessen wird]. D. h.

Aus der Curve der Polodie fallen diesmal alle jene Formen aus, welche sich zwischen den beiden Curven mit Rückkehrpunkten auf dem äusseren Kreis gezeigt haben d. s. die Formen f, f', f'' — die Curve erstreckt sich von der Form e (bezw. von der damit völlig identischen Form g) direct in die Form h.

III. $AP\sin^2\vartheta_0 < 4A(A-C)(2A-C)n(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_0)$.

Die Werthe (42a), (42b) sind diesmal beide imaginär. [Die vorher erwähnte Parabel liegt ganz auf der positiven Seite der Ordinatenaxe]. D. h.

Es verschwinden unter dieser Annahme auch die Typen e und g von Curven, welche sich auf den äusseren Kreis mit Spitzen aufsetzen — die Curve vollzieht ihren Uebergang von der Form d (bezw. h) direct in das Oval i.

§ 15.

Die Winkelgeschwindigkeiten der Drehung um zwei Hauptaxen des Aequators.

Wählt man unter den Hauptträgheitsaxen des Aequators die bewegliche Polaraxe, welche mit der constanten Winkelgeschwindigkeit σ_1 rotirt, und eine Senkrechte hinzu und bezeichnet die Componenten der Winkelgeschwindigkeit Θ der instantanen Drehung bezüglich dieser zwei Axen mit p' und q', so ergiebt sich

$$p' = \varrho \cos \sigma'$$
$$q' = \varrho \sin \sigma'.$$

Nun ist

$$\cos \sigma' = \frac{e^{i\sigma'} + e^{-i\sigma'}}{2} = \frac{\Theta_1(u+ic) + \Theta_1(u-ic)}{2\sqrt{\Theta_1(u+ic)\Theta_1(u-ic)}},$$

$$\sin \sigma' = \frac{e^{i\sigma'} - e^{-i\sigma'}}{2i} = \frac{\Theta_1(u+ic) - \Theta_1(u-ic)}{2i\sqrt{\Theta_1(u+ic)\Theta_1(u-ic)}},$$

also für den Werth (36) von ϱ,

$$\varrho = \frac{1}{A}\sqrt{\mathsf{M}_0^2 + 2A\mathsf{A}\cos^2 \operatorname{am}(\mu + K)},$$

$$(55)\qquad \begin{aligned} p' &= \frac{\varrho}{2\sqrt{\Theta_1(u+ic)\,\Theta_1(u-ic)}}\left\{\Theta_1(u+ic) + \Theta_1(u-ic)\right\}, \\ q' &= \frac{\varrho}{2i\sqrt{\Theta_1(u+ic)\Theta_1(u-ic)}}\left\{\Theta_1(u+ic) - \Theta_1(u-ic)\right\} \end{aligned}$$

d. h. *die Winkelgeschwindigkeiten der Drehung bezüglich zweier senkrechter Hauptaxen des Aequators, welche in diesem mit einer constanten Geschwindigkeit* σ_1 *im Sinne der anfänglich erfolgenden Bewegung rotiren, sind mit der Zeit periodisch.*

Wählt man als Coordinatenaxen dagegen jenes feste Axenpaar x', y', von welchem die Axe x' gemäss der Festsetzungen des § 1 zu Beginn der Bewegung mit der festen horizontalen Axe x zusammenfallen sollte, so werden die Projectionen der Drehgeschwindigkeit Θ

$$p = p' \cos(\sigma_1 t) - q' \sin(\sigma_1 t),$$
$$q = q' \cos(\sigma_1 t) + p' \sin(\sigma_1 t)$$

und durch Substitution

$$(56)\qquad \begin{aligned} p &= \frac{\varrho}{2\sqrt{\Theta_1(u+ic)\,\Theta_1(u-ic)}}\left\{\Theta_1(u+ic)e^{i\sigma_1 t} + \Theta_1(u-ic)e^{-i\sigma_1 t}\right\}, \\ q &= \frac{\varrho}{2i\sqrt{\Theta_1(u+ic)\Theta_1(u-ic)}}\left\{\Theta_1(u+ic)e^{i\sigma_1 t} - \Theta_1(u-ic)e^{-i\sigma_1 t}\right\}. \end{aligned}$$

IIb.
Der Kegel der Herpolodie.

§ 16.

Die Kugelzone, welche die Herpolodie umschliesst.

Der feste Kegel der instantanen Drehungsaxen im Raume, auf welchem der für den Körper construirte Kegel der Polodie abrollen muss, um nach Poinsot das vollständige Bild der successiven Ueberführung des beweglichen Systems von einer Lage in eine beliebige zweite Lage zu verdeutlichen, wurde von dem genannten Autor *Kegel der Herpolodie* genannt. Da derselbe zugleich mit dem beweglichen Kegel den Unterstützungspunkt des Gyroscops als gemeinsames Centrum besitzt, so ist er also völlig bestimmt durch seine Basis, die Herpolodie, wie ja auch das Abrollen der Kegel gänzlich ersetzt werden kann durch dasjenige der Polodie auf letzterer Curve.

Nun waren die Coordinaten eines Punktes der Polodie bezüglich der drei Hauptträgheitsaxen x', y', z' des Gyroscops bezw. p, q, n; es sind also die Coordinaten eines Punktes der Herpolodie bezüglich der festen Axen x, y, z des Raumes

$$(57)\qquad \begin{aligned} \xi &= ap + bq + cn, \\ \eta &= a'p + b'q + c'n, \\ \zeta &= a''p + b''q + c''n. \end{aligned}$$

Wegen der Orthogonalität der zwei Axensysteme ist

$$(58)\qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = p^2 + q^2 + n^2 = \varrho^2 + n^2$$

und also auf Grund der ersten Gleichung (4)

$$(58\,a)\qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{2P\cos\vartheta + h}{A} + n^2.$$

Die Coordinate ζ wird unter Benutzung der Gleichung (4)

$$(59)\qquad \zeta = \frac{l}{A} + \frac{n(A-C)}{A}\cos\vartheta,$$

was sich durch Einführung des horizontalen Stossmomentes M (13) auch schreibt

$$(59\,a)\qquad \zeta = \frac{An\cos\vartheta - \mathsf{M}\sin\vartheta}{A}.$$

Eliminirt man aus den Gleichungen (58) und (59) den nach (11) mit der Zeit periodischen Parameter $\cos\vartheta$ des Neigungscosinus zwischen den Axen der Figur und Schwere, so kommt

$$\xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{P}{n(A-C)}\right)^2 \tag{60}$$
$$= \frac{AP^2 + An^4(A-C)^2 + hn^2(A-C)^2 - 2Pln(A-C)}{An^2(A-C)^2},$$

die Gleichung einer Kugel*), deren Mittelpunkt auf der Verticalen durch den festen Punkt im Abstande

$$\zeta' = \frac{P}{n(A-C)} \tag{61}$$

von letzterem gelegen ist:

Die Herpolodie ist eine sphärische Curve, gelegen auf einer Kugel, deren Mittelpunkt sich in der Verticalaxe durch den Unterstützungspunkt befindet und von dem letzteren eine Entfernung besitzt gleich dem Maximalmoment der Schwerkräfte dividirt durch das Product aus der um die Figuraxe ertheilten constanten Drehgeschwindigkeit und der Differenz der Trägheitsmomente des Gyroscops um die Hauptaxen des Aequators und der Figur. Je nachdem dieses Product positiv oder negativ ist, liegt der Mittelpunkt der Kugel unter oder über dem Unterstützungspunkte.

Durch Variation des Abstandes (61) ζ' folgt leicht:

Die Herpolodie liegt der Horizontalebene durch den Unterstützungspunkt um so näher, je kleiner das Gewicht Π *des Gyroscops und der Abstand* γ *von Schwerpunkt und Unterstützungspunkt, je grösser die Intensität der um die Figuraxe ertheilten Drehung ist und je näher das Trägheitsellipsoid des Körpers für den festen Punkt der Kugelgestalt kommt.*

Die Coordinate ζ ist mit der Grösse $\cos\vartheta$, also mit der Zeit t periodisch, und zwar erreicht sie ihre extremen Werthe für $\cos\vartheta_0$ und $\cos\vartheta_1$, denn es stimmen die Differenzen

$$\zeta - \zeta_0 = \frac{n(A-C)}{A}(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0),$$

$$\zeta_1 - \zeta = \frac{n(A-C)}{A}(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta),$$

weil die Differenzen der cos wesentlich positiv sind, im Zeichen durchaus mit dem Producte $n(A-C)$ überein, so dass also ζ stets zwischen ζ_0 und ζ_1 gelegen ist:

Die Curve der Herpolodie verläuft innerhalb zweier der Horizontalebene parallelen Kugelkreisen.

Die Dicke der zwischen diesen gelegenen Zone beträgt

$$\zeta_1 - \zeta_0 = \frac{n(A-C)}{A}(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_0); \tag{62}$$

die Dicke der Kugelzone, welche die sphärische Bahn des Schwerpunktes aufnimmt, war aber

*) Wohl zuerst von Darboux bemerkt a. a. O. p. 425.

$$\delta = \gamma\,(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_0),$$

also schreibt sich auch

$$\zeta_1 - \zeta_0 = \frac{n(A-C)}{A}\,\frac{\delta}{\gamma}. \tag{62 a}$$

D. h. *die Dicke der Kugelzone, innerhalb deren sich die Curve der Herpolodie befindet, steht zur Dicke der Kugelzone, welche die räumliche Bahn des Schwerpunktes umschliesst, in einem constanten Verhältniss, welches unabhängig ist vom Gewichte des Körpers und dessen Anfangslage, und um so grösser erscheint, je grösser die Drehgeschwindigkeit der Axe der Figur, je kleiner das Trägheitsmoment senkrecht derselben und der Schwerpunktsabstand, je grösser die Kugelzone ist, innerhalb deren sich der Schwerpunkt bewegt, je näher endlich das Hauptträgheitsellipsoid des Gyroscops der Kugelgestalt kommt.*

Da die Differenz $\zeta_1 - \zeta_0$ zugleich mit dem Producte $n(A-C)$ und mit ζ' (61) positiv oder negativ ist, so zeigt sich leicht:

Je nachdem der Mittelpunkt der Kugel, welche die Herpolodie aufnimmt, unterhalb oder oberhalb des festen Unterstützungspunkts gelegen ist, liegt der durch die Normalanfangs- oder Normalendlage (ϑ_0 oder ϑ_1) der Figuraxe repräsentirte Parallelkreis näher an dem Unterstützungspunkte.

Dabei kann es kommen, dass beide Parallelkreise oberhalb oder beide unterhalb des Unterstützungspunktes oder zu verschiedenen Seiten desselben zu liegen kommen. Aufschluss hierüber geben die absoluten Werthe ζ_0 und ζ_1, in welche die Grösse ζ (59 oder 59a) für $\vartheta = \vartheta_0$ und $\vartheta = \vartheta_1$ übergeht.

Multiplicirt man die beiden Gleichungen (61) und (62) und beachtet, dass das Product $P(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_0)$ die bereits früher, § 10, erwähnte Grösse A der Arbeit ist, welche durch die Ueberführung des Schwerpunktes aus einer extremen Lage in die folgende geleistet wird, so kann man schreiben

$$(\zeta_1 - \zeta_0)\,\zeta' = \frac{\mathsf{A}}{A}. \tag{63}$$

Diese Relation sagt:

Für jedes Gyroscop ist das Rechteck aus der Dicke der Kugelzone, welche die Curve der Herpolodie einschliesst, und dem Abstande zwischen dem Aequator der Kugel und dem Unterstützungspunkte gleich der beim Uebergang des Körpers von einer extremen Lage in die andere geleistete Arbeit, dividirt durch das Trägheitsmoment desselben senkrecht der Axe der Figur.

Die hier fortwährend auftretende Grösse $n(A-C):A$ spielt auch in dem Beweise des Jacobi'schen Theorems eine grosse Rolle*). Das

*) Darboux, a. a. O., p. 405 etc.

Nullwerden derselben vermöge der Gleichheit $A = C$, welches am Schlusse des nächsten Paragraphen erörtert wird, findet statt für ein ganz specielles Gyroscop d. h. für ein Gyroscop, welches um einen ganz speciellen Punkt seiner Axe rotirt. Nach Poinsot's théorie nouvelle de la rotation des corps giebt es bekanntlich im allgemeinen zwei solcher ausgezeichneten Punkte, in welchen das Trägheitsellipsoid des Gyroscops zur Kugel wird.

§ 17.

Horizontalprojection der Herpolodie.

Für den Winkel v, welchen die Erzeugende des Kegels der Herpolodie jeweils mit der positiven Richtung der Verticalen bildet, ist

$$\cos v = \frac{\zeta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}}$$

und durch Substitution der Werthe (58) und (59)

$$\cos v = \frac{l + n(A - C)\cos\vartheta}{\sqrt{Ah + A^2 n^2 + 2AP\cos\vartheta}}. \tag{64}$$

Diese Grösse ist zugleich mit $\cos\vartheta$ periodisch und mit $d\vartheta$ gleich Null, so dass also die Herpolodie entweder die Parallelkreise berührt oder höchstens Spitzen auf den letzteren bildet. Dieselbe zeigt sich hinlänglich charakterisirt, wenn noch, nachdem bereits als erster geometrischer Ort eine Kugel gefunden wurde, die Projection auf die Horizontalebene in ihrer Form als bekannt vorliegt.

Die Gleichungen dieser Projectionscurve sind aber in rechtwinkligen Coordinaten gegeben durch die Ausdrücke von ξ und η (56), in Polarcoordinaten durch die Werthe des Radiusvector

$$w = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$$

und des Polarwinkels χ, dessen Differential sich durch

$$d\chi = \frac{1}{w^2}(\eta\, d\xi - \xi\, d\eta)$$

darstellt. Das Differential von dw ist wieder zugleich mit $d\vartheta$, also für $\vartheta = \vartheta_0$ und $\vartheta = \vartheta_1$ gleich Null, es läuft also *die Horizontalprojection der Herpolodie wieder zwischen zwei concentrischen Grenzkreisen, deren Umfänge sie im allgemeinen (soferne nicht Spitzen auftreten) berührt.*

Für dieselbe fragt es sich daher, ganz wie in den vorher geführten Untersuchungen über die Curven des Schwerpunktes und der Polodie, ob sie stets im nämlichen Sinne beschrieben erscheint oder ob Doppelpunkte, eventuell Spitzen, und weiterhin wieder, ob Wendepunkte auftreten können. Die letztere Frage erscheint hier allerdings von secundärem Interesse, weil das Erscheinen von Inflexionspunkten in

der Projection einer Curve zufälliger Art sein kann und über die gestaltlichen Verhältnisse der Raumcurve selbst also möglicherweise ohne Belang ist; die Entscheidung geschieht übrigens, wie bei der Polodie, am zweckmässigsten mittels der rechtwinkligen Coordinaten ξ, η, während für die Untersuchung auf Doppelpunkte die Polarcoordinaten w, χ sich handlicher erweisen.

Schreiben wir nämlich

$$Aw^2 \frac{d\chi}{dt} = \eta \frac{dA\xi}{dt} - \xi \frac{dA\eta}{dt},$$

worin zufolge der zwei ersten Gleichungen (56)

$$A\xi = (Apa + Aqb) + Anc,$$
$$A\eta = (Apa' + Aqb') + Anc'$$

bedeutet, so können wir nach erfolgter Differentiation sowohl die Differentialgleichungen (1) und (3) als auch die Beziehungen (47) der orthogonalen Transformation benützen, um die Differentialquotienten auf die einfache Form zu bringen

$$\text{(65)} \qquad \frac{dA\xi}{dt} = Pc'; \quad \frac{dA\eta}{dt} = -Pc.$$

Diese Gleichungen sagen für sich im allgemeinen das Folgende aus:

Die Abscisse ξ und die Ordinate η der Herpolodie erreichen je ihre extremen Werthe eines Maximums oder Minimums, sobald die Figuraxe des Gyroscops in die durch die festen Axen $(\xi =) x$ und $(\eta =) y$ der Horizontalebene geführten Verticalebenen zu liegen kommt.

Beachtet man, dass die rechtwinkligen Coordinaten x, y eines Punktes der Herpolodie gleich sind bezw. γc und $\gamma c'$, so kann man die Relationen (65) auch in der Form schreiben

$$\text{(65 a)} \qquad \frac{d\xi}{d\eta} = -\frac{y}{x}$$

d. h. *zieht man in der Horizontalprojection der Bahn des Schwerpunktes die Radienvectoren nach den einzelnen Punkten der Curve und in den entsprechenden Punkten der Horizontalprojection der Herpolodie die Tangenten, so steht jede Tangente auf dem correspondirenden Vector senkrecht.*

Substituiren wir die Werthe von (65) in die Differentialgleichung für χ, so kommt zunächst

$$Aw^2 \frac{d\chi}{dt} = P(c\xi + c'\eta).$$

$c\xi + c'\eta + c''\zeta$ ist aber die Projection einer Erzeugenden des Kegels der Herpolodie längs der Figuraxe des Gyroscops und als solche constant gleich n, also wird

$$Aw^2 \frac{d\chi}{dt} = P(n - c''\zeta),$$

und wenn man $c'' = \cos\vartheta$, sowie die Ausdrücke (59), (59a) von $\mathfrak{z}$ substituirt,

$$(66)\qquad A^2 w^2 \frac{d\mathfrak{z}}{dt} = P[An \sin^2\vartheta + Cn \cos^2\vartheta - l\cos\vartheta]$$

respective, unter Beachtung des Werthes (13) von l,

$$(66\,\text{a})\qquad A^2 w^2 \frac{d\mathfrak{z}}{dt} = P\sin\vartheta[An\sin\vartheta + \mathsf{M}\cos\vartheta].$$

Soll nun $\frac{d\mathfrak{z}}{dt}$ durch Null hindurch sein Zeichen wechseln können, so muss der Werth ϑ''', für welchen solches eintritt, wieder den bekannten Ungleichungen genügen

$$\cos\vartheta_0 < \cos\vartheta''' < \cos\vartheta_1 .$$

Aus der Formel (66) erkennt man aber, dass die rechte Seite stets gleiches Zeichen behält, wenn bei gleichem Vorzeichen von Cn und $l\cos\vartheta$ negativ, bei entgegengesetzten Vorzeichen stets positiv bleibt. D. h. unter Berücksichtigung früherer Sätze:

Die sphärische Curve der Herpolodie (wie deren Horizontalprojection) kann niemals Doppelpunkte besitzen, wenn die Axe des zu Beginn der Bewegung auf das Gyroscop einwirkenden Kräftepaares innerhalb oder ausserhalb des Winkelraumes zwischen der Aequatorebene und der Horizontalebene des Unterstützungspunktes fällt und gleichzeitig der Schwerpunkt des Gyroscops gezwungen ist, entweder unterhalb oder oberhalb des Unterstützungspunktes zu verweilen.

Fallen diese Beschränkungen weg, so sind Doppelpunkte denkbar, wenn auch ihr Erscheinen wegen der Relationen, welche ϑ''' einschränken, noch in Frage gestellt ist. Jedenfalls aber ist $\frac{d\mathfrak{z}}{dt} = 0$ für $\vartheta = 0$ bez. $\vartheta = \pi$. Dies sagt, dass der Schwerpunkt des Gyroscops die Verticalaxe passire; nach den früheren Entwicklungen des § 4 kann jedoch der Winkel ϑ nur Null werden, beziehungsweise den Werth π erreichen, entweder für $\vartheta_1 = 0$ oder für $\vartheta_0 = \pi$ und für diese Werthe erreicht die Curve der Herpolodie ihre Grenzkreise, so dass statt allgemeiner Doppelpunkte Spitzen auf diesen Kreisen erscheinen. D. h.

Sobald die Figuraxe des Gyroscops bei ihrer Bewegung im Raume die Verticalaxe passirt, setzt sich die sphärische Curve der Herpolodie stets auf einen der sie einschliessenden Parallelkreise mit Rückkehrpunkten auf — und zwar auf den durch $\mathfrak{z}_0$ oder $\mathfrak{z}_1$ markirten, je nachdem das Passiren der Verticalen über oder unter dem Unterstützungspunkte des Systems erfolgt.

Geht die Figuraxe nicht durch die Verticale hindurch, so kann man trotzdem immer bewirken, *dass die Herpolodie auf einem ihrer Grenzkreise Spitzen bildet, indem man zwischen den Constanten des*

Gyroscops, der Anfangslage desselben und des angreifenden Kräftepaares eine der Relationen erfüllt sein lässt

$$
(67) \qquad \begin{aligned} An \sin \vartheta_0 + \mathsf{M}_0 \cos \vartheta_0 = 0, \\ An \sin \vartheta_1 + \mathsf{M}_1 \sin \vartheta_1 = 0, \end{aligned}
$$

worin M_0, M_1 die bereits öfter besprochenen Stossmomente des § 2 sind, welche auf die Normalanfangs- und Endlage des Gyroscops einwirken.

Sollen in der Bahncurve der Herpolodie Doppelpunkte erscheinen, so ist doch immer nur zwischen zwei aufeinanderfolgenden Berührungen mit den umschliessenden Kreisen ein einziger gelegen.

Es folgt diese Thatsache, welche ganz ebenso bei der Curve der Polodie und der Bahn des Schwerpunktes verzeichnet wurde, daraus, dass die rechte Seite der Gleichung (66) ausser für $\sin\vartheta = 0$ nur noch für einen einzigen Winkelwerth $\vartheta = \vartheta'''$ verschwinden kann. Die rechten Seiten der Gleichungen (67) müssen für den letzteren offenbar entgegengesetzte Vorzeichen erhalten, und umgekehrt *erscheinen in der Curve der Herpolodie Doppelpunkte, sobald die rechten Seiten der Gleichungen* (67) *entgegengesetzte Zeichen besitzen.*

Es kann somit diese Frage als ausgetragen gelten und zur Untersuchung der Curve auf Wendepunkte übergegangen werden.

Die Bedingung für die Existenz derselben lauten in rechtwinkligen Coordinaten

$$d\xi\, d^2\eta - d\eta\, d^2\xi = 0$$

oder unter Zuhilfenahme des Trägheitsmomentes A

$$F \equiv \frac{dA\xi}{dt} \frac{d^2A\eta}{dt^2} - \frac{dA\eta}{dt} \frac{d^2A\xi}{dt^2} = 0.$$

Die ersten Differentialquotienten liegen aber durch die Gleichung (65) ausgedrückt vor; die nochmalige Differentiation liefert unter Beachtung der Relationen (3)

$$\frac{d^2A\eta}{dt^2} = -P\frac{dc}{dt} = -P(a\,q - b\,p),$$

$$\frac{d^2A\xi}{dt^2} = +P\frac{dc'}{dt} = +P(a'q - b'p).$$

Durch Substitution schreibt sich

$$F \equiv P^2 p(bc' - b'c) - P^2 q(ac' - c'a).$$

Die letzteren Differenzen der Neigungscosinus sind zufolge der Beziehungen (47) $-a''$ bezw. $+b''$ und der entstehende Ausdruck $a''p + b''p$ zufolge der Gleichung (4) $(l - Cnc'') : A$, so dass zunächst erscheint

$$F \equiv -\frac{P^2}{A}(l - Cnc'').$$

Die rechte Seite ist aber bis auf Factoren gleich der Präcessionsgeschwindigkeit des Gyroscops $\frac{d\psi}{dt}$ (27) und es wird also F verschwinden, wenn

$$\frac{d\psi}{dt} = 0$$

wird. Letztere Bedingung war nach § 6 das Kennzeichen dafür, dass die vom Schwerpunkt des Gyroscops durchlaufene Curve Doppelpunkte besass, wir sehen also:

Einem jeden Doppelpunkte in der (Horizontalprojection der) Bahn des Schwerpunktes entspricht ein Paar von Wendepunkten in der Horizontalprojection der Herpolodie. Letztere Singularitäten treten für denselben Zeitparameter auf, für welchen die Bewegung in der ersteren Curve rückläufig wird.

Rücken die Doppelpunkte der ersteren Curve auf die die letztere umgürtenden Grenzkreise, indem sie sich in Rückkehrpunkte verwandeln, so fallen gleichzeitig die Wendepunkte der zweiten Curve auf die dieser charakteristischen Begrenzungskreise, was sich, da der Uebergang auf zweifache Weise erfolgen kann, folgendermassen ausspricht:

Einem jeden Rückkehrpunkt in der (Horizontalprojection der Bahn) des Schwerpunktes entspricht für die Horizontalprojection der Curve der Herpolodie eine in vier auf einander folgenden Punkten berührende Tangente, welche gleichzeitig den betreffenden Begrenzungskreis berührt, oder aber selbst wieder ein Rückkehrpunkt.

Auf Grund der im Vorstehenden angestellten Untersuchungen dürfte die Horizontalprojection der Poinsot'schen Herpolodie hinreichend deutlich gekennzeichnet sein und mit ihr die Raumcurve der Herpolodie selbst. Es erübrigt nur noch, einen speciellen Fall zu betrachten.

Die Kugelzone nämlich, innerhalb welcher die Herpolodiecurve gelegen ist, verschwindet, wenn die Coordinate (59) ζ constant wird, und geht in einen horizontal gelegenen Kreisring über, indem der Radiusvector w der Herpolodie vermöge der Relation (57)

$$w^2 = \varrho^2 + n^2 - \zeta^2$$

sich genau wie der Radiusvector ϱ der Polodie verhält und also zwei extreme Werthe w_0, w_1 aufweist. ζ wird aber nach (59) constant, wenn $\cos\vartheta$ constant oder $A = C$ oder $n = 0$ wird. Die erstere Möglichkeit zieht bekanntlich $\varrho = \text{const.}$, also $w = \text{const.}$ und nach (66) auch $d\chi : dt = \text{const.}$ nach sich, während für die zwei anderen Voraussetzungen diese Grössen nicht wesentlich alterirt werden. D. h.

Es giebt drei und nicht mehr als drei Möglichkeiten, dass die im allgemeinen sphärische Curve der Herpolodie in eine ebene Curve übergeht: erstens für den Poinsot'schen Fall der nutationsfreien Bewegung des Gyroscops; zweitens, wenn bei beliebiger Anregung, die dem letzteren im

Anfange der Bewegung ertheilt wird, die Hauptträgheitsmomente um die Axen der Figur und des Aequators einander gleich sind; drittens, wenn bei beliebiger Gestalt des Gyroscops auf dessen normale Anfangsstellung keinerlei Drehung um die Figuraxe, sondern nur ein derselben senkrecht geführter horizontaler Momentanstoss eingewirkt hat (conisches Pendel). Im ersten Falle geht die Herpolodie in einen Kreis über, für die anderen Voraussetzungen in eine Curve, die denselben Charakter hat, wie die Curve der Polodie.

Der letztere Satz, welcher hier für die Curve der Herpolodie selbst gilt, da diese eben ist, kann allgemein auch für deren Horizontalprojection ausgesprochen werden. Es besitzen nämlich die Polarcoordinaten w, χ dieser Projectionscurve nach § 17 dieselbe Form wie die entsprechenden Elemente ϱ, σ der Polodie gemäss § 10 und 11, so dass der Darboux'sche Satz des § 12 in den folgenden verallgemeinert werden kann:

Die für eine Lagrange'sche Rotation construirten ebenen Curven der Polodie und der horizontalen Projection der Herpolodie besitzen beide den Charakter der für eine Poinsot'sche Rotation giltigen ebenen Curve der Herpolodie, indem für alle drei Curven die Gleichungsform dieselbe ist.

Das letztere hindert natürlich nicht, dass, wie in der That gezeigt wurde, die Gestalten der verschiedenen Curven sich wesentlich unterscheiden können, insbesondere durch das Auftreten von Wendepunkten.

Von einer Eintheilung und einer graphischen Darstellung der verschiedenen Curvenformen wird hier Abstand genommen werden dürfen. Denn einerseits stimmen die Curven, welche zudem blosse Projectionen sind, mit den Gestalten der Horizontalprojection der Bahnen des Schwerpunktes und der Polodie wesentlich überein, andererseits würde eine genaue Unterscheidung bei der Zufälligkeit der gegenseitigen Lage der die Raumcurve einschliessenden Parallelkreise eine Ausdehnung erfordern, die nicht im Verhältniss stände zur geringeren Wichtigkeit gerade dieser Frage.

III.

Die Lage der Hauptträgheitsaxen im Raume und die Euler'sche Rotation.

§ 18.

Die neun Neigungscosinus in Functionen der Zeit.

Von den 9 Neigungscosinus $a, b, c \dots c''$ der beweglichen Hauptträgheitsaxen x', y', z' des Körpers gegen die fest angenommenen Axen x, y, z des Raumes sind vermöge der Relationen der orthogonalen

Transformation drei von einander unabhängig oder es sind dieselben, wenn man will, alle abhängig von drei independenten Variabeln. Als letztere kann man, wie im § 1 bereits angedeutet wurde, die sogenannten „unsymmetrischen“ Euler'schen Winkel ϑ, ψ, φ wählen, welche mit der Zeit t durch die Differentialgleichungen (5) verknüpft sind. Vermöge ihres Zusammenhanges mit den besprochenen Cosinus*) ist die Bildung der letzteren sodann auf blosse algebraische Umformungen zurückgeführt.

In der That haben auch Lottner sowohl als Jacobi**) diesen Weg eingeschlagen und zuvörderst die Ausdrücke der ϑ, ψ, φ in Functionen der Zeit t aufgestellt. Wir werden daher die nothwendigen Rechnungen an dieser Stelle nicht noch einmal durchführen, sondern die erforderlichen Resultate sogleich der Lottner'schen Arbeit entnehmen.

Beide Autoren kamen nun zu dem Schlusse, dass es zweckmässig sei, nicht die Neigungscosinus zwischen den Axen x', y', z' und x, y, z einzuführen, sondern diejenige zweier anderer Systeme (x'), (y'), z' und (x), (y), z, welche aus den früheren dadurch hervorgehen, dass man den Axen x', y' des Aequators und x, y der Horizontalebene in ihren Ebenen eine Bewegung mit gleichförmiger Geschwindigkeit Φ und Ψ beilegt — so, dass sich die Winkelgeschwindigkeit Φ in einem der anfänglichen Drehung entgegengesetzten, Ψ jedoch in einem damit übereinstimmenden Sinne vollzieht.

Nach diesen Festsetzungen ergiebt sich dann

$$\begin{cases} x' = (x')\cos\Phi t + (y')\sin\Phi t, \\ y' = -(x')\sin\Phi t + (y')\cos\Phi t, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = (x)\cos\Psi t - (y)\sin\Psi t, \\ y = (x)\sin\Psi t + (y)\cos\Psi t. \end{cases}$$

Setzt man statt der Lottner'schen Parameter ia_1 und $ia_2 + K$ nunmehr ia und $ib + K$, und demgemäss***)

$$(68)\qquad \begin{aligned} \sin^2 \mathrm{am}\,(ia) \quad &= -\frac{\alpha_1 - \alpha}{1 - \alpha_1}, \\ \sin^2 \mathrm{am}\,(ib + K) &= \frac{\alpha_1 - \alpha}{1 + \alpha_1}, \end{aligned}$$

so sind die Winkel Φ und Ψ, welche von den beweglichen Axenpaaren je in der Zeiteinheit beschrieben werden†),

---

*) Poisson; a. a. O. Nr. 378.

**) Jacobi. Sur la rotation d'un corps de révolution grave autour d'un point quelconque de son axe. Ges. Werke. II, p. 493—510.

***) Lottner, a. a. O. p. 117.

†) ibid. p. 122 und 119.

$$(69)\quad \begin{aligned} \Phi &= \frac{n(A-C)}{A} - m\left\{\frac{d}{da}\log \mathsf{H}(ia) - \frac{d}{db}\log \mathsf{H}_1(ib)\right\},\\ \Psi &= \phantom{\frac{n(A-C)}{A} -{}} m\left\{\frac{d}{da}\log \mathsf{H}(ia) + \frac{d}{db}\log \mathsf{H}_1(ib)\right\}. \end{aligned}$$

Die Neigungscosinus der rotabeln Systeme sollen nun zum Unterschiede von den Cosinus a, b, c der alten Systeme mit griechischen Buchstaben bezeichnet werden, wie folgt:

	$\xi' = (x')$	$\eta' = (y')$	$\zeta' = z'$
$\xi = (x)$	α	β	γ
$\eta = (y)$	α'	β'	γ'
$\zeta = (z)$	α''	β''	$\gamma'' = c''$

Diese Werthe sind es, welche eingangs der Lottner'schen Arbeit zusammengestellt sind. Um dieselben für unser Problem verwenden zu können, müssen wir nur beachten, dass wir nach den Festsetzungen des § 1 die Zeit t von der Normalanfangslage der Axe der Figur zählen und demgemäss schon damals den Lottner'schen Parameter u um die Modulfunction K vermehren mussten. Die Lottner'schen Abkürzungen*)

$$\begin{gathered} \mathsf{H}(ia_1+ia_2+K)\cdot \mathsf{H}(ia_1-ia_2-K) = D,\\ \Theta(u-ia_1) = A'; \quad \Theta(u+ia_1) = B',\\ \Theta(u-ia_2-K) = A''; \quad \Theta(u+ia_2+K) = B'' \end{gathered}$$

schreiben sich demgemäss bei uns folgendermassen:

$$(70)\quad \begin{gathered} \mathsf{H}_1(ia+ib)\cdot \mathsf{H}_1(ia-ib) = -D = \Delta,\\ \Theta_1(u+ia) = A_1; \quad \Theta_1(u-ia_1) = A_2,\\ \Theta\,(u+ib) = B_1; \quad \Theta\,(u-ib) = B_2, \end{gathered}$$

und es wird nun*)

$$(71)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha\cdot 2\Delta\cdot\Theta_1^2(u) &= \mathsf{H}_1^2(ib)[A_1^2+A_2^2] - \mathsf{H}^2(ia)[B_1^2+B_2^2],\\ \alpha'\cdot 2i\Delta\cdot\Theta_1^2(u) &= \mathsf{H}_1^2(ib)[A_1^2-A_2^2] - \mathsf{H}^2(ia)[B_1^2-B_2^2],\\ \beta\cdot 2i\Delta\cdot\Theta_1^2(u) &= \mathsf{H}_1^2(ib)[A_1^2-A_2^2] + \mathsf{H}^2(ia)[B_1^2-B_2^2],\\ \beta'\cdot 2\Delta\cdot\Theta_1^2(u) &= -\mathsf{H}_1^2(ib)[A_1^2+A_2^2] - \mathsf{H}^2(ia)[B_1^2+B_2^2],\\ \gamma''\cdot 2\Delta\cdot\Theta_1^2(u) &= -\mathsf{H}_1^2(ib)\cdot 2A_1A_2 - \mathsf{H}^2(ia)\cdot 2B_1B_2,\\ \gamma\cdot 2\Delta\cdot\Theta_1^2(u) &= 2\mathsf{H}_1(ib)\mathsf{H}(ia)[A_1B_1-A_2B_2],\\ \gamma'\cdot 2i\Delta\cdot\Theta_1^2(u) &= 2\mathsf{H}_1(ib)\mathsf{H}(ia)[A_1B_1+A_2B_2],\\ \alpha''\cdot 2\Delta\cdot\Theta_1^2(u) &= -2\mathsf{H}_1(ib)\mathsf{H}(ia)[A_1B_2-A_2B_1],\\ \beta''\cdot 2i\Delta\cdot\Theta_1^2(u) &= -2\mathsf{H}_1(ib)\mathsf{H}(ia)[A_1B_2+A_2B_1]. \end{aligned}\right.$$

*) ibid. p. 113, 114.

Nachdem wir, wie erwähnt, in diesem Abschnitte der Entwicklungen Lottner's und Jacobi's folgten, können wir nicht umhin, über die Form der Winkelgeschwindigkeit Φ, mit welcher die Hauptträgheitsaxen x', y' des Aequators in ihrer Ebene gleichförmig rotiren, sowie über den Winkel φ selbst, welchen diese Axen mit der Anfangslage N_0 der Linie der Knoten zur Zeit t bilden, eine Bemerkung einzuschalten, betreffend den Zusammenhang mit unseren vorhergehenden Untersuchungen.

Die Componenten p, q der Drehgeschwindigkeit um x', y' erfüllen nämlich die kinematisch leicht nachweisbaren Relationen*)

$$p \cos \varphi - q \sin \varphi = - \frac{d\vartheta}{dt},$$

$$p \sin \varphi + q \cos \varphi = \sin \vartheta \frac{d\psi}{dt};$$

andererseits lassen sich dieselben durch den Radiusvector ϱ und den Polarwinkel σ der Polodie darstellen als

$$\varrho \cos \sigma = p; \qquad \varrho \sin \sigma = q.$$

Es wird also

$$\varrho \cos (\varphi + \sigma) = - \frac{d\vartheta}{dt},$$

$$\varrho \sin (\varphi + \sigma) = \sin \vartheta \frac{d\psi}{dt}.$$

Die Grössen auf der rechten Seite sind auf Grund der zwei ersten Gleichungen (5) durch $\cos \vartheta$ und $\sin \vartheta$ algebraisch darstellbar d. i. also, zufolge der Gleichung (11), durch $\sin \operatorname{am} (u + K)$. Der Werth von σ setzt sich gemäss der Gleichung (51) zusammen aus einem der Zeit proportionalen und einem mit ihr periodischen Term, so zwar, dass die auftretenden elliptischen Functionen nur von einem einzigen constanten Parameter ic abhängen. Von diesem allein wird also auch φ abhängig gemacht werden können, gerade so wie Φ, welches je mit φ durch die Relation verbunden ist

$$\varphi = \Phi \cdot t + [\text{periodischer Term}]_{=0 \text{ für } t = 0, \frac{K}{m}, \frac{\nu K}{m} \cdots}$$

D. h. aber:

Die constante Winkelgeschwindigkeit Φ, *mit welcher das System der gleichen Hauptträgheitsaxen des rotirenden Körpers in der Aequatorebene rotirend gedacht wird, sowie der Winkel* φ *einer der Hauptaxen,* x', *mit der Linie der Knoten, kann durch einen Ausdruck dargestellt werden, in welchen elliptische Functionen mit nur einem constanten Parameter eingehen — zum Unterschiede von den Darstellungen Lottner's und Jacobi's, welche deren zwei zur Verwendung brachten.*

*) Vergl. etwa Poisson, a. a. O. Nr. 427.

Ohne auf den Zusammenhang weiter einzugehen, beachten wir, dass die analogen Grössen Ψ und ψ, deren letztere durch Integration aus den zwei ersten Gleichungen (5) nach bekanntem, von Lottner angewandten Verfahren*) gewonnen wird, eine entsprechende Vereinfachung nicht zu zeigen scheinen.

§ 19.

Die Elemente der Euler'schen Rotation in Functionen der Richtungscosinus des beweglichen Axensystems.

Durch die Kenntniss der instantanen Drehgeschwindigkeit Θ eines Körpers nach Grösse und Richtung ist man in den Stand gesetzt, für jeden Zeitpunkt t die Bewegung des Körpers aus einer Lage K_t in seine Nachbarlage K_{t+dt} zu vollziehen: man hat eben nur längs besagter Axe um einen Winkel $\Theta \cdot dt$ zu drehen. Will man dagegen den Körper aus der Lage K_t zur Zeit t in eine andere, nach einem endlichen Zeitintervall τ zu fixirenden Lage $K_{t+\tau}$ überführen, so giebt die Kinematik zwei Wege an, dieses Ziel zu erreichen. Entweder man bestimmt sich die von der Folge der instantanen Drehungsaxen im Körper und Raume gebildeten Kegel der Polodie und Herpolodie und lässt den ersteren die Zeit τ hindurch auf dem letzteren abrollen, oder man construirt sich jene im Raume gelegene ausgezeichnete Axe, um welche eine einzige Rotation endlicher Grösse genügt, um die eine Lage des Systems in die andere überzuführen. Die erste Methode rührt von Poinsot her, die zweite verdankt man Euler. Die letztere ist die einfachste und natürlichste und soll, nachdem der Poinsot'schen Darstellung die zwei letzten Hauptabschnitte gewidmet worden, nunmehr zur Untersuchung gelangen.

Denken wir uns zu diesem Zwecke das Gyroscop ersetzt durch das System seiner drei Hauptträgheitsaxen, so soll also im Raume durch den festen Punkt O eine gewisse Axe existiren, derart, dass durch Drehung um dieselbe das System aus einer ersten Lage ξ, η, ζ in eine zweite, ξ', η', ζ', gebracht werden kann. Die Neigungscosinus dieser Axe gegen ξ, η, ζ seien resp. λ, μ, ν und die Grösse der um dieselbe statthabenden Drehung ω; ein beliebiger ihrer Punkte habe bezüglich der ersterwähnten Lage die Coordinaten ξ, η, ζ, bezüglich des anderen ξ', η', ζ', dann ist einerseits

$$\begin{aligned} \xi' &= \alpha\xi + \alpha'\eta + \alpha''\zeta, \\ \eta' &= \beta\xi + \beta'\eta + \beta''\zeta, \\ \zeta' &= \gamma\xi + \gamma'\eta + \gamma''\zeta, \end{aligned}$$

---

*) a. a. O. pag. 117 u. ff.

andererseits aber muss jeder Punkt der Rotationsaxe unveränderlich bleiben, und also die Rotationsaxe auch gegen die Axen des zweiten Systems unter gleichen Winkeln geneigt sein, was ergiebt

$$\xi' = \xi,$$
$$\eta' = \eta,$$
$$\zeta' = \zeta,$$

oder endlich durch Subtraction der entsprechenden Gleichungen beider Systeme

$$\begin{aligned} 0 &= (\alpha-1)\xi + \alpha'\eta + \alpha''\zeta, \\ 0 &= \beta\xi + (\beta'-1)\eta + \beta''\zeta. \\ 0 &= \gamma\xi + \gamma'\eta + (\gamma''-1)\zeta. \end{aligned}$$

Diese drei Gleichungen liefern die Verhältnisse der Coordinaten ξ, η, ζ oder, was damit gleichbedeutend ist, die Verhältnisse der Neigungscosinus λ, μ, ν der Rotationsaxe ausgedrückt durch die Neigungscosinus zwischen den Axen des Systems in der Anfang und Endlage, α, β, $\gamma \cdots \gamma''$. Für letztere gelten wieder die Formeln der orthogonalen Transformation (47) und es kann durch deren Beachtung ohne Weiteres zunächst gefunden werden

$$(72)\quad \lambda:\mu:\nu = \begin{cases} (1+\alpha-\beta'-\gamma''): & (\alpha'+\beta) & : (\alpha''+\gamma), \\ (\beta+\alpha') & : (1+\beta'-\gamma''-\alpha): & (\beta''+\gamma'), \\ (\gamma+\alpha'') & : (\gamma'+\beta'') & : (1-\gamma''-\alpha-\beta'), \end{cases}$$

wobei irgend eine der drei Proportionsformen genommen werden kann. Sollen die letzteren gleiches aussagen, so muss

$$\begin{aligned} (\alpha''+\gamma)^2 &= (1+\alpha-\beta'-\gamma'')\,(1+\gamma''-\alpha-\beta'), \\ (\beta+\alpha')^2 &= (1+\beta'-\gamma''-\alpha)\,(1+\alpha-\beta'-\gamma''), \\ (\gamma'+\beta'')^2 &= (1+\gamma''-\beta-\beta')\,(1+\beta'-\gamma''-\alpha) \end{aligned}$$

befunden werden, was in der That zufolge der Relationen (47) der Fall ist. Wenn aber vorstehende Ausdrücke identisch befunden werden, so ergiebt sich durch Quadriren aus (72) leicht

$$(73)\quad \lambda^2 : \mu^2 : \nu^2 = (1+\alpha-\beta'-\gamma'') : (1+\beta'-\gamma''-\alpha) : (1+\gamma''-\alpha-\beta').$$

Multiplicirt man hingegen die drei Proportionen (72) und benützt die Verhältnisse (73), so erscheint

$$\begin{aligned} \lambda : \mu : \nu &= (\beta+\alpha')(\gamma+\alpha'') : (\gamma'+\beta'')(\alpha'+\beta) : (\alpha''+\gamma)(\beta''+\gamma') \\ &= \frac{1}{\gamma'+\beta''} \quad : \quad \frac{1}{\alpha''+\gamma} \quad : \quad \frac{1}{\beta+\alpha'}. \end{aligned}$$

Erweitert man diese Brüche mit der Differenz ihrer Nenner und bedenkt, dass zufolge der Beziehungen der Orthogonalität die Differenzen

$$\gamma'^2 - \beta''^2, \quad \alpha''^2 - \gamma^2, \quad \beta^2 - \alpha'^2$$

alle drei einander gleich sind, so fliesst aus dieser Bemerkung das endgiltige Resultat

(74) $$\lambda : \mu : \nu = (\gamma' - \beta'') : (\alpha'' - \gamma) : (\beta - \alpha'),$$

durch welches die Richtungen der Euler'schen Drehungsaxe gegeben sind. Es erübrigt deshalb nur noch, die Grösse der Rotation ω um dieselbe ebenfalls durch die Cosinus α, β, γ auszudrücken.

Beschreibt man zu diesem Zwecke um den Unterstützungspunkt 0 des Gyroscops eine Kugel vom Radius 1 und bezeichnet die Durchstosspunkte der Axe der Rotation und einer Hauptaxe z. B. ζ in der alten und neuen Lage bezw. mit R, Z, Z' so bilden R, Z, Z' ein gleichschenkliges sphärisches Dreieck, in welchem R die Spitze ist mit dem Winkel ω als eingeschlossenem Winkel. Halbirt man den letzteren durch einen grössten Kugelkreis, so ergiebt sich aus einem der rechtwinkligen sphärischen Dreiecke

$$\sin \frac{\omega}{2} = \sin \frac{\widehat{ZZ'}}{2} : \sin \widehat{RZ},$$

also

$$\sin^2 \frac{\omega}{2} = \sin^2 \frac{\vartheta}{2} : (1 - \cos^2 \widehat{RZ}),$$

indem ja der Winkel $\widehat{ZZ'}$ gleich ϑ ist. $\cos RZ$ ist aber der Neigungscosinus ν und $2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}$ ist gleich $1 - \cos \vartheta = 1 - \gamma''$, also wird

$$\sin^2 \frac{\omega}{2} = \frac{1 - \gamma''}{2(1 - \nu^2)},$$

und ähnlich, durch β, μ und α', λ ausgedrückt, $(1 - \beta'^2) : 2(1 - \mu^2)$ bezw. $(1 - \alpha'^2) : 2(1 - \lambda^2)$.

Um den Werth von ν^2 einzuführen, muss derselbe vorerst aus der Proportion (73) in seiner absoluten Grösse dargestellt werden. Der Proportionalitätsfactor N der letzteren aber findet sich aus

$$N(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) = 3 - (\alpha + \beta' + \gamma'')$$

als

(75) $$N = 4 - (1 + \alpha + \beta' + \gamma''),$$

und es wird nach leichter Reduction erhalten

(76) $$4 \sin^2 \frac{\omega}{2} = 4 - (1 + \alpha + \beta' + \gamma'') = N$$

und

(77) $$4 \cos^2 \frac{\omega}{2} = 1 + \alpha + \beta' + \gamma'' = M.$$

Durch eine der vorstehenden Grössen N, M ist die Grösse der Drehung ω, welche um die Euler'sche Rotationsaxe statthaben muss, um die Hauptträgheitsaxen des Gyroscops von einer Lage ξ, η, ζ in eine andere Lage ξ', η', ζ' überzuführen, durch die Neigungscosinus, welche

die Axen in diesen Lagen mit einander bilden, gegeben. Durch diese Grösse drückt sich auch der Proportionalitätsfactor L aus, mit welchen die Cosinus λ, μ, ν der Proportion (74) multiplicirt werden müssen, um den Differenzen der Cosinus α, β, γ der rechten Seite gleich zu werden. Durch Quadriren und Addiren folgt nämlich aus genannter Proportion unter Anwendung der schon oft genannten Formeln (47) der Orthogonalität leicht

$$L = \sqrt{MN} = 2 \sin \omega$$

und es werden also schliesslich die absoluten Werthe der Neigungscosinus der Rotationsaxe

$$\lambda = \frac{\gamma' - \beta''}{2 \sin \omega},$$
$$\mu = \frac{\alpha'' - \gamma}{2 \sin \omega},$$
$$\nu = \frac{\beta - \alpha'}{2 \sin \omega}.$$

§ 20.

Die symmetrischen Euler'schen Winkel.

Wie durch den Namen im Vorstehenden bereits angedeutet, rührt der Gedanke, durch Drehung um eine endliche Amplitude längs einer bestimmten Axe ein bewegliches System aus einer Anfangslage in eine Endlage überzuführen, von Euler*) her. Doch sind dessen Entwicklungen für die Herleitung der Elemente der kritischen Rotation in Functionen der Neigungscosinus der die zwei verschiedenen Lagen markirenden rechtwinkligen Axensysteme ausschliesslich auf Formeln der sphärischen Trigonometrie gegründet und deswegen complicirt und wenig handlich. Dagegen dürfte der von uns eingeschlagene Weg, der in ähnlicher Weise, aber auf viel breiterer Grundlage von Stieltjes**) verwendet wurde, an Kürze nichts zu wünschen übrig lassen. Die Werthe der Euler'schen sogenannten „symmetrischen Winkel" selbst haben eine mannigfache Behandlung und Umformung erfahren, die durchgreifendste wohl von Rodrigues***).

Will man nämlich erreichen, dass sowohl die Quadrate λ^2, μ^2, ν^2 als die Cosinus λ, μ, ν selbst einen gleichen Nenner oder, was das-

*) Theorie der Bewegung fester oder starrer Körper. Uebers. von Wolfers. 1883. p. 571—594.

**) Note sur déplacement d'un système invariable dont un point est fixe. Archives néerlandaises. XIX. p. 372—390. 1884.

***) Vgl. hierüber Cayley: Report of the solution of certain special problems of dynamics. Rep. of the Brit. Ass. 1862. p. 184—253.

selbe ist, die Proportionen (73) und (74) den nämlichen Proportionalitätsfactor besitzen, so müssen statt λ, μ, ν drei andere diesen proportionale Grössen λ', μ', ν' eingeführt werden. Setzt man $\lambda = f\lambda'$, $\mu = f\mu'$, $\nu = f\nu'$, so heisst nun der Proportionalitätsfactor der Proportion (73) $f^2 N$ und für (74) $f\sqrt{MN}$ und es ergiebt sich aus

$$f^2 N = f\sqrt{MN},$$

$$f = \sqrt{\frac{M}{N}} = \operatorname{cotg}\frac{\omega}{2},$$

$$f^2 N = M = 4\cos^2\frac{\omega}{2},$$

also für die neuen Variabeln λ', μ', ν':

$$\lambda' = \lambda \operatorname{tg}\frac{\omega}{2},$$

$$(78) \qquad \mu' = \mu \operatorname{tg}\frac{\omega}{2},$$

$$\nu' = \nu \operatorname{tg}\frac{\omega}{2}.$$

Die Formeln (73) und (74) lassen sich dann in leichtverständlicher Abkürzung in folgendes Schema einpassen:

$$(79) \qquad \begin{vmatrix} \lambda'^2 & \mu'^2 & \nu'^2 \\ \lambda' & \mu' & \nu' \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{1+\alpha+\beta'+\gamma''} \begin{vmatrix} 1+\alpha-\beta'-\gamma'' & 1-\alpha+\beta'-\gamma'' & 1-\alpha-\beta'+\gamma'' \\ \gamma'-\beta'' & \alpha''-\gamma & \beta-\alpha' \end{vmatrix}.$$

Umgekehrt werden die 9 Neigungscosinus der Axen aus den Elementen λ, μ, ν, ω der Euler'schen Rotation durch das analoge Schema dargestellt:

$$(80) \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{1+\lambda'^2+\mu'^2+\nu'^2} \begin{vmatrix} 1+\lambda'^2-\mu'^2-\nu'^2 & 2(\lambda'\mu'+\nu') & 2(\lambda'\nu'-\mu') \\ 2(\mu'\lambda'-\nu') & 1-\lambda'^2+\mu'^2-\nu'^2 & 2(\mu'\nu'+\lambda') \\ 2(\nu'\lambda'+\mu') & 2(\nu'\mu'-\lambda') & 1-\lambda'^2-\mu'^2+\nu'^2 \end{vmatrix},$$

wobei

$$(81) \qquad 1+\lambda'^2+\mu'^2+\nu'^2 = \sec^2\frac{\omega}{2}$$

ist. Es wäre sonach thunlich, statt der Neigungscosinus der zwei orthogonalen Axentripel überhaupt die drei Grössen λ', μ', ν' in das Problem der Rotation als unabhängige Variable einzuführen, oder also statt der „unsymmetrischen" Euler'schen Winkel ϑ, φ, ψ die *„symmetrischen"*, wie λ', μ', ν' genannt werden. In der That wurde die Untersuchung in dieser Weise von Cayley aufgegriffen (a. a. O.). Cayley

zeigte nämlich, dass die Winkelgeschwindigkeiten p, q, r um die Hauptaxen eines rotirenden Körpers, welche von den Neigungscosinus der Hauptaxen gegen die Axenlage zu Beginn der Bewegung und somit also auch von λ', μ', ν' abhängen, in Function der letzteren Grössen und der Zeit durch folgende Gleichungen gegeben sind

$$(82)\qquad \begin{aligned} \varkappa' p \cdot dt &= \quad d\lambda' + \nu' d\mu' - \mu' d\nu', \\ \varkappa' q \cdot dt &= -\nu' d\lambda' + \quad d\mu' + \lambda' d\nu', \\ \varkappa' r \cdot dt &= \quad \mu' d\lambda' - \lambda' d\mu' + \quad d\nu', \end{aligned}$$

worin

$$2\varkappa' = 1 + \lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2$$

bedeutet. Die Integration erfordert jedoch schon für die Bewegegung eines Körpers ohne Einfluss beschleunigender Kräfte Hilfsmittel, welche es kaum zweifelhaft lassen dürften, dass die Bestimmung der Grössen λ', μ', ν' auf diesem Wege sich nicht so einfach vollzieht wie durch die Methode der directen Aufsuchung der 9 Neigungscosinus mit nachfolgender Substitution derselben in die Gleichungen des Schemas (79). Zudem besitzt man ausser der Behandlungsweise, wie sie Jacobi und Lottner den beiden lösbaren Problemen der Rotation haben angedeihen lassen, noch eine sehr einfache Methode, die bewegten Neigungscosinus in Functionen der Zeit zu bilden. Dieselbe, wohl zuerst von Weierstrass angegeben*), verschmäht die Einführung der Euler'schen unsymmetrischen Winkel ϑ, ψ, φ, welche auch unsere Arbeit im Anschlusse an Lottner und Jacobi zur Verwendung brachte; sie stützt sich auf den Zusammenhang zwischen den 9 Cosinus α, β, γ und den Winkelgeschwindigkeitscomponenten p, q, r um die Hauptaxen, indem sie nachweist, dass es, sobald die letzteren aus den Euler'schen dynamischen Gleichungen durch die Zeit ausgedrückt sind, nur noch einer einzigen Integration bedarf, um sodann aus der erhaltenen Integralgleichung und dem Zusammenhange, welcher einerseits zwischen den 9 Neigungscosinus unter sich, andererseits zwischen diesen und den Componenten p, q, r besteht, sämmtliche Cosinus durch die Zeit t ausgedrückt zu erhalten auf Grund rein algebraischer Umformungen. Dieser charakteristische Gedanke wurde in der oben citirten Abhandlung von Semmler zur Ausführung gebracht. Wenn wir gleich im Nachfolgenden keinen Gebrauch von demselben machen, so geschieht es einmal, um nicht das Band zu zerreissen, welches unsere Untersuchungen an die Arbeiten von Lottner und Jacobi knüpft, und weiterhin, weil die Formeln für die Neigungscosinus, die in den letzteren niedergelegt, die denkbar günstigste Gestalt besitzen, um sie in die Ausdrücke für λ, μ, ν, ω einzuführen und diese auf Formeln zu reduciren, welche an Einfachheit die der

*) Vergl. Hoffmann-Natani, Mathem. Wörterbuch. Titel „Rotation".

Cosinus selbst bei Weitem übertreffen. Wir wählen ferner auch die Elemente λ, μ, ν, ω, und nicht die accentuirten Grössen Rodrigues', weil dieselben, für unsere Zwecke auf eine eigene Weise abgeleitet, durch ihre Gestalt zu einer Substitution fast geeigneter erscheinen dürften.

§ 21.

Die Elemente der Euler'schen Rotation in Functionen der Zeit.

Die Relationen des § 19 gelten allgemein für zwei Systeme ξ, η, ζ und ξ', η', ζ', deren Axen zu Anfang auf einander gelegen waren. Dieselben können nicht a priori auf die Theorie des Gyroscops übertragen werden in der Weise, dass man zur sofortigen Bildung der Ausdrücke in den rechten Seiten der Beziehungen (73) bis (77) schreiten könnte. Denn abgesehen davon, dass die Hauptträgheitsaxen x', y', z' unseres drehenden Körpers keineswegs mit den festen Axen des Raumes x, y, z zu Beginn der Bewegung sich deckten, gelten ja die Lottner'schen (und Jacobi'schen) Formeln der 9 Neigungscosinus gar nicht für diese Systeme selbst, sondern für zwei Systeme (x'), (y'), z' und (x), (y), z mit gleichförmiger Eigendrehung.

Diese beiden Schwierigkeiten sind aber rein kinematischer Natur und können leichterdings behoben werden. Es bedarf zunächst, da nach den Poisson'schen Festsetzungen des § 1 zur Zeit 0 die Hauptaxe x' mit der festen Horizontalaxe x zusammenliegt und die Figuraxe z' in der Verticalebene yz gegen die positive z-Axe unter einem Winkel ϑ_0 geneigt ist, nur einer Drehung von der Amplitude ϑ_0 in einem der Winkelzählung der ϑ entgegengesetzten Sinne längs der gemeinsamen Axe xx' (der Anfangslage N_0 der Linie der Knoten), um die Coincidenz herzustellen.

Wenn nun die Axen x, y des festen Systems in ihrer Horizontalebene im Sinne der ursprünglichen Bewegungsrichtung eine Drehung mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit Ψ annehmen, so involvirt dies in keiner Weise einen Einfluss auf das System der Hauptaxen — es werden die Daten der letzteren bezüglich des Raumes eben nicht gegen ein absolut festes, wohl aber für jeden Zeitpunkt t als fest zu betrachtendes Coordinatensystem gemessen. Das letztere, im § 18 von uns mit (x), (y), z bezeichnet, ist nichts anderes als das System ξ, η, ζ der zwei letzten Paragraphen,

$$(x) = \xi, \quad (y) = \eta, \quad z = \zeta.$$

Die Bedingung, es mögen die Hauptaxen x', y' in der Aequatorebene mit einer Winkelgeschwindigkeit Φ entgegengesetzt der ursprünglichen Bewegungsrichtung rotiren, hat hingegen wieder eine Veränderung

der Lage des Körpers zur Folge. Die Axen x', y', z' des letzteren sind übergeführt nach

$$(x') = \xi', \quad (y') = \eta', \quad z' = \zeta'.$$

Die zu Beginn der Eigenbewegungen Ψ und Φ coincidirenden Systeme ξ, η, ζ und ξ', η', ζ' stimmen nur noch in den Axen ζ und ζ' überein, während die Paare ξ, η und ξ', η' aus ihren Anfangslagen in der Horizontalebene gedreht sind. Um dieselben wieder zur Deckung zu bringen, wird man im Sinne der Winkelzählung in der Horizotalebene eine Drehung um die gemeinsame Richtung $\zeta\zeta'$ von der Grösse $\Phi + \Psi$ wirken lassen müssen: durch dieselbe werden ξ', η' bezw. nach ξ, η übergeführt.

Denkt man sich nun für die jetzt auf einander liegenden Systeme die Euler'sche Rotationsaxe den Richtungscosinus λ, μ, ν gemäss construirt und um dieselbe eine Drehgrösse ω thätig, so werden die Axen ξ', η', ζ' aus der mit den Axen ξ, η, ζ gemeinsamen Lage ξ, η, ζ in die wirkliche der Zeit t entsprechende Lage gedreht, für welche sie mit den Axen ξ, η, ζ die Lottner'schen Werthe der 9 Neigungscosinus aufweisen. $\lambda, \mu, \nu, \omega$ können jetzt in der oben ausgeführten Weise durch die letzteren ausgedrückt werden; sie erweisen sich wie diese selbst mit der Zeit periodisch. Erinnern wir uns, dass die vorausgegangenen vorbereitenden Drehungen ϑ_0 und $(\Phi + \Psi) . t$ constant bezw. der Zeit proportional sind und mit der Drehung ω zu einer einzigen Drehung Ω um eine Axe P nach kinematischen Gesetzen sich zusammensetzen lassen, so können wir sagen:

Für jedes beliebig gestaltete Gyroscop, welches unter dem Einflusse eines beliebig gewählten Momentankräftepaares um seinen Unterstützungspunkt zu rotiren gezwungen ist, giebt es eine bestimmte durch diesen Punkt laufende Axe P *des Raumes, längs welcher eine einzige Drehung von der Amplitude* Ω *vorgenommen werden kann, um das Gyroscop von seiner Anfangslage* $t = 0$ *in die für den beliebigen Zeitpunkt* $t = t$ *giltige Lage überzuführen.*

Diese Drehung ist äquivalent drei successiven Rotationen. Sie besteht 1. aus einer Drehung um die Anfangslage der Linie der Knoten mit einer Amplitude ϑ_0, *unabhängig von der Zeit — 2. aus einer Drehung um die nunmehr vertical gerichtete Axe der Figur mit einer Amplitude* $(\Phi + \Psi) . t$, *proportional der Zeit — 3. aus einer Drehung um die Euler'sche Axe* λ, μ, ν *der Rotation mit einer Amplitude* ω, *periodisch mit der Zeit.*

Aus diesen drei Drehungen kann in der That die Drehung Ω zusammengesetzt werden. Es lassen sich nämlich nach einem bekannten Satze der Kinematik zwei endliche Rotationen um zwei sich schneidende Axen jederzeit durch eine Rotation um eine einzige Axe ersetzen, welche mit den vorigen ein Dreikant derart bildet, dass die an den ersteren gelegenen Flächenwinkel gleich sind den halben daselbst auf-

tretenden Drehungsamplituden, während der an der neuen Axe gebildete Flächenwinkel zum Aussenwinkel die halbe neue Amplitude besitzt. Wendet man die gedachte Operation zweimal an, so kann die Drehung Ω aus den Elementen ϑ_0, $(\Phi+\Psi)t$, ω leicht auf synthetischem Wege construirt werden.

Wollte man dieselbe analytisch darstellen, so würden natürlich in die Formeln ausser ϑ_0 die constanten Geschwindigkeiten Φ und Ψ (69) eintreten und hiedurch dieselben unübersichtlich und unschön gestalten. Gerade dieser Grund aber war es, weshalb Jacobi sowohl als Lottner in ihren Untersuchungen über Rotationsprobleme von anfangs gewählten Axensystemen abgingen und statt deren rotable neue Systeme zur Einführung brachten. Mit demselben Rechte begnügen wir uns mit der Aufstellung des periodischen Theils der Euler'schen Rotation d. h. der Grössen $\lambda, \mu, \nu, \omega$ — sind doch dann nach dem im Vorhergehenden Gesagten die absoluten Daten derselben unter Zuhilfenahme der Werthe ϑ_0 und $(\Phi+\Psi)t$ als völlig bestimmt anzusehen.

Wir bilden zunächst auf Grund der Tabelle (71) der Neigungscosinus die Summe und Differenz der Grössen α und β',

$$(83)\qquad \begin{aligned} (\alpha+\beta')\cdot\Delta\Theta_1^2(u) &= -\,\mathrm{H}^2(ia)[B_1^2+B_2^2],\\ (\alpha-\beta')\cdot\Delta\Theta_1^2(u) &= \mathrm{H}_1^2(ib)[A_1^2+A_2^2] \end{aligned}$$

und analog

$$(1\pm\gamma'')\cdot\Delta\Theta_1^2(u)=\mathrm{H}_1(ia+ib)\mathrm{H}_1(ia-ib)\Theta_1^2(u)\mp\mathrm{H}_1^2(ib)A_1A_2\mp\mathrm{H}^2(ia)B_1B_2.$$

Nach bekannten Formeln der elliptischen Functionen*) gelten nun die Gleichungen

$$\begin{aligned} A_1A_2.\Theta^2(0)&=\Theta_1(u+ia)\Theta_1(u-ia).\Theta^2(0)=\Theta_1^2(u)\Theta^2(ia)-\mathrm{H}_1^2(u)\mathrm{H}^2(ia),\\ B_1B_2.\Theta^2(0)&=\Theta(u+ib)\Theta(u-ib).\Theta^2(0)=\Theta_1^2(u)\Theta_1^2(ib)-\mathrm{H}_1^2\,u\;\mathrm{H}_1^2(ib),\\ \Delta.\Theta^2(0)&=\mathrm{H}_1(ia+ib)\mathrm{H}_1(ia-ib).\Theta^2(0)=\Theta^2(ib)\mathrm{H}_1^2(ia)-\mathrm{H}^2(ia)\Theta_1^2(ib), \end{aligned}$$

also wird

$$\Delta.\Theta_1^2(u)-A_1A_2.\mathrm{H}_1^2(ib)+B_1B_2\mathrm{H}(ia)=0$$

und durch Substitution in $1\pm\gamma''$

$$(84)\qquad \begin{aligned} (1+\gamma'')\cdot\Delta\Theta_1^2(u) &= -2\mathrm{H}^2(ia)B_1B_2.\\ (1-\gamma'')\cdot\Delta\Theta_1^2(u) &= 2\mathrm{H}_1^2(ib)A_1A_2. \end{aligned}$$

Durch Addition und Subtraction der 4 Formeln (83) und (84) schreibt sich

$$(85)\qquad \begin{aligned} 1+\alpha+\beta'+\gamma'' &= -\frac{\mathrm{H}^2(ia)[B_1+B_2]^2}{\mathrm{H}_1(ia+ib)\,\mathrm{H}_1(ia-ib)\,\Theta_1^2(u)},\\ 1-\alpha-\beta'+\gamma'' &= \frac{\mathrm{H}^2(ia)[B_1-B_2]^2}{\mathrm{H}_1(ia+ib)\,\mathrm{H}_1(ia-ib)\,\Theta_1^2(u)},\\ 1+\alpha-\beta'-\gamma'' &= \frac{\mathrm{H}_1^2(ib)[A_1+A_2]^2}{\mathrm{H}_1(ia+ib)\,\mathrm{H}_1(ia-ib)\,\Theta_1^2(u)},\\ 1-\alpha+\beta'-\gamma'' &= -\frac{\mathrm{H}_1^2(ib)[A_1-A_2]^2}{\mathrm{H}_1(ia+ib)\,\mathrm{H}_1(ia-ib)\,\Theta_1^2(u)}. \end{aligned}$$

*) S. etwa die Zusammenstellung von Enneper, ellipt. Functionen, p. 108.

Nach der Proportion (73) verhalten sich aber die drei letzteren auf der linken Seite befindlichen algebraischen Summen wie die Quadrate der Richtungscosinus der Euler'schen Rotationsaxe, also verhalten sich umgekehrt

$$\lambda : \mu : \nu = \mathsf{H}_1(ib)[A_1 + A_2] : i\mathsf{H}_1(ib)[A_1 - A_2] : \mathsf{H}(ia)[B_1 - B_2] \tag{86}$$

oder durch Wiedereinführung der Θ-Functionen, welchen die Grössen A und B nach (70) gleich gesetzt waren,

$$\begin{aligned}\lambda : \mu : \nu = {} & \mathsf{H}_1(ib)[\Theta_1(u+ia) + \Theta_1(u-ia)] \\ & : i\mathsf{H}_1(ib)[\Theta_1(u+ia) - \Theta_1(u-ia)] \\ & : \mathsf{H}(ia)[\Theta(u+ib) - \Theta(u-ib)].\end{aligned} \tag{87}$$

Man erkennt aus der Form dieser continuirlichen Proportion im Gegensatze zu der Gestalt der Werthe (71) der Neigungscosinus,

dass die Richtungscosinus der Axe des periodischen Theils der Euler'schen Rotation ein viel einfacheres Gepräge zeigen als die periodischen Richtungscosinus der beweglichen Hauptaxen des Gyroscops gegen die gleichförmig rotirenden Coordinatenaxen der Horizontalebene, indem erstere nur je von einem, letztere dagegen von zwei constanten Parametern abhängig sind.

In der That kann man ja den Factor $\mathsf{H}(ia)$ in die beiden ersten, $\mathsf{H}_1(ib)$ in den letzten Term der rechten Seite (87) durch Division hineinlegen; hiedurch zeigt sich augenscheinlich:

Der Richtungscosinus zwischen der Axe des periodischen Theils der Euler'schen Drehung und der invariablen Axe der Schwere ist individuell verschieden von den Richtungscosinus zwischen jener Axe und den rotabeln Axen der durch den Unterstützungspunkt laufenden Horizontalebene, verschieden nämlich durch den constanten Parameter, welcher in den Werth eines jeden derselben eingeht.

Für die Grösse der Amplitude ω erhalten wir unter Befolgung der Relation

$$M = 4\cos^2\frac{\omega}{2} = -\frac{\mathsf{H}^2(ia)[B_1 + B_2]^2}{\mathsf{H}_1(ia+ib)\,\mathsf{H}_1(ia-ib)\,\Theta_1^2(u)}$$

und durch Radicirung

$$2\cos\frac{\omega}{2} = \frac{i\mathsf{H}(ia)[\Theta(u+ib) + \Theta(u-ib)]}{\Theta_1(u)\sqrt{\mathsf{H}_1(ia+ib)\,\mathsf{H}_1(ia-ib)}}. \tag{88}$$

Vermöge des Systems der Gleichungen (87) und (88) ist das Ziel des letzten Abschnittes nun vollständig erreicht.

Vergleicht man noch die Form der ebenbezeichneten Resultate mit den Ausdrücken Jacobis, in seiner bekannten Arbeit „sur la rotation d'un corps“ für die Cosinus derjenigen Neigungswinkel aufgestellt,*) welche die Hauptträgheitsaxen eines ohne Einfluss beschleunigender

*) a. a. O. p. 293.

Kräfte rotirenden Körpers mit den Axen des dortigen rotablen Coordinatensystems bilden, so gelangt man zu nachfolgendem Theorem, welches ein Seitenstück bildet zu dem Jacobi'schen Theorem von der Ersetzbarkeit einer Lagrange'schen Rotation durch zwei Poinsot'sche Rotationen:

Die periodischen Elemente der Euler'schen Rotation, durch welche ein unter dem Einfluss beliebiger Momentkräfte sich drehendes Gyroscop aus einer ersten Lage in eine endlich davon verschiedene Lage übergeführt werden kann, besitzen denselben Charakter wie die periodischen Elemente, welche die Lage der Hauptträgheitsaxen eines ohne Einfluss äusserer Kräfte rotirenden Körpers im Raume bestimmen.

Wie bei dem genannten Jacobi'schen Theorem

entsprechen sich die invariable Horizontalebene des Gyroscops und die invariable Ebene des den rotirenden Körper afficirenden Momentankräftepaars, die invariable Richtung der Schwere und die invariable Axe dieses Paares, endlich die gleichförmige Eigenbewegung der Coordinatenaxen in den invariablen Ebenen.

München, im Januar 1887.

Bemerkung zu den desmischen Tetraedern.

Von

F. Caspary in Berlin.

Bildet man aus vier ganz beliebigen Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Summen und Differenzen und setzt:

$$(1)\quad \begin{array}{lll} \alpha+\beta=a, & \alpha+\gamma=a', & \alpha+\delta=a'', \\ \alpha-\beta=b, & \alpha-\gamma=b', & \alpha-\delta=b'', \\ \gamma+\delta=c, & \beta+\delta=c', & \beta+\gamma=c'', \\ \gamma-\delta=d, & \beta-\delta=d', & \beta-\gamma=d'', \end{array}$$

so bestehen die folgenden Beziehungen:

$$(2)\quad \begin{array}{ll} 2a'=a+b+c+d, & 2a''=a+b+c-d, \\ 2b'=a+b-c-d, & 2b''=a+b-c+d, \\ 2c'=a-b+c-d, & 2c''=a-b+c+d, \\ 2d'=a-b-c+d, & 2d''=a-b-c-d, \end{array}$$

und:

$$(3)\quad 2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)=a^2+b^2+c^2+d^2=a'^2+b'^2+c'^2+d'^2 = a''^2+b''^2+c''^2+d''^2.$$

In der Analysis treten die Grössen $a, b, \ldots, d''$ als die Argumente im Jacobi'schen Fundamentaltheorem der Thetafunctionen auf, und in der Zahlentheorie liefern sie die Zerlegungen einer Zahl $4N$ in die Summe von vier Quadraten. Auch in der Geometrie haben diese Grössen eine einfache Bedeutung. Wenn man nämlich unter $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$, $\delta=0$ die Gleichungen von vier beliebigen Punkten versteht, so stellen $a=0, b=0, \ldots, d''=0$ ebenfalls Punkte dar und *diese dreimal vier Punkte sind die Ecken von drei desmischen Tetraedern.* Der Beweis dieser Behauptung ist sehr leicht. Aus (1) folgt unmittelbar:

$$(4)\quad \begin{array}{l} a-a'=-b+b'=-c+c'=d+d'=d'', \\ a-b'=-b+a'=c+d'=d+c'=c'', \\ a-c'=b+d'=-c+a'=d+b'=b'', \\ a-d'=b+c'=c+b'=-d+a'=a'', \end{array}$$

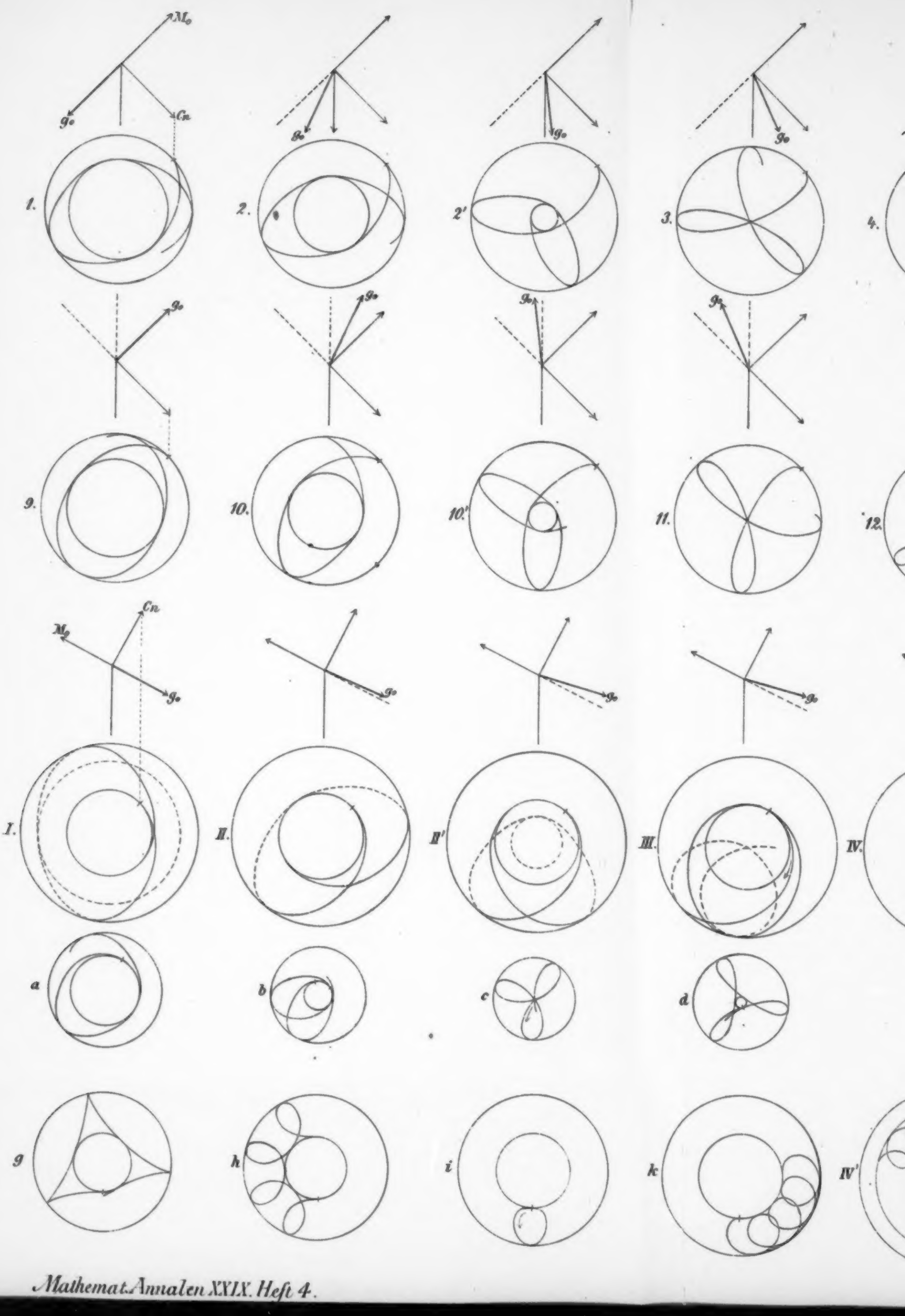
und diese Gleichungen setzen in Evidenz, dass die Geraden:

$$\begin{array}{llll} aa', & bb', & cc', & dd' \\ ab', & ba', & cd', & dc' \\ ac', & bd', & ca', & db' \\ ad', & bc', & cb', & da' \end{array} \text{ sich in } \begin{array}{l} d'' \\ c'' \\ b'' \\ a'' \end{array} \text{ schneiden,}$$

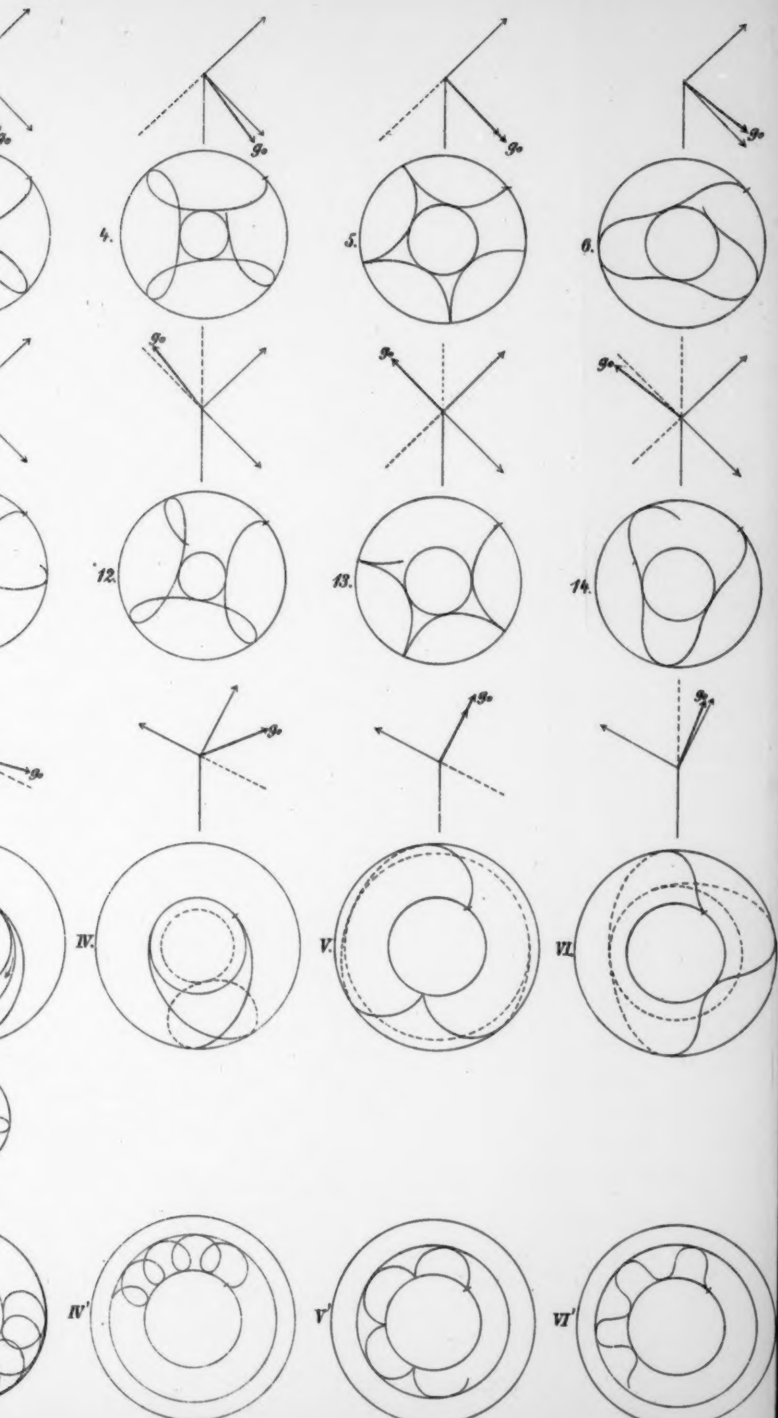
und beweisen somit die vierfache Perspectivität der beiden Tetraeder $abcd$ und $a'b'c'd'$. Die vier Perspectivitätscentra a'', b'', c'', d'' bilden ein drittes Tetraeder, welches, wie sich durch blosse Vertauschung von δ mit γ und β ergiebt, mit den Tetraedern $abcd$ und $a'b'c'd'$ ebenfalls in vierfacher Perspectivität steht, und zwar so, dass die bez. Perspectivitätscentra keine andern Punkte als die Ecken der Tetraeder $a'b'c'd'$ und $abcd$ sind. Desshalb befinden sich, nach der von Herrn Stephanos eingeführten Bezeichnung, die drei Tetraeder $abcd$, $a'b'c'd'$, $a''b''c''d''$ in desmischer Lage.

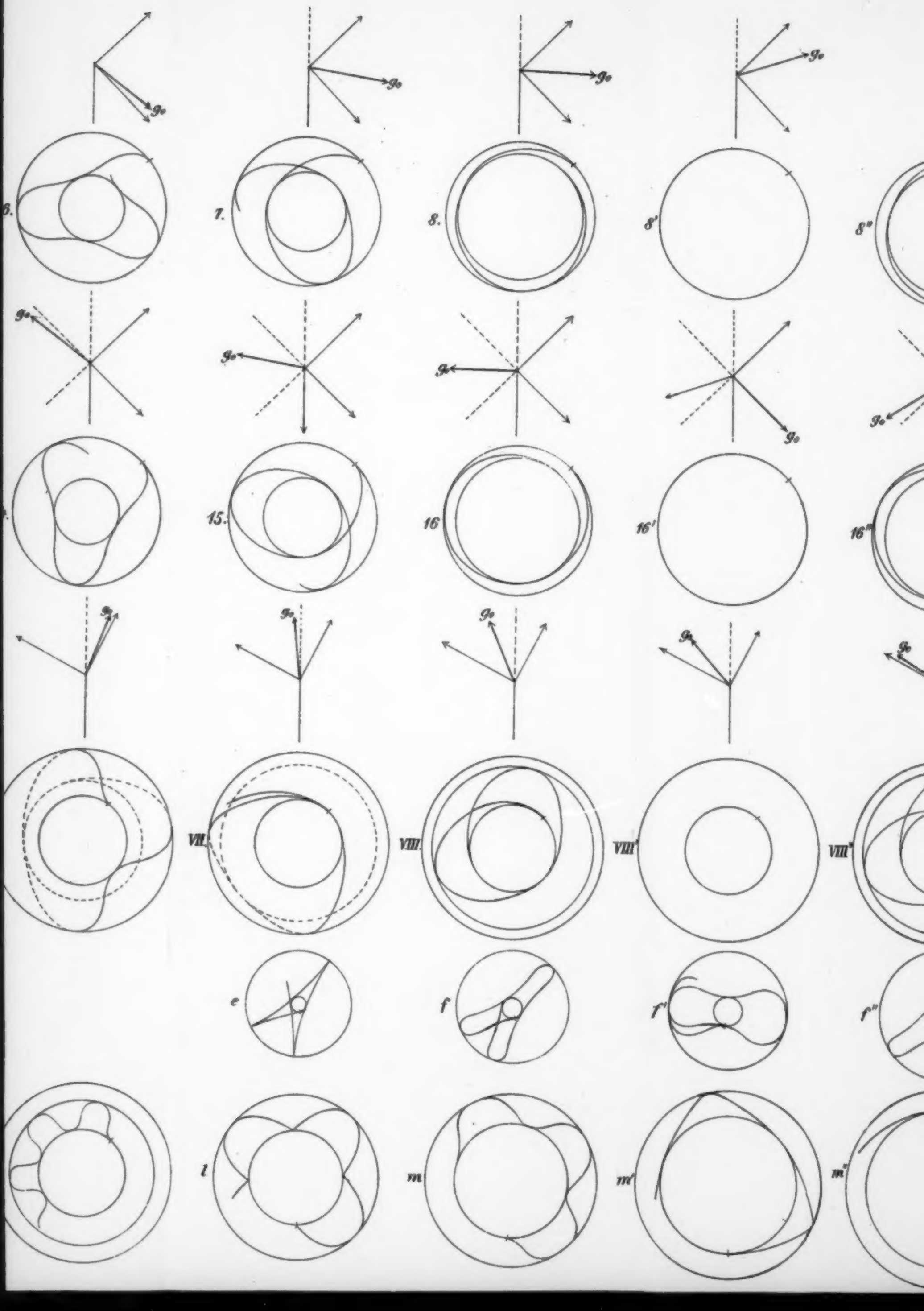
Mit Hilfe der aus (1) hervorgehenden Gleichungen erhält man, namentlich bei Anwendung der Grassmann'schen Principien, in höchst einfacher Weise die von den Herren Stephanos, Veronese, Hermes, Schröter, Reye u. A. entdeckten Resultate.

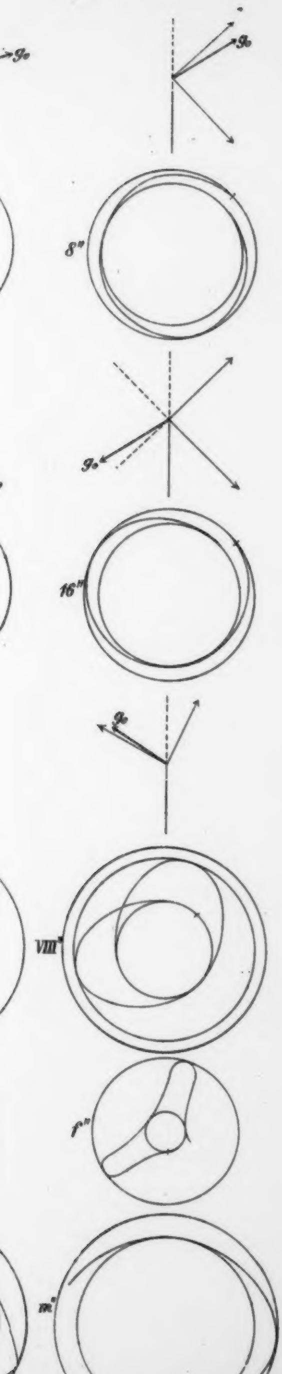
Paris, im April 1887.



M₀
g₀
Cn
1.
2.
2'
3.
4.
9.
10.
10'
11.
12.
I.
II.
II'
III.
IV.
a
b
c
d
g
h
i
k
IV'


4.
5.
6.
12.
13.
14.
IV.
V.
VI.
IV'
V'
VI'
g_0


6.
7.
8.
8'
8''
15.
16
16'
16''
VII.
VIII.
VIII'
VIII''
e
f
f'
f''
l
m
m'
m''


g₀
g₀
8''
g₀
16''
g₀
VIII''
f''
m''